

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



19/12-77

G-175

P2 - 10938

5105/2-77

Ю.С.Гальперн, А.Т.Филиппов

О ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЕ
СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА

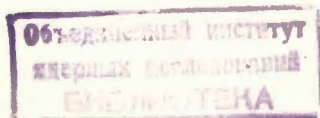
1977

P2 - 10938

Ю.С.Гальперн, А.Т.Филиппов

О ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЕ
СВЕРХПРОВОДНИКОВ ВТОРОГО РОДА

Направлено в ЖЭТФ



Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т.

P2 - 10938

О вихревой структуре сверхпроводников второго рода

Построена теория возмущений для расчета вихревой структуры сверхпроводников второго рода, описываемых уравнениями Гинзбурга-Ландау в приближении Вигнера-Зейтца для элементарной вихревой ячейки. В случае сильного магнитного поля разложение выполняется по параметру $\lambda = \frac{H_{cr}}{B} - 1$ и пригодно при $\lambda \leq 1$. В случае слабого поля параметр разложения есть B/H_{cr} и ряд теории возмущений - асимптотический. Предложен новый прием "сшивания" решений, пригодных на больших и на малых расстояниях от центра вихря.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Galpern Yu.S., Filippov A.T.

P2 - 10938

On a Vortex Structure of the Second Type Superconductors

A perturbation theory is constructed for calculation of the vortex structure of the second type superconductors described by the Ginsburg-Landau equations in the Wigner-Seitz approximation for an elementary vortex cell.

For the case of a strong magnetic field the expansion goes over parameter $\lambda = \frac{H_{cr}}{B} - 1$ and is valid for $\lambda \leq 1$. For the case of a weak magnetic field the expansion parameter is B/H_{cr} and the perturbation theory series is asymptotic. A new method of matching of solutions, valid for large and small distances from the vortex center, is suggested.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта и следующая работы посвящены вычислению импеданса сверхпроводников второго рода в магнитном поле, превышающем нижнее критическое поле H_{c1} . Возникающее сопротивление, как известно, связано с движением вихревой решетки, и его измерение дает ценную информацию о свойствах смешанного состояния сверхпроводников второго рода. Использование переменного тока существенно потому, что это позволяет избавиться от эффектов "пиннинга", осложняющих сравнение теории с экспериментом в случае постоянного или низкочастотного тока. На опыте можно измерять зависимость сопротивления от приложенного магнитного поля, от частоты и от температуры, и задача теории - вычислить эти зависимости.

Последовательный подход к вычислению сопротивления должен, конечно, основываться на микроскопической теории БКШ-Боголюбова ^{/1/} /см. также ^{/2/} /, обобщенной на нестационарный случай ^{/3/}. Обзор результатов, полученных на основе микроскопической теории, и краткую сводку экспериментальных данных можно найти в недавней работе Горькова и Копнина ^{/4/} *. Там отмечается, что "микроскопическая теория позволяет в принципе вычислить проводимость сверхпроводника в смешанном состоянии при произвольной температуре во всей области магнитных полей; однако сравнительно простые

*Если не оговорено противное, мы используем обозначения, принятые в этом обзоре.

аналитические выражения для проводимости могут быть получены лишь в довольно узких диапазонах параметров

$\frac{B}{H_{c2}}$ и $\frac{T}{T_c}$, когда эти параметры близки к нулю или единице. Это утверждение относится лишь к проводимости при постоянном токе, СВЧ-импеданс реально вычислен лишь при $B \approx H_{c2}$ и $T/T_c \approx 1/5$.

В полуфеноменологической теории сверхпроводимости, основанной на уравнениях Гинзбурга-Ландау /6/ /ГЛ, см. также /2/ /, обобщенных на нестационарный случай Шмидом /7/ /ГЛШ/, можно в принципе получить более полные результаты. В случае сверхпроводящих сплавов с парамагнитными примесями эти уравнения были выведены из микроскопической теории Горьковым и Элиашбергом /3/ /см. также /2/ /. Для обычных сверхпроводящих сплавов в сильном магнитном поле Маки /8/ получил на основе микроскопической теории уравнения, которые при $T \rightarrow T_c$ переходят в уравнения ГЛ. Обобщив эти уравнения, подобно ГЛШ, на нестационарный случай, можно получить выражение для проводимости при

$\frac{B}{H_{c2}} \approx 1/8,9$. Эти вычисления основаны на приближении, в котором решетка вихрей движется как целое с малой скоростью. Сопротивление возникает как за счет релаксации параметра порядка, так и за счет рассеяния энергии нормальной компонентой /джоулевский нагрев/. Оба эти эффекта правильно описываются полуфеноменологической теорией, однако для обычных сверхпроводящих сплавов существенным оказывается также вклад неравновесных возбуждений в электрический ток /9/, который в /8/ не учитывается. По этой причине кажется целесообразным и в этом случае использовать уравнения ГЛШ, но считать, что основные параметры теории /например, $\kappa(T)$ и $\gamma(T)$ / берутся из опыта или из сравнения с результатами микроскопической теории. Действительно, если в уравнениях ГЛШ заменить κ на $\kappa_2(T)$ и взять $\gamma(T)$ пропорциональным $L_D(T)$, то

можно воспроизвести точный результат /9/ микроскопической теории для проводимости обычных сверхпроводящих сплавов при нулевой частоте в сильном магнитном поле /ср. выражения /4.16/ и /4.4a/ в /4/ /. Уравнения ГЛШ с заданными таким образом параметрами позволяют сравнительно просто вычислить проводимость при любых частотах. Заметим также, что область применимости так понимаемых уравнений ГЛШ может оказаться более широкой и они могут стать полезными и в тех случаях, когда их не удастся вывести из микроскопической теории.

