СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10930

В.Н.Стрельцов

4-ВЕКТОР ПЛОТНОСТИ ТОКА ВЕРОЯТНОСТИ БЕССПИНОВЫХ ЧАСТИЦ И УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА -ЯКОБИ

1977

P2 - 10930

В.Н.Стрельцов

4-ВЕКТОР ПЛОТНОСТИ ТОКА ВЕРОЯТНОСТИ БЕССПИНОВЫХ ЧАСТИЦ И УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА -ЯКОБИ

Стрельцов В.Н. P2 - 10930

4-вектор плотности тока вероятности бесспиновых частиц и уравнение Гамильтона-Якоби.

На основании условия инвариантности квадрата 4-вектора плотности тока вероятности бесспиновых частиц j_k и свойств уравнения Клейна-Гордона получено классическое (релятивистское) уравнение Гамильтона-Якоби (без совершения обычного предельного перехода).

Показано также, что в рамках условий существования уравнений непрерывности и Гамильтона-Якоби возможен альтернативный выбор выражения для j_k в форме $j_k = (1/2im)\partial_k(\psi^*\psi) - (e/m)A_k\psi^*\psi$.

В обоих случаях рассмотрение проведено как для свободных частиц, так и для частиц в электромагнитном поле.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Streltsov V.N. P2 - 10930

4-Vector Probability of Current Density for Spinless Particle and Hamilton-Jacobe Equation

Basing on the condition of invariance of squared current density 4-vector for spinless particle probability of j_k and on Klein-Gordon equation properties, the classical (relativistic) equation of Hamilton-Jacobe has been obtained without the usual limit transition . It also was shown that within the conditions of the existence for the continuity equation and for the Hamilton-Jacobe equation an alternative choice of expression is possible for j_k in the form $j_k = (1/2im)\partial_k(\psi^*\psi) - (e/m)A_k\psi^*\psi$. In both cases the analysis has been carried out both for free particles and for those in electromagnetic field.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

1.1. Рассмотрим известное выражение для 4-вектора плотности тока вероятности бесспиновых частиц:

$$j_k = \frac{1}{2im}\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\right), \qquad (1)$$

где $c = \hbar = 1$, $x_k \equiv (x_a, x_4) \equiv (x, y, z, it)$, а, например, ψ – (псевдо)скалярная волновая функция, которая подчиняется релятивистски инвариантному волновому уравнению Клейна-Гордона

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k^2} - m^2\psi = 0. \qquad (2)$$

Исходя из условия инвариантности квадрата 4-тока плотности вероятности, выпишем следующее равенство:

$$j_k^2 = j_4^{(0)2}. \qquad (3)$$

Здесь мы воспользовались тем, что в некоторой (собственной) системе отсчета (K°), 3-ток плотности вероятности равен нулю : $j_a^0 = 0$.

С учетом (1) равенство (3) может быть переписано в виде

$$\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)^2 - \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial x_a} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial x_a}\right)^2 = \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t^0} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t^0}\right)^2.$$

Принимая во внимание, что в K°-системе уравнение Клейна-Гордона (2) должно определяться выражением

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^{(0)2}} = -m^2\psi, \qquad (2')$$

в частности, будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial t^0} = -\mathrm{i}m\psi. \qquad (4)$$

На основании (4) и комплексно сопряженного ему выражения равенство (3а) может быть тогда (после деления обеих частей на $(\psi^*\psi)^2$) переписано в форме

$$\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{\psi^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_a} - \frac{1}{\psi^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial x_a}\right)^2 = -4m^2. \qquad (5)$$

Если теперь мы представим волновую функцию в виде

$$\psi = \exp(\mathrm{i}S) \quad (\psi^* = \exp(-\mathrm{i}S)) \qquad (6)$$

и подставим (6) в (5), то получим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x_a}\right)^2 + m^2. \qquad (7)$$

Очевидно, что последнее выражение представляет собою не что иное, как классическое (релятивистское) уравнение Гамильтона-Якоби. При этом важно подчеркнуть, что в отличие от общепринятой процедуры получения указанного уравнения, которая связывается с предельным переходом от квантовой механики к классике, уравнение (7) является точным, поскольку при выводе его мы не отбрасывали каких-либо слагаемых. Мы воспользовались точным условием инвариантности квадрата 4-тока плотности вероятности и свойствами волнового уравнения.

