

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С 324.1а  
Д-466

19/12-77

P2 - 10963

4989 / 2-77

М.Динейхан , Х.Намсрай , З.Омбоо

К ПОСТРОЕНИЮ ГРАДИЕНТНО-ИНВАРИАНТНОЙ  
КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ЧАСТИЦ  
СО СПИНАМИ 0 И 1  
В СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

**1977**

P2 - 10963

М.Динейхан\*, Х.Намсрай\*, З.Омбоо\*

К ПОСТРОЕНИЮ ГРАДИЕНТНО-ИНВАРИАНТНОЙ  
КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ЧАСТИЦ  
СО СПИНАМИ 0 И 1  
В СТОХАСТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

---

\* Институт математики АН МНР.

Динеихан М., Намсрай Х., Омбоо З.

P2 - 10963

К построению градиентно-инвариантной квантовой  
электродинамики частиц со спинами 0 и 1  
в стохастическом пространстве

Предложена схема построения градиентно-инвариантной квантовой электродинамики частиц со спинами 0 и 1. В основу схемы положен метод, развитый Д.И.Блохинцевым и базирующийся на понятии стохастичности пространства-времени. Исходя из уравнений Дэффина-Кеммера, удается построить в стохастическом пространстве конечную S-матрицу, удовлетворяющую всем фундаментальным принципам квантовой теории поля. Указывается рецепт проведения расчетов в рамках теории возмущений. Рассчитываются также диаграммы низших порядков: поляризация вакуума, собственной энергии мезона, вершинная диаграмма.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ и в Институте математики АН МНР.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Dineikhan M., Namsrai Kh., Omboo Z.

P2 - 10963

To the Construction of Gradient-Invariant  
Quantum Electrodynamics for Particles with the  
Spins 0 and 1 in Stochastic Space

A scheme for construction of gradient-invariant quantum electrodynamics for particles with spins 0 and 1 is suggested. It is based on the method developed by D.I. Blokhintsev proceeding from the conception of stochasticity space-time. In terms of the Daffin-Kemmer equation the final S matrix is successfully constructed in the stochastic space which satisfies all fundamental principles of the field quantum theory. The method for calculations within the perturbation theory is indicated. The low order diagrams are also calculated for vacuum polarization, meson self-energy, vertex diagram.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR and the Institute of Mathematics AN MPR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

## Введение

Электромагнитным свойствам векторных и скалярных заряженных частиц уделяется в последние годы все большее внимание в связи с успехом градиентных теорий слабых и электромагнитных взаимодействий лептонов и адронов<sup>/1/</sup>. В таких моделях должны существовать новые векторные частицы, например  $W^\pm$ , "очарованные" мезоны  $\mathcal{D}^\pm$  и т.д. Мезоны  $\mathcal{D}^\pm$  наблюдались экспериментально<sup>/2/</sup>.

Однако при исследованиях электромагнитных свойств этих частиц в рамках аппарата локальных квантованных теорий встречаются трудности, связанные с ультрафиолетовой расходимостью. Выход из этих трудностей был предложен в различных моделях, в частности, модели, основанной на гипотезе нелокального характера взаимодействия между квантованными полями на малых расстояниях<sup>/3/</sup> и стохастичности пространства и времени<sup>/4/</sup>.

Введением нелокальности только в электромагнитное поле  $A_\mu(x)$  в работах<sup>/5,6/</sup> была построена нелокальная квантовая электродинамика частиц со спинами 0, 1 и 1/2. Такое введение нелокальности полностью не устраняет расходимостей во всех диаграммах  $S$ -матрицы. Расходятся интегралы, соответствующие диаграммам поляризации вакуума, образованным пропагаторами заряженных частиц, вычисления которых обычно ведутся с помощью частично видоизмененной циклической регуляризации Паули-Вилларса.

Единственный подход к устранению ультрафиолетовых расходимостей во всех диаграммах был предложен в работе<sup>/7/</sup> и там же построена градиентно-инвариантная спинорная электродинамика.

Настоящая статья является продолжением этой работы и посвящена построению градиентно-инвариантной квантовой электродинамики частиц со спинами 0 и 1 в рамках стохастического пространства на основе уравнений первого порядка Дэффина-Кеммера<sup>16)</sup>.

Исследование ряда теории возмущений для  $S$ -матрицы, построенной на основе уравнений Дэффина-Кеммера, формально будет таким же, как и в спинорной электродинамике и, следовательно, в данном случае мы будем пользоваться методами и приемами, разработанными нами ранее при конструировании градиентно-инвариантной спинорной электродинамики в стохастическом пространстве.

Итак, координаты стохастического пространства  $\Gamma_4^m(\hat{x})$ , определенного в работе<sup>14)</sup>, теперь принимают вид:

$$\hat{x}_\mu = x_\mu + i a \rho_\mu, \quad \rho_\mu = \beta_\mu + \hat{\delta}_\mu \varrho,$$

где  $\beta_\mu$  - четыре шестнадцатирядные матрицы,  $a$  - амплитуда флуктуации координаты с некоторым распределением  $W(a/L)$

$$\int da W(a/L) = 1,$$

$\hat{\delta}_\mu$  - некоторый проектирующий оператор, действия которого определены в работе<sup>17)</sup>. Конкретный вид матрицы  $\varrho$  определяется таким образом, чтобы собственное значение оператора  $i a \rho_\mu$  в  $p$ -представлении имело вид  $\pm a \sqrt{m^2 - p^2}$ .