Первая попытка вычисления СВЧ-импеданса сверхпроводников второго рода на основе уравнений ГЛШ принадлежит Куприянову и Лихареву /10/. В этой работе получены уравнения, описывающие медленные движения решетки вихрей в сверхпроводящей пленке, толщина которой меньше глубины проникновения магнитного поля и толщины скин-слоя. Существенно, что решетка должна двигаться как целое; это предположение может

не выполняться при очень малых значениях $\frac{B}{H_{c2}}$ и при

$\frac{B}{H_{c2}} \approx 1$ в непосредственной окрестности критической температуры /когда $1 - \frac{B}{H_{c2}} \gg 1 - \frac{T}{T_c}$ /. Использование

приближения Вигнера-Зейтца, состоящего в замене элементарной ячейки треугольной решетки на круглую /11/, позволило авторам работы /10/ свести задачу о вычислении поправок к параметру порядка и к электромагнитному полю к решению линейной неоднородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых - билинейные функции стационарных значений параметра порядка ψ и векторного потенциала \vec{Q} . Таким образом, для решения задачи о поведении сверхпроводника второго рода в переменном поле необходимо прежде всего получить достаточно хорошие приближения для $|\psi|$ и $|\vec{Q}|$. В /10/ эта задача решается численно при $\kappa \gg 1$. Аналитические приближения известны лишь для сильного магнитного поля, когда

$(1 - \frac{B}{H_{c2}}) \ll 1$. Они найдены еще в работе Абрикосова^{/12/}, в ко-

торой впервые были обнаружены вихревые решения уравнений ГЛ. Применение приближения Вигнера-Зейтца позволяет найти более простые выражения и в этом случае, однако они были фактически получены лишь при условии $\kappa \gg 1$, когда неоднородностью магнитного поля можно пренебречь /11/.

Задача данной работы - построение достаточно простых аналитических приближений для $|\psi|$ и $|\vec{Q}|$, которые в следующей работе будут использованы для вычисления СВЧ-импеданса. Мы покажем, что эти величины можно

разложить в ряды по степеням параметра $\lambda = (\frac{H_{c2}}{B} - 1)$,

которые дают неплохие приближения при $\lambda \leq 1$ /возможно, что они пригодны и при больших значениях λ /. При этом значение κ может быть произвольным, малость высших приближений определяется малостью эффектов нелинейности. Если $\lambda \gg 1$, что возможно лишь при $\kappa \gg 1$, эффекты нелинейности уравнений ГЛ становятся очень существенными и разложение в ряд по степеням λ непригодно. В этом случае нам удалось найти хорошее аналитическое приближение для $|\psi|$, аккуратно описывающее структуру вихря как на малых, так и на больших расстояниях от его центра. На больших расстояниях можно найти $|\psi|$ в виде ряда по степеням

$\frac{B}{H_{c2}}$, но этот ряд не сходящийся, а асимптотический.

В заключение отметим, что принятая нами постановка задачи о вихревых решениях в сверхпроводниках второго рода интересна еще и тем, что математические проблемы, которые приходится при этом решать, встречаются также в квантовой теории поля и в теории сверхтекучести. Построенные нами приближения можно поэтому применять для решения задач, весьма далеких от теории сверхпроводимости /см. конец этой работы/.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой работе подробно обсуждается лишь статический случай. Однако, чтобы в дальнейшем не возвращаться к вопросам выбора единиц, обозначениям и т.п., мы выпишем здесь основные уравнения в общем, нестационарном случае. Релаксация параметра порядка ψ обычно вводится с помощью феноменологического

соотношения $-\gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{F}\{\psi\}}{\delta \psi}$, где $\mathcal{F}\{\psi\}$ - сво-

бодная энергия системы /см. /4,7/ /. Принимая для $\mathcal{F}\{\psi\}$ выражение ГЛ^{/6/}, получим

$$-\gamma \frac{\partial \psi}{\partial t} = C_1 |\psi|^2 + C_2 |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2\pi} (-i \vec{\nabla} - 2 \frac{e}{c} \vec{A})^2 \psi + 2ie\gamma \Phi \psi.$$

Положим здесь $\psi = |\psi| e^{i\theta}$ и дополним это уравнение уравнениями Максвелла для электромагнитных потенциалов \vec{A} и Φ . Введем безразмерные переменные, выбрав в качестве основных единиц следующие: время -

$$\tau = 4\pi\sigma_n \frac{\delta^2}{c^2}, \quad \text{длина} - \xi, \quad \text{магнитный поток} - \phi_0 = \frac{\pi c}{e}$$

/мы пользуемся системой $h = 1$ /. В результате получим систему основных уравнений /как и в /3/ ,

$$\vec{Q} = \frac{2\pi\xi}{\phi_0} (\vec{A} - \frac{c}{2e} \frac{\partial \theta}{\partial \vec{r}}), \quad \mu = \tau (\frac{\partial \theta}{\partial t} + 2e\Phi), \quad \text{где } \tau \text{ и } t \text{ вы-}$$

ражены в обычных единицах/

$$u \dot{\vec{F}} = \vec{F} - \vec{F}^3 + \vec{\nabla}^2 \vec{F} - Q^2 \vec{F}, \quad /2.1/$$

$$u M \vec{F}^2 + \vec{\nabla} \cdot (\vec{Q} \vec{F}^2) = 0, \quad /2.2/$$

$$\vec{j} = \vec{j}_{ii} + \vec{j}_s, \quad \vec{j}_s = -F^2 \vec{Q}, \quad \vec{j}_n = -(\vec{Q} + \vec{\nabla} \mu). \quad /2.3/$$

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{Q}, \quad \kappa^2 \text{rot rot } \vec{Q} = \vec{j}. \quad /2.4/$$

Здесь $F = \left| \frac{\psi}{\psi_0} \right|$, $|\psi_0|^2 = \frac{mc^2}{16\pi e^2 \delta^2}$ и $u = \frac{2m\xi^2}{\tau} \gamma$; E, H и j измеряются соответственно в единицах $\frac{\phi_0}{2\xi^2}$ и $\frac{\phi_0 c}{8\pi^2 \delta^2 \xi}$. Мы, как обычно, пренебрегли

в уравнениях Максвелла членом $\frac{1}{c} \dot{E}$ и опустили уравнение $\text{div} \vec{E} = \rho$, которое нами не используется /3/.

В статическом случае $E = j_n = \text{div} j_s = \vec{\mu} = 0$ и состояние сверхпроводника в магнитном поле определяется уравнениями

$$\Delta F + F(1 - Q^2) - F^3 = 0, \quad /2.5/$$

$$\kappa^2 \text{rot rot} \vec{Q} = -F^2 \vec{Q}. \quad /2.6/$$

Рассмотрим смешанное состояние неограниченной сверхпроводящей пластины в магнитном поле, перпендикулярном ее поверхности, используя для описания вихревой решетки приближение Вигнера-Зейтца /11/. Обозначим радиус элементарной круглой ячейки буквой R . Для скалярных величин и декартовых компонент векторных и тензорных величин должны выполняться условия периодичности

$$P(R, \phi) = P(R, \phi + \pi), \quad /2.7/$$

$$\frac{\partial}{\partial r} P(r, \phi) \Big|_{r=R} = - \frac{\partial}{\partial r} P(R, \phi + \pi) \Big|_{r=R}, \quad /2.8/$$