1.2 . При наличии электромагнитного поля, определяемого 4-вектором потенциала A_k, вместо (1) будем иметь

$$j_k = \frac{1}{2\mathrm{i}m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\right) - \frac{e}{m}A_k\psi^*\psi. \qquad (8)$$

Условие инвариантности (3) запишется в этом случае (после сокращения на m^{-2}) в виде

$$-\frac{1}{4}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\right)^2 + \mathrm{i}eA_k\left(\psi^{*2}\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \psi^*\psi^2\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\right) + e^2A_k(\psi^*\psi)^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x_4^0} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x_4^0}\right)^2 + ieA_4^0\left(\psi^{*2}\psi\frac{\partial\psi}{\partial x_4^0} - \psi^*\psi^2\frac{\partial\psi^*}{\partial x_4^0}\right) + e^2 A_4^{(0)2}(\psi^*\psi)^2. \qquad (9)$$

Поскольку теперь в K°– системе волновое уравнение имеет решение

$$\psi = \exp[(m + ieA_4^0)x_4^0] \quad (\psi^* = \exp[-(m + ieA_4^0)x_4^0]), \qquad (10)$$

то после подстановки (10) в правую часть (9) и сокращения обеих частей (9) на $(\psi^*\psi)^2$ получим

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{1}{\psi^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\right) + ieA_k\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \frac{1}{\psi^*}\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\right) + e^2A_k^2 = -m^2. \qquad (10a)$$

Воспользовавшись снова представлением волновой функции в виде (6),будем иметь

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)^2 - 2eA_k\frac{\partial S}{\partial x_k} + e^2A_k^2 = -m^2, \qquad (11)$$

или

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_k} - eA_k\right)^2 + m^2 = 0. \qquad (11a)$$

Таким образом, мы пришли, очевидно, к уравнению Гамильтона–Якоби для частицы в электромагнитном поле.

2.1. В определенной связи с полученным выше результатом, заключающемся в строгом выводе классического уравнения Гамильтона–Якоби в рамках квантовой механики, мы хотим обратить внимание на следующее.

Возьмем вместо (1) выражение для 4-вектора плотности тока вероятности в форме

$$j_k = \frac{1}{2im}\frac{\partial}{\partial x_k}(\psi^*\psi). \qquad (12)$$

Из условия существования уравнения непрерывности тогда будем иметь

$$\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2} + 2\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t} -$$

$$-\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x_a^2}-\psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x_a^2}-2\frac{\partial\psi^*}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_a}=0=2m^2\psi^*\psi-2m^2\psi^*\psi. \quad (13)$$

Привлекая волновое уравнение (2) для ψ (и комплексно ему сопряженное для ψ^*), найдем, что

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x_a}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_a}=m^2\psi^*\psi. \quad (14)$$

Если опять-таки мы воспользуемся представлением волновой функции в виде (6) и подставим (6) в (14), то придем снова к уравнению Гамильтона-Якоби.

Иначе говоря, в рамках двух мыслимых требований - выполнения уравнений непрерывности и Гамильтона-Якоби - выражение для j_k непротиворечивым образом может быть выбрано в форме (12).

Что касается возможного возражения о постоянстве величины $W=\psi^*\psi$, которая, в частности, может быть записана в виде

$$W=A[\cos^2(p_a x_a-Et)+\sin^2(p_a x_a-Et)], \quad (15)$$

то мы здесь хотим обратить внимание на следующую примечательную аналогию.

При выводе релятивистски инвариантных уравнений Эйлера-Лагранжа (см., например, /1/) также фактически опираются на постоянную величину, каковой является ковариантная функция Лагранжа $L'(L'=-m/2=mu_k u_k/2$, где u_k - 4-скорость).

