СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10736

И.Лукач , М.Надь

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА СФЕРЕ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1977

Р2 - 10736

И.Лукач ,* М.Надь*

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА СФЕРЕ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

* Институт физики Словацкой академии наук, Братислава.

Лукач И., Надь М. P2 - 10736

Эллиптические гармонические функции на сфере
в четырехмерном комплексном пространстве

В работе на основе теоретико-групповых соображений построен наиболее общий полный набор коммутирующих операторов на сфере в четырехмерном комплексном пространстве. Показано, что такой набор наблюдаемых реализуется в случае наиболее общей параметризации сферы в этом пространстве при помощи эллиптической системы координат. Построены собственные волновые функции этого набора операторов, которые представляют гармонические функции на сфере в четырехмерном комплексном пространстве и могут служить базисом для неприводимых представлений группы SU(4). Найдены собственные значения нетривиальных диагональных операторов этого набора. Обсуждаются применения полученных результатов к выводу массовой формулы для масс частиц в SU(4) супермультиплетах и вывод правил сумм для масс частиц.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Lukač I., Nagy M. P2 - 10736

Elliptical Harmonic Functions on the Sphere in
Four-Dimensional Complex Space

Basing on the group-theoretical considerations, the most general complete set of commuting operators on the sphere in four-dimensional complex space is constructed. It is shown that this set of observables is realized for the most general parametrization of the sphere in this space using the elliptical coordinate system. The eigen-functions of this set of operators are constructed which are harmonic functions on the sphere in four-dimensional complex space and may serve as a basis for irreducible SU(4) group representations. The eigenvalues of nontrivial diagonal operators of this set were determined. Applications of results obtained to derive the mass formula for a mass of particles in SU(4) supermultiplets and the derivation of sum rules for a mass of particles are discussed.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

В в е д е н и е

В настоящее время хорошо известна та положительная роль, которую сыграла в систематике элементарных частиц группа преобразований трёхмерного комплексного пространства – группа $SU(3)$- симметрии. Группа $SU(3)$ является группой второго ранга, которая в физику элементарных частиц была введена как непосредственное обобщение группы изотопического спина $SU_T(2)$, относительно которой инвариантны сильные взаимодействия /1,2/. Естественно поэтому, что неприводимые представления группы $SU(3)$ строились таким образом, чтобы группа $SU_T(2)$ и группа гиперзаряда $U_Y(1)$ были подгруппами группы $SU(3)$, т.е. чтобы имела место цепочка подгрупп:

$$SU(3) \supset SU_T(2) \otimes U_Y(1). \qquad (1)$$

Однако базис для неприводимых представлений группы $SU(3)$, реализующий цепочку подгрупп (1) /3/, не является единственным возможным базисом, который можем построить в трёхмерном комплексном пространстве C_3. Если воспользоваться наиболее общей параметризацией сферы в пространстве C_3, то, кроме упомянутого базиса, можем построить (эллиптический) базис, которому соответствует цепочка подгрупп

$$SU(3) \supset U_Q(1) \otimes U_Y(1), \qquad (2)$$

обозначающая сохранение заряда Q и гиперзаряда Y /4/. С помощью такого базиса можно естественным образом объединить сильные и электромагнитные взаимодействия в одно взаимодействие /5/. В модели $SU(3)$ - симметрии с эллиптическим базисом с самого начала снято у каждого унитарного супермультиплета вырождение изотопических мультиплетов по заряду, и, таким образом, можно написать обобщённую массовую формулу Гелл-Манна-Окубо, получить обобщённые правила сумм для масс частиц и целый ряд других обобщённых соотношений. Следует отметить, что объединение сильных и электромагнитных взаимодействий в рамках группы $SU(3)$ приводит к обобщённой алгебре этой группы, изоморфной алгебре матриц Гелл-Манна и связанной с движением корневого пространства алгебры группы $SU(3)$ /6/.

Вскоре после того, как оказалось, что методы групп симметрий в теории элементарных частиц являются очень эффективными, были рассмотрены модели, основанные на группах более высокого ранга, чем группа $SU(3)$, и среди них модели, связанные с группой $SU(4)$ (или $U(4)$) /7-II/. Однако эти модели в силу ряда причин не имели такого успеха, как симметрия $SU(3)$. Тем не менее в последние годы возродился интерес к группе $SU(4)$, особенно в связи с открытием семейства так называемых ψ-частиц и поисками очарованных частиц, в том числе и очарованных кварков /I2-I4/. Представления группы $SU(4)$, используемые в этих работах, соответствуют цепочкам подгрупп

$$SU(4) \supset SU(3) \otimes U(1), \tag{3}$$

$$SU(4) \supset SU(2) \otimes SU(2). \tag{4}$$

Преимущество редукции группы $SU(4)$ согласно цепочкам (3) и (4) заключается в том, что в этих случаях получаются относительно простые наборы квантовых чисел, которые пригодны для классификации состояний. Возникает, однако, вопрос, нельзя ли построить другие наборы квантовых чисел на сфере в четырёхмерном комплексном пространстве C_4, которые можно с таким же (или же большим) успехом использовать для классификации состояний? Поэтому первоочередной задачей является задача нахождения всех возможных наборов коммутирующих (диагональных) операторов, собственные значения которых представляют собой полные наборы наблюдаемых на сфере в C_4. Второй задачей является определение собственных значений упомянутых наборов операторов и построение их собственных волновых функций.