где r, ϕ - цилиндрические координаты с осью z , направленной вдоль приложенного магнитного поля. При этом

$$F = F(r), \quad H_z = H(r), \quad H_r = H_\phi = 0, \quad Q_z = Q_r = 0, \quad Q_\phi = \frac{1}{r} p(r).$$

Уравнения /2.5/, /2.6/ сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} + \left(1 - \frac{p^2(r)}{r^2}\right) F(r) - F^3(r) = 0, \quad /2.5/*$$

$$\frac{d^2 p}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} = \frac{F^2 p}{\kappa^2}. \quad /2.6/*$$

Из условий /2.7/ и /2.8/ вытекают граничные условия

$$F'(R) = 0, \quad p(R) = 0. \quad /2.9/$$

Значение $p(0)$ легко связать со средним значением магнитного поля /индукцией/

$$B = \langle H_z \rangle = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R H(r) d r = \frac{2}{R^2} \int_0^R dr \frac{dp}{dr} = - \frac{2}{R^2} p(0),$$

где мы воспользовались тем, что $H(r) = \frac{1}{r} \frac{dp}{dr}$, $p(R) = 0$.

С другой стороны, используя условие квантования магнитного потока, получаем /в безразмерных переменных/

$$\int_0^R dr r H(r) = 1, \quad \text{откуда}$$

$$p(0) = -1 \quad \text{и} \quad R = (2/B)^{1/2} \quad /2.10/$$

/при $B = H_{c2} = 1$ получаем $R = \sqrt{2}$ /. Из условия /2.10/ и уравнения /2.5*/ следует, что $F(r) \sim r$. Действи-

тельно, при $r \rightarrow 0$ $F(r) \sim r^C$, где $C = \pm p(0) = \mp 1$, и условию ограниченности $F(r)$ при $r \rightarrow 0$ удовлетворяет лишь $C = +1$. Таким образом, полная система граничных условий имеет вид

$$p(R) = 0, \quad F'(R) = 0, \quad p(0) = -1, \quad \frac{F(r)}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \text{const}. \quad /2.11/$$

Ниже мы изучаем решения краевой задачи /2.5*/ /2.6*/,

/2.11/ в случае сильных ($R \equiv \left(\frac{2}{B}\right)^{1/2} \geq \sqrt{2}$) и слабых ($R \gg \sqrt{2}$)

магнитных полей.

3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В СЛУЧАЕ СИЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Положим $\epsilon^2 = (1 - \frac{B}{H_{c2}})$, т.е. $R^2 = \frac{2}{B} = 2 \frac{H_{c2}}{B} = \frac{2}{1 - \epsilon^2}$,

и перейдем в уравнениях /2.5*/ , /2.6 */ к новым переменным

$$x = \frac{r^2}{R^2}, \quad x^{-1/2} u(x) \equiv F_0(r), \quad p(x) \equiv p(r).$$

Краевая задача теперь имеет вид

$$u''(x) + \frac{1}{4x} \left[\frac{1-p^2(x)}{x} + R^2 \left(1 - \frac{u^2(x)}{x} \right) \right] u(x) = 0, \quad /3.1/$$

$$p''(x) = \frac{R^2}{4\kappa^2 x^2} u^2(x) p(x), \quad /3.2/$$

$$p(0) = -1, \quad p(1) = 0, \quad x^{-1} u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \text{const}, \quad u'(1) = \frac{1}{2} u(1). \quad /3.3/$$

При $B \rightarrow H_{c2}$ $\epsilon \rightarrow 0$ и можно попытаться искать решение этой задачи в виде рядов по степеням ϵ . Мы поступим несколько иначе, выделив в $u(x)$ множитель ϵ и раз-

лагая решения по степеням параметра $\lambda \equiv \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{H_{c2} - 1}{B}$

/мы используем букву λ , так как глубина проникновения магнитного поля в дальнейшем не встречается/. Это подсказывается тем обстоятельством, что $p(x)$ и

$v(x) \equiv \frac{u(x)}{\epsilon}$ удовлетворяют системе

$$v''(x) + \frac{1}{2x} v(x) + \frac{1-p^2(x)}{4x^2} v(x) + \frac{\lambda}{2x} \left(1 - \frac{v^2(x)}{x} \right) v(x) = 0, \quad /3.4/$$

$$p''(x) = \frac{\lambda}{2\kappa^2 x^2} v^2(x) p(x). \quad /3.5/$$

Как мы покажем ниже, теория возмущений по параметру λ применима даже при значениях $\lambda \sim 1$.

Положим

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v_n(x), \quad p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n p_n(x). \quad /3.6/$$

Нетрудно показать, что

$$v_0(x) = C_0 x e^{-x/2}, \quad p_0(x) = x - 1, \quad /3.7/$$

а при $n \geq 1$ неизвестные функции v_n и p_n определяются из уравнений

$$\hat{L} v_n(x) \equiv \frac{d^2 v_n}{dx^2} + \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{4} \right) v_n(x) = g_n(x), \quad \frac{d^2 p_n}{dx^2} = f_n(x) \quad /3.8/$$

с граничными условиями

$$v_n(0) = 0, \quad v_n'(1) = \frac{1}{2} v_n(1), \quad p_n(0) = p_n(1) = 0. \quad /3.9/$$

Правые части уравнений /3.8/ имеют вид

$$g_n = \frac{1}{2x^2} (v^3)_{n-1} - \frac{1}{2x} v_{n-1} + \frac{1}{4x^2} \sum_{m=1}^n (p^2)_m v_{n-m}, \quad /3.10/$$

$$f_n = \frac{1}{2\kappa^2 x^2} \sum_{m=0}^{n-1} (v^2)_m p_{n-m-1}. \quad /3.11/$$

Коэффициенты $(v^2)_m$, $(v^3)_m$, $(p^2)_m$ определяются разложениями соответствующих функций v^2 , v^3 , p^2 в ряды по степеням λ :

$$v^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (v^2)_n, \quad v^3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (v^3)_n,$$

где

$$(v^2)_0 = v_0^2, \quad (v^2)_1 = 2v_0 v_1, \quad (v^2)_2 = 2v_0 v_2 + v_1^2,$$

$$(v^2)_3 = 2v_0 v_3 + 2v_1 v_2, \dots; \quad (v^3)_0 = v_0^3, \quad (v^3)_1 = 3v_0^2 v_1,$$

$$(v^3)_2 = 3v_0^2 v_2 + 3v_0 v_1^2, \quad (v^3)_3 = 3v_0^2 v_3 + 6v_0 v_1 v_2 + v_1^3, \dots$$