Например, пятирядная матрица  $\varrho$  имеет следующий вид:

$$\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Усреднение поля  $\Psi(\hat{x})$  заряженного бозона в этом стохастическом пространстве  $\Gamma_4^m(\hat{x})$  приводит к изменению пропагатора частицы:

$$T(p) = \frac{\hat{p}(\hat{p}+m) - p^2 + m^2}{m(m^2 - p^2 - i\varepsilon)} \Rightarrow V(\sqrt{m^2 - p^2}) T(p) \equiv T_r(\hat{p}),$$

где  $V(z) = \left[ \int da W\left(\frac{a}{L}\right) e^{iaz} \right]^2$  - некоторая целая функция конечного порядка роста  $1/2 \leq p < \infty$ .

Как показано в работе /7/, чтобы такая модифицированная теория удовлетворяла условию градиентной инвариантности, необходимо изменить вид однофотонной вершины

$$\beta_\mu \Rightarrow \mathcal{U}_\mu(q, \kappa) = -d_\mu(\kappa) T_r^{-1}(\hat{q}),$$

согласно тождеству Уорда-Такахаши, а также дополнительно ввести бесконечное число многофотонных вершин /см. более подробно в /8/.

Использованные нами соотношения для доказательства градиентной инвариантности  $S$ -матрицы в спинорной электродинамике без труда могут быть получены и в нашем случае. Например, справедливы следующие тождества /определение  $d_\mu$ -операции дано в работах /7, 8/

$$d_\mu(\kappa) T_r(\hat{q}) = T_r(\hat{q} + \hat{\kappa}) \mathcal{U}_\mu(q, \kappa) T_r(q), \quad |11|$$

$$(\hat{p} - \hat{q}_\mu) \Gamma_\mu(p, q) = T_r(\hat{p}) - T_r(\hat{q}), \quad |12|$$

где

$$\Gamma_\mu(p, q) = T_r(\hat{p}) \mathcal{U}_\mu(\kappa, q) T_r(\hat{q}), \quad \kappa = p - q$$

$$\mathcal{U}_\mu(\kappa, q) = \beta_\mu V^{-1}(-q^2 L^2) + (m - \hat{q} - \hat{\kappa}) V^{-1}(-p^2 L^2) \cdot$$

$$\cdot [d_\mu(\kappa) V(-q^2 L^2)] V^{-1}(-q^2 L^2),$$

и

$$d_\mu(\kappa) V(-q^2 L^2) = \left\{ V(-p^2 L^2) - V(-q^2 L^2) \right\} \cdot \frac{\kappa_\nu - 2\beta_\mu \hat{\kappa} + 2\hat{\kappa} \beta_\mu}{\kappa^2}.$$

|13|

Перейдем теперь к исследованию ряда теории возмущений для

$S$ -матрицы. Поскольку наше рассмотрение прямо основано на наших предыдущих работах<sup>[6,7]</sup>, мы не будем излагать всей подробности, а только приведем основные результаты.

#### Диаграмма поляризации вакуума

В импульсном представлении матричный элемент  $S$ -матрицы, соответствующий диаграммам поляризации вакуума, представленным на рис.1а во втором порядке теории возмущений, определяется следующим выражением [см. подробнее в [7]]:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{\rho}(\kappa_1, \kappa_2) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{i e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 q V^{\delta}(-q^2 L^2) S_{\rho} \left\{ \Gamma_{\mu\nu}^{\delta}(q, \kappa_1, \kappa_2) T_{\rho}^{\delta}(q) \right\}, \quad /4/$$

где  $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$ ,  $q_2 = q + \kappa_1 + \kappa_2 - q$ ,

$$T_{\rho}^{\delta}(q) \Gamma_{\mu\nu}^{\delta}(q, \kappa_1, \kappa_2) T_{\rho}^{\delta}(q) = (-1)^2 d_{\mu}(\kappa_1) d_{\nu}(\kappa_2) T_{\rho}^{\delta}(q).$$

Используя определения  $d_{\mu}$ -операции [3] для целых функций и раскрывая равенство [4], получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{\rho}(\kappa) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{i e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 q S_{\rho} \left\{ \beta \frac{V^{\delta}(-q^2 L^2)}{m - \hat{q}} \beta \frac{1}{m - \hat{q}} + \right. \\ &+ \beta \frac{1}{m - \hat{q}} \left[ d_{\nu}(\kappa) V^{\delta}(-q^2 L^2) \right] + \left. \frac{1}{2} d_{\mu}(\kappa) d_{\nu}(-\kappa) V^{\delta}(-q^2 L^2) \right\} = \\ &= \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(1)}(\kappa) + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)}(\kappa) + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(3)}(\kappa), \end{aligned}$$

где

$$q_1 = q + \kappa, \quad \frac{1}{m - \hat{p}} = \frac{\hat{p}(\hat{p} + m) - p^2 + m^2}{m(m^2 - p^2 - i\varepsilon)},$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(1)}(\kappa) = \frac{1}{16} \frac{\rho}{\beta} \frac{\Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\beta)} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{-\beta} 2^{\beta} (1-y)^{\beta} \int d^4 q_E \left\{ (\kappa_{\mu} \kappa_{\nu} - \kappa^2 g_{\mu\nu}) \cdot \right.$$

$$\cdot \left( \sigma_1 y^2 + \left( \frac{\sigma_1}{2} - 1 \right) \frac{q_E^2}{m^2} \right) + g_{\mu\nu} \sigma_1 \left( q_E^2 + 2m^2 - \frac{\kappa^2}{4} (1-y^2) \right) \left\{ \left[ q_E^2 + m^2 - \frac{\kappa^2}{4} (1-y^2) \right]^{-2+s} \right.$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)}(\kappa) = -\frac{\rho_5}{8} \frac{\Gamma(-3)}{\Gamma(-3)} \int_{-1}^1 dy (1-y^2)^{-3} 2^3 (1-y)^5 \int d^4 q_E \sigma_1 g_{\mu\nu} \left[ q_E^2 + m^2 - \frac{\kappa^2}{4} (1-y^2) \right]^{-3-1}$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(3)}(\kappa) = 4 \left( g_{\mu\nu} \kappa^2 - \kappa_\mu \kappa_\nu \right) \sigma_1 \rho_5 \int d^4 q_E \left\{ \frac{1}{(m^2 + q_E^2)^{-3}} - \frac{1}{(m^2 + q_E^2)^{-3}} \right\}$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} 2 & \text{спин } s=0 \\ 6 & \text{спин } s=1 \end{cases}$$