Как унитарная группа $\mathcal{U}(4)$, так и специальная унитарная (или унимодулярная) группа $S\mathcal{U}(4)$ действуют как группы матриц в четырёхмерном комплексном пространстве C_4, оставляя инвариантной квадратичную форму ж

$$z_\alpha z^\alpha = z_1 z^1 + z_2 z^2 + z_3 z^3 + z_4 z^4 = const, \quad z^\alpha = z^*_\alpha, \; \alpha = 1,2,3,4. \qquad (5)$$

Связь между группами $\mathcal{U}(4)$ и $S\mathcal{U}(4)$ выражается простым соотношением: $\mathcal{U}(4) = \mathcal{U}(1) \otimes S\mathcal{U}(4)$. Генераторы $\hat{A}^\alpha_\beta$ группы $\mathcal{U}(4)$, где

$$\hat{A}^\alpha_\beta = z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\beta} - z^\beta \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \qquad (6)$$

удовлетворяют известным коммутационным соотношениям:

$$\left[\hat{A}^\alpha_\beta, \hat{A}^\gamma_\delta\right] = \hat{A}^\alpha_\delta \delta^\gamma_\beta - \hat{A}^\gamma_\beta \delta^\alpha_\delta. \qquad (7)$$

Вычитанием следа из операторов $\hat{A}^\alpha_\beta$ получаются генераторы $\hat{B}^\alpha_\beta$ группы $S\mathcal{U}(4)$:

$$\hat{B}^\alpha_\beta = \hat{A}^\alpha_\beta - \frac{1}{4}\delta^\alpha_\beta\left(\hat{A}^1_1 + \hat{A}^2_2 + \hat{A}^3_3 + \hat{A}^4_4\right), \quad \hat{B}^\alpha_\alpha \equiv 0, \qquad (8)$$

которые удовлетворяют также коммутационным соотношениям вида (7).

ж

Здесь и в дальнейшем по дважды повторяющимся греческим (латинским) индексам подразумевается суммирование от единицы до четырёх (трёх).

Пятнадцатипараметрическая группа $SU(4)$ имеет четыре восьмипараметрических подгруппы $SU(3)$, шесть трёхпараметрических подгрупп $SU(2)$ и, наконец, три однопараметрические подгруппы $U(1)$, соответствующие аддитивным квантовым числам: заряду Q, гиперзаряду Y и "очарованию" C. Генераторы группы $SU(4)$ можно представить в виде матрицы:

$$\hat{B}^{\alpha}_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}B+Q-C & T_+ & V_+ & X_+ \\ T_- & \frac{1}{4}B+Y-Q & U_+ & Y_+ \\ V_- & U_- & \frac{1}{4}B-Y & Z_+ \\ X_- & Y_- & Z_- & -\frac{3}{4}B+C \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

из которой непосредственно видны элементы всех отдельных подгрупп.

Квадратичная форма (5) представляет собой уравнение сферы (радиус которой можно считать равным единице) в четырёхмерном комплексном пространстве C_4. Точка на сфере в C_4 задаётся семью независимыми координатами. Комплексные числа z_α могут быть записаны в тригонометрической форме:

$$z_\alpha = \xi_\alpha \exp(i\varphi_\alpha),\ z^\alpha = \xi_\alpha \exp(-i\varphi_\alpha),\ \mathrm{Im}\,\xi_\alpha = \mathrm{Im}\,\varphi_\alpha = 0, \qquad (10)$$
$$0 \le \xi_i \le 1, \qquad 0 \le \varphi_\alpha \le 2\pi,$$

причём переменные ξ_α в силу уравнения (5) связаны соотношением

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 = 1. \qquad (11)$$

Уравнение (11) представляет собой уравнение сферы в четырёхмерном эвклидовом пространстве E_4, в котором точка определяется тремя независимыми параметрами (координатами). Известно, что в пространстве R_3 существует шесть различных ортогональных криволинейных систем координат, с помощью которых можно определить точку в этом пространстве /15/. Наиболее общей системой координат в R_3 является эллиптическая.