Выпишем в явном виде уравнения для первых двух приближений

$$\hat{L}v_1 = \frac{v_0}{2x^2} [v_0^2 - x + p_0 p_1], \quad p_1'' = \frac{v_0^2 p_0}{2\kappa^2 x^2}, \quad /3.12/$$

$$\hat{L}v_2 = \frac{v_0}{2x^2} [(p_0 p_2 + \frac{1}{2} p_1^2) + \frac{v_0}{v_0} (3v_0^2 - x + p_0 p_1)],$$

$$p_2'' = \frac{v_0^2 p_0}{2\kappa^2 x^2} [\frac{p_1}{p_0} + 2\frac{v_1}{v_0}]. \quad /3.13/$$

Решение уравнения $p_n'' = f_n$, удовлетворяющее граничным условиям $p_n(0) = p_n(1) = 0$, можно представить в виде

$$p_n(x) = x \int_0^1 dy f_n(y) (y-1) + \int_0^x dy (x-y) f_n(y). \quad /3.14/$$

Это выражение позволяет найти p_n , если известны p_m и v_m при $m \leq n-1$.

Решение уравнения $\hat{L}v_n = g_n$, удовлетворяющее граничному условию при $x \rightarrow 0$, можно представить в форме

$$v_n(x) = v_0(x) \{ C_n - \int_x^1 dy \frac{e^y}{y^2} \int_0^y dz e^{-z/2} \frac{1}{C_0} z g_n(z) \}. \quad /3.15/$$

Дифференцируя это выражение, нетрудно убедиться, что граничное условие $v_n'(1) = \frac{1}{2} v_n(1)$ выполняется в том и только в том случае, если

$$(v_0, g_n) = C_0 \int_0^1 dz e^{-z/2} z g_n(z) = 0. \quad /3.16/$$

Так как g_n зависит лишь от v_m при $m \leq n-1$, то это условие позволяет определить коэффициент C_{n-1} .

Для определения C_0 достаточно найти p_1 . Нетрудно показать, что

$$p_1(x) = \frac{C_0^2}{2\kappa^2} \{-1 + x(1 - \frac{2}{e}) + e^{-x}(1+x)\}. \quad /3.17/$$

Соответствующая поправка к магнитному полю пропор-

циональна производной $\frac{dp_1}{dx}$, которую можно представить в виде

$$p_1'(x) = \frac{1}{2x^2} (\langle \frac{v_0^2}{x} \rangle^2 - \frac{v_0^2}{x}), \quad /3.18/$$

$$\frac{1}{C_0^2} \langle \frac{v_0^2}{x} \rangle^2 = \int_0^1 dx \frac{v_0^2(x)}{C_0^2 x} = (1 - \frac{2}{e}) \equiv \gamma_L.$$

Поправка такого вида была впервые найдена Абрикосовым /12/. Заметим, что выражение для магнитного поля с поправкой /3.18/ не совпадает в точности с поправкой Абрикосова, так как наше разложение выполняется по другому параметру $\lambda / \lambda^2 = \epsilon^2$ лишь при $\epsilon \rightarrow 0$.

Теперь из условия $(v_0, g_1) = 0$ можно найти постоянную C_0 . При вычислении удобно воспользоваться тождеством

$$\int_0^1 dx \frac{1}{x^2} v_0^2 p_0 p_1 = 2\kappa^2 \int_0^1 dx p_1'' p_1 = -2\kappa^2 \int_0^1 dx (p_1')^2.$$

Учитывая /3.7/, /3.12/ и /3.18/, нетрудно показать, что

$$C_0^2 \gamma_L = \frac{2\kappa^2}{(2\kappa^2 - 1)\beta_L + 1}, \quad \beta_L \equiv \frac{\langle \frac{v_0^4}{x^2} \rangle}{\langle \frac{v_0^2}{x} \rangle^2} = \frac{1 - \frac{5}{e^2}}{4(1 - \frac{2}{e^2})}. \quad /3.19/$$

Это выражение также было получено в /12/, где для вычисления использовались решения, соответствующие квадратной решетке вихрей. Значение β_L в приближении Вигнера-Зейтца равно $\beta_L = 1,1576$, что лишь на 0,2% отличается от точного значения β_L для треугольной решетки / $\beta_L = 1,1596$ / /11/.

Для вычисления коэффициента C_n при $n \geq 1$ необходимо сначала найти $\frac{v_n}{v_0} - C_n$ и, на первый взгляд,

вычислить p_{n+1} . Однако на самом деле p_{n+1} вычислять для этого не нужно, так как p_{n+1} входит в g_n

лишь в комбинации $\frac{v_0 p_{n+1} p_0}{2x^2}$, а правая часть уравнения

$p''_{n+1} = f_{n+1}$ содержит член $\frac{v_0 p_n}{2\kappa^2 x^2}$. Покажем,

как используется это обстоятельство, на примере вычисления C_1 . Из уравнений /3.13/ и граничных условий для p_n следует, что

$$\int_0^1 dx \frac{v_0^2}{2x^2} (p_1^2 + 2p_0 p_1 \frac{v_1}{v}) = \kappa^2 \int_0^1 p_2'' p_1 dx =$$

$$= \kappa^2 \int_0^1 dx p_2 p_1'' = \int_0^1 dx \frac{v_0^2 p_0 p_2}{2x^2}.$$

Подставляя это тождество в условие $(v_0, g_2) = 0$, получим условие для определения C_1 :

$$\int_0^1 dx \frac{v_0^2}{x^2} (p_1^2 + 2p_0 p_1 \frac{v_1}{v}) + 2 \int_0^1 dx \frac{v_0^2}{x} (\frac{v_0}{x} - \frac{1}{3}) \frac{v_1}{v} = 0. /3.20/$$

Для вычисления C_1 найдем сначала $\frac{v_1}{v} - C_1$ по формуле /3.15/.

4. ВТОРОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В предыдущем разделе мы нашли явные выражения для v_0 , p_0 и p_1 . Здесь мы вычислим v_1 . Для упрощения расчетов удобно в выражении /3.15/ переставить пределы интегрирования, воспользовавшись тождеством

$$\int_x^1 dy a(y) \int_0^x dz b(z) = \int_0^x dz b(z) \int_x^1 dy a(y) + \int_x^1 dz b(z) \int_z^1 dy a(y).$$

Учтем также, что

$$\int_x^1 dy y^{-2} e^y = \frac{e^x}{x} - e - \ln x + \phi(1) - \phi(x),$$

где

$$\phi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m! m} = \text{Ei}(x) - C - \ln x, \quad C = 0,577216,$$

и определим функцию

$$\phi_-(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)(2m+1)!} = \frac{1}{2} [\text{Ei}(x) - \text{Ei}(-x)].$$

Значения $\phi(x)$, $\phi_-(x)$ легко найти с помощью таблиц для интегральной показательной функции $\text{Ei}(x)$.