Здесь мы воспользовались представлением для формфактора

$$V^{\delta}(-q^2 L^2) = \frac{1}{2i} \int_{-i-\infty}^{-i+\infty} d\zeta \frac{\nu(\zeta)}{\sin \pi \zeta} e^{\delta \zeta^2} \left[ (m^2 - q^2) L^2 \right]^\zeta \quad (51)$$

и обозначением

$$\rho_5 = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{2i} \int_{-i-\infty}^{-i+\infty} d\zeta \frac{\nu(\zeta)}{\sin \pi \zeta} L^{2\zeta}, \quad y = 1 - 2x; \quad (1 < \zeta < 2).$$

Выполнив интегрирование по  $d^4 q_E$ , получим:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(1)}(\kappa) = -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2i} \int_{-i-\infty}^{-i+\infty} d\zeta \frac{\nu(\zeta) (m^2 L^2)^\zeta}{\sin \pi \zeta} \int_0^1 dx (1-x)^{-\zeta} \left\{ (g_{\mu\nu} \kappa^2 - \kappa_\mu \kappa_\nu) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (1-2x)^2 \frac{\Gamma(-3)}{\Gamma(-3)} \mathcal{L}_0^5 + 2m^2 g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(-1-3)}{\Gamma(-3)} \mathcal{L}_0^{1+3} \right\},$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)}(\kappa) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2i} \int_{-i-\infty}^{-i+\infty} d\zeta \frac{\nu(\zeta) (m^2 L^2)^\zeta}{\sin \pi \zeta} \frac{\Gamma(-1-3)}{\Gamma(-3)} \int_0^1 dx (1-x)^{-\zeta} \mathcal{L}_0^{1+3} \cdot 2g_{\mu\nu} m^2$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(3)}(\kappa) = 0, \quad \mathcal{L}_0 = 1 - \frac{\kappa^2}{m^2} x(1-x)$$

для скалярной частицы,

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(1)}(\kappa) = -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2i} \int_{-i-\infty}^{-i+\infty} d\zeta \frac{\nu(\zeta) (m^2 L^2)^\zeta}{\sin \pi \zeta} \int_0^1 dx (1-x)^{-\zeta} \left\{ 3 \left[ (g_{\mu\nu} \kappa^2 - \kappa_\mu \kappa_\nu) (1-2x)^2 \right. \right.$$



$$\left. \frac{\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} \mathcal{L}_0^\gamma + 2g_{\mu\nu} m^2 \frac{\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} \mathcal{L}_0^{\gamma+1} \right] +$$

$$+ 2(g_{\mu\nu} K^2 - K_\mu K_\nu) \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma)} \mathcal{L}_0^{\gamma+1} \left. \right\},$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)}(K) = 6m^2 g \frac{2}{4\pi} \frac{1}{2i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} d\zeta \frac{\nu(\zeta) (m^2 L^2)^\zeta}{\sin \pi \zeta} \frac{\Gamma(1-\zeta)}{\Gamma(1-\zeta)} \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 dx (1-x)^{-\zeta} \mathcal{L}_0^{1+\zeta},$$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(3)}(K) = 0$$

для векторной частицы.

Отсюда видно, что в обоих случаях скалярной и векторной частиц выражение  $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)}(K)$  и второй член в  $\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(1)}(K)$  взаимно сокращаются.

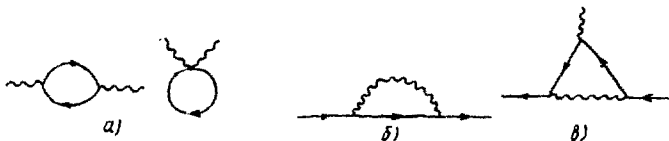


Рис. 1

Запишем теперь оставшиеся члены:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(c)}(K) = -\frac{2}{4\pi} \frac{1}{2i} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} d\zeta \frac{\nu(\zeta) (m^2 L^2)^\zeta}{\sin \pi \zeta} \int_0^1 dx (1-x)^{-\zeta} \cdot$$

$$(g_{\mu\nu} K^2 - K_\mu K_\nu) (1-2x)^2 \frac{\Gamma(1-\zeta)}{\Gamma(1-\zeta)} \mathcal{L}_0^\zeta,$$

$(0 < \delta < 1)$

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(v)}(k) = (K_\mu K_\nu - K^2 g_{\mu\nu}) \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{2l} \int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} d\zeta \frac{v(\zeta)}{\sin \pi \zeta} (m^2 L^2)^\zeta \left\{ 3(1-2x)^2 \right. \\ \left. \frac{\Gamma(-\zeta)}{\Gamma(1-\zeta)} \mathcal{L}_0^\zeta + 2 \frac{\Gamma(-1-\zeta)}{\Gamma(1-\zeta)} \mathcal{L}_0^{1+\zeta} \right\}.$$

В предположении малости  $m^2 L^2 \ll 1$  /что то же  $m^2 L^2 \ll 1$ / полученные выражения приобретают вид