Однако как здесь, так и в рассматриваемом нами случае важно только то, что функциональная зависимость интересующих нас величин (L' от u_k и W от x_k) обеспечивает получение требуемых уравнений.

Другое обстоятельство, связанное с тем, что, например, плотность вероятности частиц, описываемых плоской волной, в данном случае обращается в нуль, также не должно нас смущать, поскольку плотность конечной величины в бесконечном пространстве действительно должна определяться исчезающе малой величиной. С другой стороны, в результате интегрирования обычного выражения (1) для плотности вероятности (в случае плоской волны) по всему (безграничному) пространству мы получаем бесконечное значение для вероятности*.

Следует, впрочем, обратить внимание на такой известный факт (см., например,/2/). В случае нейтральных (псевдо) скалярных мезонов со спином нуль, описываемых действительной волновой функцией поля ϕ, 4-вектор тока равен нулю именно за счет действительности ϕ .

2.2. При наличии электромагнитного поля выражение (12) перепишется в виде

$$j_k = \frac{1}{2im} \frac{\partial}{\partial x_k}(\psi^*\psi) - \frac{e}{m} A_k \psi^*\psi . \qquad (16)$$

Из условия существования уравнения непрерывности, которое для удобства мы умножим на постоянный коэффициент $2im$, будем иметь

$$\psi^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x_k} + \psi\frac{\partial^2\psi^*}{\partial x_k} + 2\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - $$
$$- 2ieA_k\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - 2ieA_k\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k} - 2ie\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\psi^*\psi = 0. \qquad (17)$$

После вычитания из полученного таким образом выражения (17) волнового уравнения для частицы в электромагнитном поле

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - 2ieA_k\frac{\partial}{\partial x_k} - ie\frac{\partial A_k}{\partial x_k} - e^2A_k^2 - m^2\right)\psi = 0, \qquad (18)$$

умноженного на ψ^*, и комплексно сопряженного (18) уравнения, умноженного на ψ, получим

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - 2ieA_k\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x_k} - ie\frac{\partial A_k}{\partial x_k}\psi^*\psi + e^2A_k^2\psi^*\psi + m^2\psi^*\psi = 0. \qquad (19)$$

---

* Обычно вводимое при этом ограничение объема (отрезка) интегрирования нельзя считать достаточно последовательным шагом, поскольку тогда вместо (безграничной) плоской волны мы, вообще говоря, будем иметь конечный волновой цуг.

Воспользовавшись снова подстановкой (6) и принимая во внимание условие лоренцевской калибровки

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0, \tag{20}$$

придем к уравнению Гамильтона-Якоби для частицы в электромагнитном поле (11).

Полученные в п.2 результаты указывают, таким образом, что при условии выполнения уравнения непрерывности и уравнения Гамильтона-Якоби существует альтернативная возможность выбора выражения для 4-вектора плотности тока вероятности бесспиновых частиц в форме (12) и (16).

Далее мы хотим обратить внимание на следующее. Поскольку уравнение Клейна-Гордона (2) не содержит мнимой единицы i, то действительная и мнимая части волновой функции ψ, которая считается комплексной, также подчиняются уравнению (2). Тогда, казалось бы, состояние релятивистской бесспиновой части могло быть описано реальной волновой функцией. Однако в этом случае, как нетрудно убедиться, опираясь на формулу (12), мы уже не сможем обеспечить выполнения уравнения непрерывности.

В связи с последним замечанием мы хотим коснуться также рассмотренной ранее /3/ возможности записи 4-вектора плотности тока вероятности для частиц со спином 1/2 (в рамках представления Майорана) с помощью четырех реальных волновых функций. Оказывается, однако, что в рамках данного подхода требование совместного выполнения, скажем, следующего частного условия $j_2 = j_3 = 0$ и уравнение Дирака с необходимостью приводит к обращению в нуль волновой функции (для частиц с массой $m \neq 0$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голдстейн Г. Классическая механика. "Наука", М., 1975, §6.6.
2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1973, п.3.1.
3. Стрельцов В.Н. ОИЯИ, Р2 - 10155, Дубна, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 августа 1977 года.