Выражение /3.15/ для $\frac{v_1}{v_0}$ можно представить теперь в виде

$$\frac{v_1}{v_0} = C_1 + \frac{1}{2} I_1(x) + \frac{C_0^2}{4} I_2(x) + \frac{C_0^2}{4\kappa^2} I_3(x), \quad /4.1/$$

где члены I_1 и I_2 учитывают линейную и нелинейную поправки к распределению сверхпроводящих электронов, а I_3 - поправка, связанная с неоднородностью магнитного поля.

После выполнения элементарных интегралов для I_n можно получить выражения

$$I_1(x) = \phi(1) - \phi(x) + \frac{1}{x}(e^x - 1) + 1 - e,$$

$$I_2(x) = \phi_-(x) - \phi_-(1) - \text{sh } x + e^{-x} + \frac{1}{2}e - \frac{3}{2e},$$

$$I_3(x) = \frac{2}{e} [\phi(1) - \phi(x)] - \frac{3}{2} [\phi_-(1) - \phi_-(x)] + \frac{2}{e} \frac{e^x - 1}{x} +$$

$$+ \frac{1}{4x} (4 - 3e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2} e^{-x} - (1 - \frac{2}{e}) x^{-2} + \frac{3}{4} e - \frac{1}{4e}.$$

/4.2/

Эти точные выражения при практических расчетах неудобны, поэтому мы аппроксимируем их полиномами четвертой степени по x , получаемыми следующим образом. Пусть мы хотим аппроксимировать функцию $f(x)$ полиномом $f_a(x)$ на отрезке $0 < x < 1$, так, что $f_a(0) = f(0)$, $f'_a(0) = f'(0)$, $f_a(1) = f(1)$, $f'_a(1) = f'(1)$. Для коррекции этого приближения в середине интервала потребуем $f_a(1/2) = f(1/2)$ /это условие, вообще говоря, не оптимально, но обеспечивает достаточную точность и очень удобно/.

Нетрудно проверить, что решение этой задачи дается полиномом

$$f_a(x) = f(0) + x f'(0) + x^2 [3f(1) - 3f(0) - f'(1) - 2f'(0)] + x^3 [2f(0) - 2f(1) + f'(0) + f'(1)] + \Delta_a x^2 (1-x)^2,$$

$$\Delta_a = 16f(1/2) - 8(f(0) + f(1)) + 2(f'(1) - f'(0)).$$

Приведем значения величин, необходимые при построении такого приближения для I_n :

$$I_1(0) = 0,599620; I'_1(0) = -1/2; I_1(1) = 0; I'_1(1) = 2 - e; I_1(1/2) = 0,326913;$$

$$I_2(0) = -0,249929; I'_2(0) = 0; I_2(1) = 0; I'_2(1) = \frac{e}{2} - \frac{5}{2e}; I_2(1/2) = -0,178594;$$

$$I_3(0) = 0,662820; I'_3(0) = 1/2 - \frac{1}{e}; I_3(1) = 0; I'_3(1) = -4 + \frac{3}{4}e;$$

$$I_3(1/2) = 0,020924.$$

Построенные таким способом приближения

$$I_1 = 0,5996 - \frac{1}{2}x - 0,0832x^2 - 0,0138x^3 - 0,0026x^4,$$

$$I_2 = -0,2499 + 0,3312x^2 - 0,1022x^3 + 0,0209x^4,$$

$$I_3 = 0,06638 - 0,13212x + 0,10439x^2 - 0,04762x^3 + 0,00907x^4$$

/4.3/

обеспечивают достаточную для дальнейших расчетов точность. С помощью этих приближений можно без особых затруднений вычислить $C_1(\kappa)$ из соотношения /3.20/: $C_1(\infty) = -0,009761$,

$$C_1(\kappa) = C_1(\infty) \left\{ 1 + \frac{0,2070}{(2\kappa^2 - 1)\beta_L + 1} + \frac{1,8810}{[(2\kappa^2 - 1)^2\beta_L + 1]^2} \right\}. /4.4/$$

Приближенное выражение для $\frac{v_1}{v_0}$ после элементарных преобразований удобно представить в форме

$$\frac{v_1(x)}{v_0(x)} = \left[1 + \frac{1}{(2\kappa^2 - 1)\beta_L + 1} \right] \frac{v_1^\infty(x)}{v_0^\infty(x)} + \frac{I_4(x)}{(2\kappa^2 - 1)\beta_L + 1} - \frac{0,01835}{[(2\kappa^2 - 1)\beta_L + 1]^2}, /4.5/$$

где

$$I_4(x) = 0,0054 + 0,0112x^2 - 0,0129x^3 + 0,0041x^4,$$

$$\frac{v_1^\infty(x)}{v_0^\infty(x)} \Big|_{\kappa = \infty} = C_1(\infty) + \frac{1}{2}I_1(x) + \frac{C_0^2(\infty)}{4}I_2(x).$$

/4.6/

$$C_0^2(\infty) = (\beta_L \gamma_L)^{-1} = 3,2691.$$

График функции v_1^∞/v_0^∞ представлен на рисунке.

Пользуясь полученными результатами, можно вычислить p_2 и v_2 и т.д. Для практических приложений

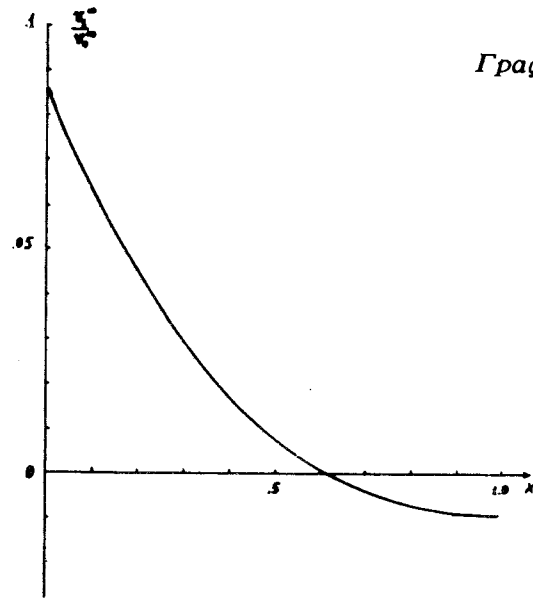


График $\frac{v_1}{v_0}$ при $\kappa \rightarrow \infty$.