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(c)}(k) = (K^2 g_{\mu\nu} - K_\mu K_\nu) \frac{\alpha}{24\pi} \left\{ \frac{K^2}{m^2} \int_0^1 dy \frac{y^3}{1 - \frac{K^2}{m^2} (1-y^2)} + 2 [v'(0) + \log m^2 L^2] + \frac{7}{8} \right\}, \\ \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(v)}(k) = (K^2 g_{\mu\nu} - K_\mu K_\nu) \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \int_0^1 dx \left[ 2 - 2 \frac{K^2}{m^2} x(1-x) - 3(1-2x)^2 \right] \cdot \right. \\ \left. \log \left( 1 - \frac{K^2}{m^2} x(1-x) \right) \right] + 2 \left( 2 - \frac{K^2}{6m^2} \right) (v'(0) + \log m^2 L^2) - \frac{7}{4} \frac{\delta}{m^2 L^2} - \\ \left. - \frac{\delta}{5} \frac{K^2}{m^2} + \frac{10}{3} + 2 \frac{K^2}{m^2} x(1-x) \right\}, \quad \delta = v'(-1).$$

Проводя перенормировку заряда скалярной частицы, а также заряда и массы для векторного бозона, мы получаем обычные квантово-электродинамические выражения для поляризации вакуума этих частиц:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(c)}(k) = (K^2 g_{\mu\nu} - K_\mu K_\nu) \frac{\alpha}{24\pi} \frac{K^2}{m^2} \int_0^1 dy \frac{y^4}{1 - \frac{K^2}{m^2} (1-y^2)}, \\ \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(v)}(k) = (K^2 g_{\mu\nu} - K_\mu K_\nu) \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 dx \left[ \left( 2 - 2 \frac{K^2}{m^2} x(1-x) - 3(1-2x)^2 \right) \cdot \right. \\ \left. \log \left( 1 - \frac{K^2}{m^2} x(1-x) \right) - 3(1-2x) \frac{K^2}{m^2} x(1-x) + 2 \frac{K^2}{m^2} x(1-x) \right].$$

Окончательно после несложных преобразований второй член принимает вид

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(v)}(k) = (K^2 g_{\mu\nu} - K_\mu K_\nu) \frac{-\alpha}{8\pi} K^4 \int_{4m^2}^{\infty} du \frac{1}{u^2(u - K^2 - i\epsilon)}.$$

$$\sqrt{\frac{u-4m^2}{u}} \int_{-1}^1 dV \left\{ \Phi_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{V}{2} \sqrt{\frac{u-4m^2}{u}} \right) + \Phi_2 \left( \frac{1}{2} + \frac{V}{2} \sqrt{\frac{u-4m^2}{u}} \right) \right. \\ \left. \cdot \frac{2i}{m^2} \right\}, \quad \Phi_1(x) = 2 - 3(1-2x)^2, \quad \Phi_2 = -2x(1-x).$$

### Диаграмма собственной энергии

Рассмотрим диаграмму собственной энергии, представленную на рис 1 б.

В стохастическом пространстве член матрицы рассеяния, соответствующий этой диаграмме, имеет вид

$$-i \bar{\Psi}(x) \Sigma_r(x-y) \Psi(y),$$

$$\Sigma_r(x-y) = \langle \Sigma_r(\hat{x}-\hat{y}) \rangle_r = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4\rho e^{i\rho(x-y)} \tilde{\Sigma}_r(\rho),$$

где

$$\tilde{\Sigma}_r(\rho) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4k V(-k^2 L^2) \beta \frac{m^2(\rho-k)^2 + (\hat{\rho}-\hat{k})(\hat{\rho}-\hat{k}+m)}{-k^2 - i\epsilon} \int_{\mu} \beta \tilde{V}(-(\rho-k)^2, \delta).$$

Воспользуемся далее представлением /5/ фактора  $V(-k^2 L^2)$ .

Тогда после некоторых вычислений получим

$$\tilde{\Sigma}_r(\rho) = \frac{e}{4\pi} \left\{ \left[ B + \frac{\hat{\rho}}{m} + \frac{\hat{\rho}^2}{m^2} (1-B) \right] \mathcal{J}_{0,0}(m^2 L^2, \frac{\rho^2}{m^2}) - \left[ 2(1-B) \frac{\hat{\rho}^2}{m^2} + \frac{\hat{\rho}}{m} \right] \cdot \right.$$

$$\left. \mathcal{J}_{1,0}(m^2 L^2, \frac{\rho^2}{m^2}) - \frac{1}{2} B(1-B) \mathcal{J}_{1,1}(m^2 L^2, \frac{\rho^2}{m^2}) + (1-B) \frac{\hat{\rho}^2}{m^2} \mathcal{J}_{2,0}(m^2 L^2, \frac{\rho^2}{m^2}) \right\},$$

где:

$$B = \beta_{\mu} \beta_{\mu}, \quad \hat{\rho} = \beta_{\mu} \rho_{\mu} = \beta_0 \rho_0 - \vec{\beta} \vec{\rho},$$

$$\mathcal{J}_{a,\ell}(m^2 L^2, \frac{\rho^2}{m^2}) = \frac{1}{2i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} d\zeta \frac{v(\zeta) (m^2 L^2)^\zeta}{\sin \pi \zeta}$$

$$\frac{1}{2i} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} d\eta \frac{v(\eta) (m^2 L^2)^\eta}{\sin \pi \eta} \mathcal{J}_{a,\ell}(\zeta, \frac{\rho^2}{m^2}), \quad \frac{a+\ell}{2} < 3+\gamma < \frac{a+\ell+1}{2}$$

$$\mathcal{J}_{a,\ell}(\zeta, \frac{\rho^2}{m^2}) = \frac{\Gamma(-\ell-\zeta-\eta)}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^1 du \cdot u^{-\zeta} (1-u)^{\zeta+a} \left(1 - \frac{\rho^2}{m^2} u\right)^{\zeta+\eta+\ell}$$

Вычислим электромагнитную поправку к массе частицы в двух пределах  $m^2 L^2 \ll 1$  и  $m^2 L^2 \gg 1$ . Имеем:

1/ Для  $m^2 L^2 \ll 1$

$$\tilde{\Sigma}(m) = \frac{3\alpha B(B-1)}{48\pi} \int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} d\eta \frac{v(\eta)v(1-\eta)}{[\sin \pi \eta]^2} \frac{\Gamma(1-\eta)}{m^2 L^2} m \left[ 1 + O(\log m^2 L^2) \right] =$$

$(0 < \beta < 1)$

$$= \begin{cases} \frac{3\alpha}{4\pi} \frac{m}{m^2 L^2} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\eta \frac{v(\eta)v(1-\eta)}{[\sin \pi \eta]^2} \Gamma(1-\eta) \left[ 1 + O(\log m^2 L^2) \right]; & s=0, \\ -\frac{\alpha}{4\pi} \frac{m}{m^2 L^2} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\eta \frac{v(\eta)v(1-\eta)}{[\sin \pi \eta]^2} \Gamma(1-\eta) \left[ 1 + O(\log m^2 L^2) \right]; & s=1, \end{cases}$$

2/ Для  $m^2 L^2 \gg 1$

$$\tilde{\Sigma}(m) = \frac{\alpha}{2mL} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\eta \frac{v(\eta)v(-\frac{1}{2}-\eta)}{\sin^2 \pi \eta} m \left( 1 + O\left(\frac{1}{m^2 L^2}\right) \right)$$

$+\frac{1}{2} < \gamma < 1$ .

Вершинная диаграмма и статистические характеристики бозонов

Рассмотрим вершинную диаграмму, представленную на рис I в. Вершинная функция в импульсном пространстве, согласно принятой нами модификации, в стохастическом пространстве приобретает вид:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\mu}(\rho, q) &= \frac{i e^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \mathcal{D}_{\mu}((\rho-k)^2) \beta_{\nu} T_{\mu}^c(\hat{k}+\hat{q}) U_{\mu}(\kappa, q) T_{\mu}^c(\kappa) \beta_{\nu} = \\ &= \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{m^2} \rho(z, 2) \left\{ 2 \Gamma(-5-2) M_{1\mu} - \frac{1}{m^2} \frac{\Gamma(1-2-3)}{\mathcal{L}} M_{2\mu} - 6 m^2 \Gamma(1-7-3) \alpha M_{3\mu} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \rho(z, 2) &= \frac{1}{2i} \int_{-\beta+100}^{-\beta-100} d\tau \frac{v(\tau)}{\sin \pi \tau} \frac{1}{2i} \int_{-\delta+100}^{-\delta-100} d\varrho \frac{v(\varrho)}{\sin \pi \varrho} \frac{(m^2 z^2)^{3+2}}{\Gamma(7-3) \Gamma(7-2)} \\ &\cdot \int_0^1 da d\delta d\gamma \frac{\delta^{-3} \delta^{-2} \delta^{(4)} (1-a-\delta-\gamma)}{\mathcal{L}^{7+3}}, \\ \mathcal{L} &= \delta + \gamma - a\delta \frac{\rho^2}{m^2} - \delta\gamma \frac{q^2}{m^2} - a\delta \frac{(\rho+q)^2}{m^2}, \end{aligned}$$

а функции  $M_{i\mu}$  ( $i=1,2,3$ ) определяются следующим образом:

$$M_{1\mu} = f_{\mu} + \frac{m}{2\delta} \int_0^1 dz z^{2-2-3} \frac{\Gamma(1-2)}{\Gamma(-2)} A_{1\mu} \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}} \right)^{2+3} - \frac{m}{2} Q_{\mu} \left( \frac{z_0}{\mathcal{L}} \right)^{2+3},$$

$$M_{2\mu} = f_{2\mu} + \frac{m}{\delta} \int_0^1 dz z^{2-2-3} \frac{\Gamma(1-2)}{\Gamma(-2)} A_{2\mu} \left( \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}} \right)^{2+3-1} - m Q_{2\mu} \left( \frac{z_0}{\mathcal{L}} \right)^{2+3-1} \cdot \alpha,$$