Метрика на сфере в C_4 с учётом (I0) определяется следующим образом:

$$ds^2 = dz_\alpha dz^\alpha = d\xi_\alpha^2 + \xi_\alpha^2 d\varphi_\alpha^2. \tag{I2}$$

Так как комплексные переменные z_α и z^α выражаются через действительные переменные ξ_α и φ_α, мы можем генераторы группы $\mathcal{U}(4)$ (и соответственно и операторы $S\mathcal{U}(4)$) выразить как инфинитезимальные дифференциальные операторы от этих новых переменных. После непосредственных вычислений из (6) получаем:

$$\hat{A}^\alpha_\beta = \frac{1}{2}\exp[i(\varphi_\alpha - \varphi_\beta)]\cdot\left\{ i\hat{M}_{\alpha\beta} - i\left[\frac{\xi_\beta}{\xi_\alpha}\frac{\partial}{\partial\varphi_\alpha} + \frac{\xi_\alpha}{\xi_\beta}\frac{\partial}{\partial\varphi_\beta}\right]\right\}, \tag{I3}$$

где через $\hat{M}_{\alpha\beta}$ обозначены инфинитезимальные дифференциальные операторы на сфере в R_3,

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = -i\left(\xi_\alpha\frac{\partial}{\partial\xi_\beta} - \xi_\beta\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\right), \tag{I4}$$

которые удовлетворяют известным коммутационным соотношениям

$$[\hat{M}_{\alpha\beta}, \hat{M}_{\gamma\delta}] = i\left(\delta_{\alpha\gamma}\hat{M}_{\beta\delta} + \delta_{\beta\delta}\hat{M}_{\alpha\gamma} - \delta_{\alpha\delta}\hat{M}_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma}\hat{M}_{\alpha\delta}\right). \tag{I5}$$

Если обозначить три независимых параметра, определяющих точку в пространстве R_3, через ρ_1, ρ_2 и ρ_3, то, в свою очередь, шесть операторов $\hat{M}_{\alpha\beta}$ можно выразить в виде дифференциальных инфинитезимальных операторов от этих переменных, а именно:

$$\hat{M}_{\alpha\beta} = -i\,\frac{e_{\alpha\beta\gamma\delta}\, e_{ijk}}{4 H_{\rho_1} H_{\rho_2} H_{\rho_3}} \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi_\gamma}{\partial\rho_i} & \frac{\partial\xi_\gamma}{\partial\rho_j} \\ \frac{\partial\xi_\delta}{\partial\rho_i} & \frac{\partial\xi_\delta}{\partial\rho_j} \end{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho_k}, \tag{I6}$$

где через H_{ρ_i} обозначены коэффициенты Ламе, определяющие метрику на сфере в E_4,

$$d\sigma^2 = d\xi_\alpha^2 = H_{\rho_1}^2 d\rho_1^2 + H_{\rho_2}^2 d\rho_2^2 + H_{\rho_3}^2 d\rho_3^2. \tag{I7}$$

Если базис для представлений группы $SU(4)$, построенный в виде неприводимых полиномов от ковариантных и контравариантных векторов z_α и z^β имеет степень p и q в этих векторах, то его размерность $D_4(p,q)$, как известно, равна /16/

$$D_4(p,q) = \frac{1}{12}(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)(p+q+3) = \frac{1}{12}(2w+3)\left[(w+1)^2-n^2\right]\left[(w+2)^2-n^2\right] = D_4(w,n), \qquad (18)$$

где вместо p и q введены числа w и n согласно формулам

$$w = \frac{1}{2}(p+q), \quad n = \frac{1}{2}(p-q), \quad |n| \leq w. \qquad (19)$$

Смысл чисел w и n будет ясен из дальнейшего. Размерности представлений в схеме p, q и в схеме w и n для группы $SU(4)$ показаны на рис. I.

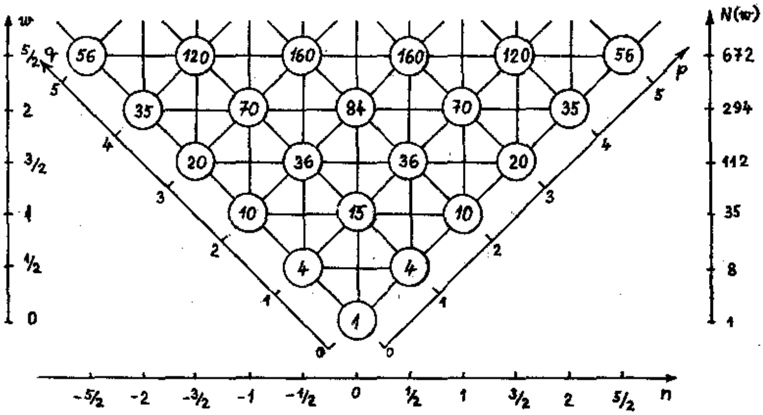

Рис. I

Число групп линейно-независимых полиномов (т.е. число представлений) с заданным w равно $2w+1$. Общее число состояний с заданным w равно

$$N(w) = \sum_{n=-w}^{w} D_4(w,n) = \frac{1}{90}(w+1)(w+2)(2w+1)(2w+3)^2(2w+5). \qquad (20)$$