достаточно, однако, найденного приближения*. Дело в том, что в области применимости теории возмущений

($\lambda = (\frac{H_{c2}}{B} - 1) \ll 1$) поправки весьма малы, а для исследо-

вания решений при $\lambda \gg 1$ нужно использовать совсем иные приближения /см. следующий раздел/. Применимость теории возмущений при $\lambda \sim 1$ связана с тем,

что $|\frac{v_1}{v_0}| \ll 1$, в частности $|\frac{v_1}{v_0}|_{\max} = \frac{v_1(0)}{v_0(0)} < 0,1$. Можно показать, что вообще $|\frac{v_{n+1}}{v_0}| \ll |\frac{v_n}{v_0}|$, однако вопрос о

сходимости ряда по степеням λ мы не изучали. /При достаточно больших значениях κ ряд, вероятно, рас-

* На самом деле, необходимо найти p_0 , что сделать нетрудно, и мы не приводим соответствующий результат. При любых значениях $\kappa^2 > \frac{1}{2}$ и при $\lambda < 1$ эта поправка дает малый вклад в H .

ходится/. При небольших значениях κ величина $(\frac{H_{c2}}{H_{c1}} - 1)$

невелика и построенная теория возмущений пригодна во всем интервале значений B : $H_{c1} \leq B \leq H_{c2}$. Если

$\kappa \gg 1$, то, т.к. $\frac{H_{c2}}{H_{c1}} \approx \frac{2\kappa^2}{\ln \kappa}$, параметры R и λ при

уменьшении поля B до H_{c1} могут стать очень большими и наша теория возмущений неприменима.

В следующем разделе мы покажем, как построить приближенные решения в этом случае, а здесь сформулируем основной результат, полученный выше:

$$F_0(r) \equiv \frac{u(x)}{x} = C_0 \left(1 - \frac{B}{H}\right)^{1/2} \sqrt{x} e^{-x/2} \left\{ 1 + \left(\frac{H_{c2}}{B} - 1\right) \frac{v_1(x)}{v_0(x)} + \dots \right\},$$

$$\frac{H(r)}{B} = \frac{d\varphi}{dx} = 1 + \frac{C^2}{2\kappa^2} \left(\frac{H_{c2}}{B} - 1\right) (y_L - x e^{-x}) + \dots,$$

где $x = \frac{r^2}{R^2}$, $R^2 = 2 \frac{H_{c2}}{B}$ и выражения для остальных

величин выписаны в /3.19/, /4.1/, /4.2/, /4.4/. Заметим, что второй член в выражении для $H(r)$ при

$(\frac{H_{c2}}{B} - 1) \sim 1$ и малых значениях $\kappa^2 (2\kappa^2 \geq 1)$ не мал

по сравнению с первым, если x мало. Однако следующая поправка, опущенная нами, уже весьма мала, при указанных значениях B, κ и x она не превышает 0,05.

Предложенная в п.3 теория возмущений позволяет вычислить приближение любого порядка. Однако вычисление следующих приближений (v_2, p_3, v_3, \dots) лучше выполнять численно. Преимущество теории возмущений перед обычным численным решением рассмотренной нелинейной краевой задачи - возможность получения общих выражений, пригодных при произвольных значениях κ^2 и в достаточно широком интервале значений B , а

также наглядность физической интерпретации результата: всегда можно проследить, откуда возникает та или иная поправка.

5. ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В СЛАБОМ ПОЛЕ

Как отмечалось выше, если $\kappa^2 \gg 1$, а магнитное поле близко к нижнему критическому H_{c1} , построенная выше теория возмущений неприменима. Причина этого очевидна: теория возмущений основана на малости среднего значения плотности сверхпроводящих электронов $\langle F^2 \rangle$, а в слабом поле эта величина близка к единице. Можно попытаться разлагать искомые функции в ряд по

степеням параметра $\frac{1}{R^2}$. Однако такая теория возмущений неравномерна, т.е. неприменима при $r < 1$ в сердцевине вихря. В этом разделе мы покажем, как построить равномерное первое приближение, пригодное при всех значениях r в случаях $R \rightarrow \infty$ /и $\kappa \rightarrow \infty$ /.

Пользуясь при В-Н малостью параметра $\frac{R^2}{4\kappa} \sim \frac{H_{c2}}{2\kappa^2 B} \sim \frac{1}{\ln^2 \kappa}$, положим в первом приближении $p \approx p_0 = x - 1$

и рассмотрим лишь уравнение для параметра порядка /3.1/. Если нам удастся построить хорошее приближение u_0 для решения этого уравнения при $p = p_0$, поправку к p_0 можно найти, решая линейное уравнение /3.2/ для p с малым параметром $R^2/4\kappa^2$ в правой части.

Уравнение /3.2/ с $p = p_0 = x - 1$ удобно представить в виде

$$R^2(x - u^2(x))u(x) + 4(\delta_x^2 - \delta_x)u(x) + (2x - x^2)u(x) = 0, \quad /5.1/$$

где $\delta_x \equiv x \frac{d}{dx}$. Использование оператора δ_x очень удобно, т.к. $\delta_x = \nu x$, $\delta_x x^\nu = \nu x^\nu$, $\delta_x(x^\nu f(x)) = x^\nu(\delta_x + \nu)f$ и т.д.

Положим

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R^{-2n} u_n(x). \quad /5.2/$$

Подставляя /5.2/ в /5.1/, легко убедиться, что функции u_n можно определять рекуррентно:

$$u_n(x) = \frac{1}{2x} \{ 4(\delta_x^2 - \delta_x)u_{n-1}(x) - [(u_n^3)_n - 3u_0^2 u_n] + x(2-x)u_{n-1} \}, \quad n \geq 1; \quad /5.3/$$

$$u_0(x) = x^{1/2}; \quad (F_0 = u_0/\sqrt{x} = 1).$$

С помощью /5.3/ можно без труда найти приближения любого порядка. Например,

$$u_1 = -x^{1/2} \frac{(1-x)^2}{2x}; \quad u_2 = -x^{1/2} \left[\frac{(1-x)^2}{x^2} + \frac{(1-x)^4}{8x^2} + \frac{2}{x} \right]; \quad /5.4/$$

$$u = x^{1/2} \left\{ 1 - \frac{(1-x)^2}{2R^2 x} - \frac{1}{8(R^2 x)^2} [8(1-x)^2 + (1-x)^4] - \frac{2}{R^4 x} - \dots \right\}.$$