$$M_{3\mu} = f_{3\mu} = \beta_{\nu} \left(1 - \frac{B}{4}\right)_{\mu} \beta_{\nu} \left(1 - \frac{B}{4}\right)_{\nu} = \frac{1}{16} \beta_{\mu} (\tau-4),$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{X} &= z \left( \mathcal{L} - \frac{\mathcal{Q}^2}{m^2} (1 - z_0) \right), \quad z_0 = \gamma - \frac{\rho^2}{m^2} \alpha (1 - \alpha), \\
 A_{1\mu} &= S_{\mu\nu} q^\nu (2B-4) \left[ m^2 (2\alpha^2 + \frac{\alpha}{2} - 6\delta - 5 - (1-\gamma)) + z m^2 (2\delta^2 + \alpha^2) \right. \\
 &\quad \left. + z^2 m^2 \frac{1}{2} (-8\alpha^3 - \alpha^2 \delta) + \frac{z^2 q^2}{2} (2\delta^3 + \alpha \delta^2 - 31\alpha^2 \delta) \right] + S_{\mu\nu} q^\nu (2B-5) \cdot \\
 &\quad \left[ \frac{1}{2} (2(1-\gamma) + 10 + 10\delta + \alpha + 4\alpha^2) - z m^2 (2\delta^2 + \alpha^2) + z^2 m^2 \frac{\alpha^2}{2} \cdot \right. \\
 &\quad \left. (9\delta + 5\alpha) - z q^2 \frac{\delta}{2} (2\delta^2 + 3\alpha\delta - 31\delta^2) \right] + \beta_\mu \left[ m^3 (\alpha (2B-5) + \right. \\
 &\quad \left. + 2(1-\alpha)^2 + 8) - 2m q^2 z (1-\gamma) \delta + z^2 m^3 (6\delta \alpha^2 (2B-5) + 3\delta^2 B + \right. \\
 &\quad \left. + \alpha^2 + 2\alpha^3 (5-B)) + z^2 m q^2 (14\delta \alpha^2 - \alpha \delta^2 + \alpha^2 (1-\gamma) + 2\delta (1+2\alpha) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \alpha (4-B)) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{2\mu} &= S_{\mu\nu} q^\nu (2B-4) \left[ 3z\delta + \frac{3}{4} z\alpha + \frac{3}{4} z\alpha\tau - \frac{23}{2} z\alpha - \frac{23}{8} z\alpha \right] + \\
 &\quad + S_{\mu\nu} q^\nu (2B-5) \left[ \frac{109}{8} z\alpha - \frac{3}{4} z\alpha\tau - 3z\delta \right] + \beta_\mu \left[ 37z\alpha\tau + 25z\alpha B + \right. \\
 &\quad \left. + 6zm\alpha - \frac{1}{2} B \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{1\mu} &= S_{\mu\nu} q^\nu (2B-4) \left[ m^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{5}{2} \alpha^2 + 2 + \frac{\alpha}{2} \right) \right] + S_{\mu\nu} q^\nu (2B-5) m^2 \cdot \\
 &\quad \cdot \left( 2\alpha^2 - 2 - \frac{\alpha}{2} \right) + \beta_\mu m^3 (1 + \alpha + 5\alpha^2 (1-B)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{2\mu} &= S_{\mu\nu} q^\nu (2B-4) \left[ \frac{2+\alpha}{4} \tau - 15(\alpha + \frac{1}{8}) \right] + S_{\mu\nu} q^\nu (2B-5) \left[ \frac{3}{2} + \right. \\
 &\quad \left. + 12\alpha - \frac{2+\alpha}{4} \tau \right] + m\beta_\mu \left[ \frac{1+2\alpha}{2} \tau - \frac{1}{2} (1+B) - 3\alpha (1+2B) \right],
 \end{aligned}$$

$$f_{1\mu} = \beta_\nu \left\{ N_{\mu}^{\beta} (1 - \frac{B}{4}) - \frac{1}{4} \gamma_{\rho}^{\beta} \beta_{\mu}^{\rho} + (1 - \frac{B}{4}) \beta_{\mu}^{\beta} C \right\} \beta_{\nu},$$

$$f_{2\mu} = \beta_{\nu} N_{\mu}^{\beta} C \beta_{\nu},$$

$$N = \hat{q}^2 - [\hat{\mathcal{D}}\hat{q}]_+ + (2\mathcal{D}) - q^2 + m^2 + m(\hat{q} - \hat{\mathcal{D}}) + \hat{\mathcal{D}}^2 - \mathcal{D}^2,$$

$$T_p = -[\beta_p \hat{\mathcal{D}}]_+ + m\beta_p + 2\mathcal{D}_p, \quad B = \beta_\mu \beta_\mu,$$

$$\mathcal{D}_p = [\hat{q}\beta_p]_+ - 2q_p + m\beta_p - [\beta_p \hat{\mathcal{D}}]_+ + 2\mathcal{D}_p, \quad \mathcal{D} = d\mathcal{D} - \mathcal{D}p$$

$$C = m^2 - m\hat{\mathcal{D}} + \hat{\mathcal{D}}^2 - \mathcal{D}^2, \quad \tau = (5-B)B = \begin{cases} 6, & s=1 \\ 4, & s=0 \end{cases}$$

Легко проверить, что вершинная часть удовлетворяет условию градиентной инвариантности

$$q_\mu \tilde{u}(\vec{p} + \vec{q}) \tilde{\Gamma}_\mu(p, q) u(\vec{p}) = 0, \quad /6/$$

где  $u(\vec{p})$ ,  $u(\vec{p} + \vec{q})$  - спиноры, описывающие бозоны в начальном и конечном состояниях.

Это равенство основано на тождестве /2/.

Вычислим теперь статистические величины, характеризующие электромагнитные свойства бозонов /подобные исследования проводятся в работе /6/.

После элементарных, хотя длинных, выкладок функция  $e\bar{\Psi}(\beta_\mu + \tilde{\Gamma}_\mu(p, q))\Psi$  приводится к следующему виду:

$$e\bar{\Psi}(\beta_\mu + \tilde{\Gamma}_\mu(p, q))\Psi = e\bar{\Psi}\beta_\mu \left(1 + \frac{1}{2m} F_0(q^2)\right)\Psi + \\ + \mathcal{D}_{\mu\nu} q^\nu F_1(q^2) + Q_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2), \quad /7/$$

где антисимметричные тензоры

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \frac{e}{2m} \bar{\Psi} S_{\mu\nu} (2B-4)\Psi \quad \text{и} \quad Q_{\mu\nu} = -\frac{e}{2m} \bar{\Psi} S_{\mu\nu} (2B-5)\Psi,$$

$$S_{\mu\nu} = \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu$$

определяют дипольный  $\delta\mu_1$  и квадрупольный  $\delta\mu_2$  моменты бозона со спином 1/6/, соответственно, а функции  $F_i(q^2)$  ( $i=0,1,2$ ) имеют вид

$$F_i(q^2) = \frac{\alpha}{4\pi} f(3, 2) \left\{ 2 \Gamma(-3-2) t_i - \frac{1}{m^2} \frac{\Gamma(-2-3)}{\mathcal{I}} a_i^- \right\}$$