Заметим, что первые два члена приближения /5.4/ точно удовлетворяют граничному условию $u'(1) = \frac{1}{2} u(1)$. В следующем приближении, учитывающем члены $\sim 1/R^4$, это граничное условие удовлетворяется лишь асимптотически. Действительно, $u_2(1) = -2$ и $u_2'(1) = 1$, откуда следует, что с учетом u_2 приближение для $u(x)$ удов-

летворяет условию $\frac{u'(1)}{u(1)} = \frac{1}{2} (1 + \frac{4}{R^4} + \dots)$. В этом прибли-

жении нельзя, однако, пренебрегать отличием $p(x)$ от $p_0(x)$. Так как нас интересует лишь асимптотика при $R \rightarrow \infty$, мы можем считать, что граничное условие при $x = 1$ выполнено, и рассмотрим значения x в интервале

$\frac{1}{R^2} \ll x \ll 1$. Выражения для u_n при этих значениях

x оказываются очень простыми и получаются из соотношения /5.3/, в котором отброшен член $x(2-x)u_{n-1}$. Нетрудно найти, что в этом приближении

$$u(x) = x^{1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{2R^2x} - \frac{9}{8(R^2x)^2} - \frac{163}{16(R^2x)^3} - \frac{13555}{64(R^2x)^4} - \dots \right\}. \quad /5.5/$$

Коэффициенты при степенях $(R^2x)^{-n}$ отрицательны и по модулю быстро растут с ростом номера n , поэтому ряд может быть лишь асимптотическим разложением, и следует ожидать, что $u(x)$ имеет существенную особенность по R^2 при $R^2 \rightarrow \infty$. Как известно, такие ряды дают разумное приближение, если первый из отбрасываемых членов не превышает последнего удерживаемого, и тогда ошибка - порядка величины первого отбрасываемого члена. Так, например, третий и четвертый члены в

/5.5/ равны при $R^2x = \frac{163}{18} \approx 9$, т.е. при $R^2x > 9$ следует

оставить в /5.5/ три первые члена разложения, а ошибка

при этом будет $-\frac{163}{16(R^2x)^3} < -\frac{163}{16 \cdot 9^3} \approx -0,014$. Аналогично

при $R^2x \geq 21$ можно оставить четыре первые члена в /5.5/, а ошибка будет $< 1,1 \times 10^{-3}$.

При малых значениях R^2x разложение /5.5/ не дает полезной информации о поведении $u(x)$ и необходимо найти другое разложение. При $x \rightarrow 0$ решение уравнения можно, очевидно, искать в виде степенного ряда

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}.$$

Подставляя этот ряд в уравнение /5.1/, можно получить рекуррентное соотношение для коэффициентов

$$a_n = \frac{1}{4n(n+1)} \{ -(R^2+2)a_{n-1} + [R^2(a^3)_{n-2} + a_{n-2}] \}, \quad n \geq 1. \quad /5.6/$$

С помощью /5.6/ все коэффициенты можно выразить через a_0 . Первые коэффициенты имеют вид

$$a_1 = -a_0 \frac{R^2+2}{8}, \quad a_2 = \frac{a_0}{3} \left\{ \left(\frac{R^2+2}{8} \right)^2 + \frac{R^2 a_0^2 + 1}{8} \right\}, \quad /5.7/$$

$$a_3 = -\frac{a_0}{18} \left(\frac{R^2+2}{8} \right) \left\{ \left(\frac{R^2+2}{8} \right)^2 + \frac{5R^2 a_0^2 + 2}{4} \right\}.$$

При $R \rightarrow \infty$ параметр a_0 должен быть порядка R . Действительно, $F_0(r) = x^{-1/2} u(x)_{r \rightarrow 0} \approx a_0 x^{1/2} = a_0 \frac{r}{R}$. Так как размер

сердцевины вихря в наших единицах ~ 1 , то должно быть

$\frac{a_0}{R} \sim 1$ и задача состоит в том, чтобы найти $\frac{a_0}{R}$ точно.

При $R \rightarrow \infty$ разложение $u(x)$ получается из /5.7/.

$$u(x) = a_0 x \left\{ 1 - \frac{R^2x}{8} + \frac{(R^2x)^2}{24} \left(\left(\frac{a_0}{R} \right)^2 + \frac{1}{8} \right) - \frac{5(R^2x)^3}{(24)^2} \left(\left(\frac{a_0}{R} \right) + \frac{1}{80} \right) + \dots \right\}. \quad /5.8/$$

При достаточно малых значениях R^2x этот ряд сходится, однако он, по-видимому, имеет конечный радиус сходимости и при $R^2x > 1$ непригоден. При $R^2x \sim 1$ существует область, в которой разложения /5.8/ и /5.5/ при

$\frac{a_0}{R} \sim 1$ близки друг к другу. Однако в этой области оба

разложения неприменимы, и мы не можем воспользоваться методом шивания для определения a_0/R и построения решения, пригодного при всех значениях x .

Грубую оценку a_0/R можно получить следующим образом. Проинтегрируем уравнение /5.1/ от 0 до 1 и перейдем к пределу $R \rightarrow \infty$. Тогда получим следующее тождество:

$$\frac{a_0}{R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{u'(0)}{R} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z}} \frac{u(x)}{\sqrt{x}} \left[1 - \left(\frac{u}{\sqrt{x}} \right) \right]. \quad /5.9/$$

где $z = \frac{R^2 x}{2}$ и функция $\frac{u(x)}{\sqrt{x}}$ при $R \rightarrow \infty$ зависит лишь от z . Если нам известно какое-либо приближение для

$\frac{u(x)}{\sqrt{x}}$, непрерывное при всех значениях z , то мы можем определить параметр a_0 , взяв интеграл в /5.9/. Например, при $z < z_0$ можно взять разложение /5.8/, а при $z > z_0 > 0$ - разложение /5.5/, выбрав точку z_0 так, что значения обоих разложений в точке z_0 совпадают. Соответствующие вычисления громоздки и не очень эффективны, и мы поступим иначе.

Подберем какую-нибудь специальную функцию, разложение которой при малых z воспроизводит несколько членов /5.8/, а при больших z - несколько членов /5.5/. Такая функция осуществит гладкую интерполяцию разложений /5.5/ и /5.8/ при всех значениях z . Контроль полученного приближения можно осуществить, вычислив интеграл в /5.9/ и сравнив полученное так значение a_0 с тем, которое определяется интерполирующей функцией. Достаточный запас функций, имеющих нужные нам свойства, можно построить с помощью обобщенной гипергеометрической функции ${}_p F_q$. Рассмотрим функции

$$z^{1/2} e^{-hz} {}_N F_N \left(\begin{matrix} a_1 \dots a_N \\ \beta_1 \dots \beta_N \end{matrix} \middle| \lambda z \right).$$

При $z \rightarrow \infty$ эти функции разлагаются в асимптотические ряды типа /3.5/, а при $z \rightarrow 0$ - в сходящиеся ряды типа /5.8/. Коэффициенты этих разложений известны в явном виде /см. /13//. С помощью функций ${}_N F_N$ при достаточно большом N можно аппроксимировать $\frac{u(x)}{\sqrt{x}}$

с высокой точностью, но, к сожалению, уравнения для определения параметра a_i, β_i, h очень сложны, а для ${}_N F_N$ при $N \geq 2$ не существует таблиц. Поэтому попробуем аппроксимировать $\frac{u(x)}{\sqrt{x}}$ вырожденной гипергеометрической функцией

$\frac{u(x)}{\sqrt{x}}$ вырожденной гипергеометрической функцией

$$\frac{u_0(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{2} \left(\frac{a_0}{R} \right) \sqrt{z} e^{-hz} \Phi(a, b; hz), \quad z = \frac{R^2 x}{2}. \quad /5.10/$$

Используя известные разложения Φ при $z \rightarrow 0$ и $z \rightarrow \infty$ можно найти параметры a, b, h и $\frac{a_0}{R}$ по первым двум членам в разложениях /5.5/ и /5.8/.

В результате получаем

$$h = 1, \quad a = \frac{3}{2}, \quad b = 2, \quad \frac{a_0}{R} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \approx 0,627.$$

Подставив это приближение в /5.9/, получаем для a_0

меньшее значение, отличающееся от $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ примерно на 20%, поэтому приближение /5.10/ следует улучшить. Чтобы не пересчитывать заново параметры a, b, h , возьмем приближение

$$\frac{u_0(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\beta}{a} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z} \Phi\left(\frac{3}{2}, 2, z\right) \frac{1 + az^2}{1 + \beta z^2} \quad /5.11/$$

и определим a и β , потребовав, чтобы разложение этого выражения воспроизводило и третьи члены в /5.5/, /5.8/. В результате получаем

$$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{a} = \frac{3}{16}, \quad 48(a - \beta) + 2 = \frac{\beta^2}{a^2} \pi,$$

откуда

$$a \approx 0,30813; \quad \beta \approx 0,29130; \quad \frac{a_0}{R} = \frac{\beta}{a} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \approx 0,592.$$

Вычисление a_0/R по формуле /5.9/ с этим приближением

для $\frac{u}{\sqrt{x}}$ дает $\frac{a_0}{R} \approx 0,57$, что отличается от 0,592

меньше чем на 4%. Таким образом, мы получили неплохое приближение для $u(x)$ при всех значениях z . При $x \ll 1/R^2$ можно пользоваться рядом /5.8/ с найденным

нами значением $\frac{a_0}{R}$, при $x \gg \frac{1}{R^2}$ - асимптотическим

разложением /5.4/, а в переходной области $x \sim \frac{1}{R^2}$ - интерполирующей функцией /5.11/.

Исходя из полученных приближений для $u(x)$ можно теперь найти поправки к магнитному полю ($\sim \frac{\ln(\ln^2 \kappa)}{\ln \kappa}$)

и вообще получить уточненные выражения для $u(x)$ и $p(x)$. Построенное в этом разделе аналитическое приближение для $u(x)$ может составить основу для надежных и быстро сходящихся численных расчетов вихревой структуры в слабом магнитном поле.

В заключение отметим, что предложенные в этой работе методы построения вихревых решений в сверхпроводниках второго рода могут найти приложения в других проблемах. Например, уравнение, описывающее вихри в сверхтекучей жидкости, получается из /2.5/, если заменить $p^2(r)$ на $(1 - ar^2) / \text{см.}^{14} /$. Весьма похожими уравнениями описываются вихревые решения в релятивистской модели Голдстоуна /15/ и в теории Янга-Миллса /16/ /см. также /17/ /. Мы предполагаем рассмотреть решения соответствующих уравнений в другой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bardeen J., Cooper L.N., Schrieffer J.R. *Phys.Rev.*, 1957, 106, p.162; Боголюбов Н.Н. *ЖЭТФ*, 1958, 34, 58, с.73; УФН, 1959, 67, с.549.
2. Де Жен П. *Сверхпроводимость металлов и сплавов*. М., 1968. Сан Жам Д., Сарма Г., Томас Е. *Сверхпроводимость второго рода*. М., 1970.
3. Горьков Л.П., Элиашберг Г.М. *ЖЭТФ*, 1968, 54, с.612; 1969, 56, с.1297.
4. Горьков Л.П., Копнин Н.В. *УФН*, 1975, 116, с.413.
5. Pedersen R.J., Kim Y.B., Thompson R.S. *Phys.Rev.*, 1973, B7, p.982.
6. Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д. *ЖЭТФ*, 1950, 20, с.1064.
7. Schmid A. *Phys. Kondens. Materie*, 1966, 5, p.302.
8. Maki K. *Physics*, 1964, 1, p.21; *Phys.Rev.*, 1968, 169, p.381; *J.Low Temp.*, 1969, 1, p.45.
9. Thompson R.S. *Phys.Rev.*, 1970, B1, p.327.
10. Куприянов М.Ю., Лихарев К.К. *ЖЭТФ*, 1975, 68, с.1506; Данилов В.В., Куприянов М.Ю., Лихарев К.К. *ФТТ*, 1974, 16, с.935.

11. Ihle D. *Phys. stat. sol.*, 1971, 47B, pp.423,429.
12. Абрикосов А.А. *ЖЭТФ*, 1957, 32, с.1442.
13. Luke Y.L. *Mathematical Functions and Their Approximations*, Acad. Press, N.Y., 1975; Joshi C.M., McDonald J.B. *Journ.Math.Anal.Appl.*, 1972, 40, p.278.
14. Пумаевский Л.П. *ЖЭТФ*, 1961, 40, с.646.
15. Goldstone J. *Nuovo Cimento*, 1961, 19, p.154.
16. Поляков А.М. *ЖЭТФ*, 1974, 20, с.430; t'Hooft G. *Nucl.Phys.*, 1974, 79B, p.276.
17. Попов В.Н. *Конинуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике*, М., Атомиздат, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 августа 1977 года.