$$-6m^2 \Gamma(-1-3-2) \rho_i \cdot \mathcal{L} \}.$$

Здесь  $t_0 = \frac{1}{4} \left\{ \frac{q^2}{2} \left[ \frac{5}{2} \alpha - \frac{3}{2} + 2\delta(\alpha + \delta) \right] + 2m^2 [1 + \alpha(4 - \tau)] \right\} +$   
 $+\frac{m}{2\delta} \int_0^1 dz z^{1-2-3} \frac{\Gamma(1-2)}{\Gamma(-2)} m [3z\alpha\tau - 25z\alpha\delta + 6z \cdot \alpha - \frac{1}{2} + B] \left( \frac{z}{\mathcal{L}} \right)^{2+3} -$   
 $-\frac{m^2}{2} \left( \frac{z_0}{\mathcal{L}} \right)^{2+3} \left[ \frac{1+2\alpha}{2} \tau - \frac{1}{2}(1+B) - 3\alpha(1+2B) \right],$   
 $a_0 = \frac{q^4}{4} \delta \alpha (7 - \alpha - \delta) + m^4 \left\{ (1-\alpha)^2 \left( \frac{5}{2}(\alpha - \delta) + 1 - 4\alpha \right) + \alpha + \alpha^2(2 + \alpha) \right\} +$   
 $+\frac{q^2 m^2}{2} \left\{ (1-\alpha-\delta)(1-\delta)(5\delta + 1 - \alpha^2) + \delta(1+\alpha)(2 - \alpha^2 + 10\alpha) + \right.$   
 $+ 2(1-\delta - \frac{\alpha}{2})(\alpha(\delta - \alpha + 1) + 2\delta) - \alpha^2(7 + \alpha) - 9\alpha\delta - 4\delta - 2\alpha -$   
 $- \alpha^2\delta \left. \right\} + \frac{m}{\delta} \int_0^1 dz z^{2-2-3} \frac{\Gamma(1-2)}{\Gamma(-2)} \left( \frac{z}{\mathcal{L}} \right)^{2+3-1} \left[ m^3((2(2B-5) + \right.$   
 $+ 2(1-\alpha)^2 + 8) - 2m\delta^2 z(1-\delta)\delta + z^2 m^2(6\delta\alpha^2(2B-5) +$   
 $+ 3\alpha^2 B + \alpha^2 + 2\alpha^3(5-B)) + z^2 m\delta^2(14\delta\alpha^2 - \alpha\delta^2 + \alpha^2(1-\delta) +$   
 $+ 2\delta(1+2\alpha)\alpha(4-B)) \left. \right] - m \left( \frac{z_0}{\mathcal{L}} \right)^{2+3-1} \left[ m^3(7 + \alpha + 5\alpha^2(1-B)) \right],$   
 $\rho_0 = \frac{1}{16}(\tau - 4), \quad \rho_1 = \rho_2 = 0$

Остальные члены, дающие вклад в дипольный и квадрупольный моменты, имеют вид:

$$t_1 = \frac{m}{4} \left\{ (1-\alpha)\tau + 12\alpha - 4 \right\} + \frac{m}{2\delta} \int_0^1 dz z^{1-2-3} \left( \frac{z}{\mathcal{L}} \right)^{2+3} \left[ 3z\delta + \frac{3}{4}z\alpha + \right.$$
  
 $\left. + \frac{3}{4}z\alpha\tau - \frac{23}{2}z\alpha - \frac{23}{8}z\alpha \right] - \frac{m}{2} \left( \frac{z_0}{\mathcal{L}} \right)^{2+3} \left\{ \frac{2+\alpha}{4}\tau - 12\alpha - \frac{15}{8} - 3\alpha \right\},$   
 $a_1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{m^2}{2} (1-\alpha^2)(7\alpha - 3) + \frac{1}{2} m\delta q^2 [3(1-\alpha-\delta) - \alpha^2] \right\} + \frac{m}{\delta} \int_0^1 dz z^{2-2-3}$



$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{L}}\right)^{2+3-1} \left[ m^2(2a^2 + \frac{1}{2}a - 6\delta - 5 - (1-\nu)) + z m^2(2\delta^2 + a^2) + \right. \\
& \left. + z^2 m^2 \frac{1}{2}(-8a^3 - a^2\delta) + \frac{z^2 \delta^2}{2}(2\delta^3 + a\delta^2 - 31a^2\delta) \right] - m \left(\frac{z_0}{\mathcal{L}}\right)^{2+3-1} \frac{1}{a} \cdot \\
& \quad \cdot \left[ m^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{a^2}{2} + 2 + \frac{a}{2} - 2a^2 \right) \right], \\
a_2 = & m^3 \left[ (1-a^2) \frac{1}{2}(3a-1) + a\delta(1-a-\delta) \right] + \frac{m}{2} \delta q^2 (1-a-\delta - \frac{a^2}{2}) + \\
& + \frac{m}{\delta} \int_0^1 dz z^{2-2-3} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{L}}\right)^{2+3-1} \left[ \frac{m^2}{2}(2(1-\nu)) + 10 + 10\delta + a + 4a^2 \right] - \\
& - z m^2(2\delta^2 + a^2) + z^2 m^2 \frac{a^2}{2}(9\delta + 5a) - z q^2 \frac{\delta}{2}(2\delta^2 + 3a\delta - 31a^2) \Big] - \\
& - m \left(\frac{z_0}{\mathcal{L}}\right)^{2+3-1} \frac{1}{a} \cdot \left[ 2a^2 - 2 - \frac{a}{2} \right], \\
t_2 = & \frac{m}{4} \left\{ (1-a)\tau + \frac{21}{2}a - \frac{9}{2} \right\} + \frac{m}{2\delta} \int_0^1 dz z^{1-2-3} \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \left(\frac{\mathcal{Z}}{\mathcal{L}}\right)^{2+3} \left[ \frac{109}{8}za - \right. \\
& \left. - \frac{3}{4}z\tau - 3z\delta \right] - \frac{m^3}{2} \left(\frac{z_0}{\mathcal{L}}\right)^{2+3} \left[ \frac{3}{2} + 12a - \frac{2a}{4}\tau \right].
\end{aligned}$$

Выражение  $\Gamma/\Gamma$  имеет общую форму для скалярных и векторных бозонов. Рассмотрим член, пропорциональный матрице  $\beta_\mu$ :

$$\begin{aligned}
\Lambda(0) = & \frac{1}{2m} F_0(0) = \frac{a}{4\pi} \left\{ \left[ \log m^2 L^2 + V(0) \right] \left[ -\frac{19}{12} - \frac{11}{32}(\tau-4) + \frac{29}{12}\sigma \right] + \right. \\
& \left. + 2 \log \frac{\lambda^2}{m^2} + \psi(1) \left[ (\tau-4) \frac{1}{2} + \frac{11}{4} - \frac{11}{3}\sigma \right] + \frac{1}{m^2 L^2} \frac{(\tau-4)}{4} \frac{39\pi}{2i} \right\}.
\end{aligned}$$

$$\int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\mathfrak{I} \frac{V(\mathfrak{I})V(-1-\mathfrak{I})}{\sin^2 \pi \mathfrak{I}} \frac{1}{\Gamma(4-\mathfrak{I})\Gamma(3+\mathfrak{I})} + \frac{9\tau}{36} \frac{\tau-4}{32} + \frac{20}{3} + \frac{\pi}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\mathfrak{I} \frac{V(\mathfrak{I})V(-\mathfrak{I})}{\sin^2 \pi \mathfrak{I}}.$$

(0 <  $\beta$  < 1)

$$\cdot \left[ (\sigma-4) \left( -\frac{175}{96} - \frac{257}{96} \sigma + \frac{1}{64} \sigma^2 \right) - \sigma \cdot \frac{3}{2} (5+7\sigma) + \frac{1}{4} - \frac{1-\sigma}{6} \right] \Bigg\},$$

$$\sigma = \begin{cases} 3 & s=1 \\ 4 & s=0 \end{cases}, \quad \psi(1) = -0,577.$$

Для  $\delta M_1$  и  $\delta M_2$  при  $m^2 L^2 \ll 1$  получаем следующие поправки с точностью до  $(m^2 L^2)^2$ :

$$\delta M_1 = -F_1(0) = \frac{2}{2\pi} \left\{ \log \frac{1}{m^2 L^2} - V'(0) + \frac{769}{89} + \frac{1}{4i} \int_{-\beta+i0}^{\beta-i0} d\zeta \frac{V(\zeta)V(-\zeta)}{\sin^2 \pi \zeta} \left( \frac{307}{24} - \frac{719}{40} \zeta + \frac{\zeta^2}{4} \right) \Gamma(2+\zeta) \Gamma(2-\zeta) \Gamma(\zeta+2) \right\},$$

$$\delta M_2 = -F_2(0) = \frac{32}{8\pi} \left\{ \log \frac{1}{m^2 L^2} - V'(0) - \frac{4127}{648} + \frac{1}{4i} \int_{-\beta+i0}^{\beta-i0} d\zeta \frac{V(\zeta)V(-\zeta)}{\sin^2 \pi \zeta} \left( \frac{255}{2} + 725 \zeta - \zeta^3 - \frac{23}{2} \zeta^2 \right) \Gamma(2+\zeta) \Gamma(2-\zeta) \Gamma(\zeta+3) \right\},$$

а при  $m^2 L^2 \gg 1$  имеем

$$\delta M_1 = \delta M_2 = \frac{2}{2} \frac{V(-1/2)}{mL} + O(1/m^2 L^2).$$

Легко видеть, что в нашей схеме выполняется условие градиентной инвариантности. В рассматриваемом нами подходе к построению электродинамики частиц со спинами 0 и 1 выполнено тождество Уорда

$$\frac{\partial \tilde{\Sigma}(p)}{\partial p_\mu} = -\tilde{\Gamma}_\mu(p, 0),$$

поскольку оно является следствием тождества /1/.

Доказательство градиентной инвариантности в форме /6/ в ряду теории возмущений довольно просто и основано на использовании тождества /2/. Диаграмма поляризации вакуума градиентно-инвариантна по построению.

Итак, мы построили градиентно-инвариантную квантовую электродинамику частиц со спинами 0 и 1 на основе гипотезы о стохастическом характере пространства-времени на малых расстояниях. Авторы выражают свою глубокую благодарность Д.И.Блохинцеву и Г.В.Ефимову за интерес к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. S. Weinberg Phys. Rev. Letters 19, 1264 /1973/;  
A.Salam in Proc. 8th Nobel Symposium (Almquist and  
Wiksell, Stockholm 1968).
2. R.Schwitters, plenary talk in the Proc. of Tbilisi  
conference;  
L.Peruzzi et al., Phys. Rev. Letters 37, 569 (1976).
3. Г.В.Ефимов. Препринт ИТФ, Киев, № 52, 54, 56 /1968/;  
Commun. Math. Phys. 31, I /1973/; 38, II /1974/;  
Проблемы физики ЭЧАЯ т.2, вып I, 256, 1970; т.5, вып.I,233,  
1974
4. Д.И.Блохинцев. ТМФ, 17, 153 /1973/;  
Проблемы физики ЭЧАЯ 5, 606 /1974/.
5. Г.В.Ефимов. Проблемы физики ЭЧАЯ т.5, вып.I 223 /1974/;  
В.А.Алебастров, Г.В.Ефимов, М.З.Сельцер.  
Ann. Phys. N.Y. 76, 251 /1973/.
6. Г.В.Ефимов, Х.Намсрай. ТМФ, т.22, вып.2, 186 /1975/.
7. М.Динейхан, Х.Намсрай. Препринт ОИЯИ, P2-10166, Дубна, 1976.
8. N.M.Kroll, Nuov. Cim. 45A, 65 /1966/.

Рукопись поступила в издательский отдел  
16 сентября 1977 года.