Полные наборы наблюдаемых на сфере в C_4

Как уже было сказано, точка на сфере в C_4 определяется семью координатами, полный набор наблюдаемых на сфере в C_4 состоит из семи квантовых чисел, которые являются собственными значениями семи диагональных операторов, построенных из генераторов $\hat{A}^{\alpha}_{\beta}$ группы $\mathcal{U}(4)$. Пять из этих операторов известны, а именно, это оператор Лапласа (оператор Казимира второго порядка) и четыре диагональных оператора, соответствующих диагональным элементам в матрице генераторов $\hat{A}^{\alpha}_{\beta}$, т.е. *

$$\hat{C}^{(2)} = \frac{1}{2}\hat{A}^{\alpha}_{\beta}\hat{A}^{\beta}_{\alpha} = \frac{1}{2}\left[p(p+3)+q(q+3)\right] = w(w+3)+n^2, \qquad (21)$$

$$\frac{1}{2}\hat{A}^{1}_{1} = n_1, \quad \frac{1}{2}\hat{A}^{2}_{2} = n_2, \quad \frac{1}{2}\hat{A}^{3}_{3} = n_3, \quad \frac{1}{2}\hat{A}^{4}_{4} = n_4.$$

В формулах (21) n_α являются аддитивными квантовыми числами, причём $|n_i| \leqslant w$ и $n = n_1+n_2+n_3+n_4 = \frac{1}{2}(p-q)$. Набор пяти операторов в (21) необходимо дополнить ещё двумя операторами, которые коммутируют между собой и также с операторами в (21). Эти два оператора построим в виде некоторых полиномов, квадратичных в генераторах $\hat{A}^{\alpha}_{\beta}$ группы $U(4)$, исходя из следующих теоретико-групповых соображений.

Система операторов (21), как правило, дополняется до полного набора операторов двумя операторами, которые представляют собой операторы Казимира второго порядка подгрупп, соответствующих цепочкам подгрупп (3) или (4), так как эти операторы коммутируют между собой и с операторами в (21).

---

* Оператор Лапласа, выраженный через генераторы $\hat{B}^{\alpha}_{\beta}$ группы $S\mathcal{U}(4)$, имеет собственные значения: $\frac{1}{2}\hat{B}^{\alpha}_{\beta}\hat{B}^{\beta}_{\alpha} = w(w+3) + \frac{1}{2}n^2 = \frac{1}{8}\left[3(p+q)(p+q+4) - 4pq\right]$.

Таким образом, в выборе этих двух добавочных операторов имеется известная доля произвола, что связано со структурой цепочки подгрупп группы $SU(4)$.

Шестнадцатипараметрическая группа $U(4)$ имеет четыре девятипараметрических подгруппы $U(3)$ и шесть четырёхпараметрических подгрупп $U(2)$. Каждая из этих подгрупп имеет свой оператор Казимира второго порядка, и эти операторы обозначим соответственно как $\hat{C}^{(2)}_{\alpha}$ и $\hat{C}^{(2)}_{\alpha\beta}$. Так, например, операторы $\hat{C}^{(2)}_{1}$ и $\hat{C}^{(2)}_{12}$ в данном случае имеют следующий явный вид:

$$\hat{C}^{(2)}_{1} = \frac{1}{2}\left[(\hat{A}^2_2)^2 + (\hat{A}^3_3)^2 + (\hat{A}^4_4)^2\right] + \left[\hat{A}^2_3\hat{A}^3_2 + \hat{A}^3_4\hat{A}^4_3 + \hat{A}^4_2\hat{A}^2_4\right], \tag{22}$$

$$\hat{C}^{(2)}_{12} = \frac{1}{2}\left[(\hat{A}^3_3)^2 + (\hat{A}^4_4)^2 + \hat{A}^3_4\hat{A}^4_3 + \hat{A}^4_3\hat{A}^3_4\right].$$

Аналогично можно выписать операторы Казимира второго порядка на остальных подгруппах. Из теории групп известно, что вообще операторы Казимира каждой из подгрупп некоторой группы коммутируют с операторами Казимира этой группы, и, таким образом, в данном случае имеет место

$$\left[\hat{C}^{(2)}, \hat{C}^{(2)}_{\alpha}\right] = \left[\hat{C}^{(2)}, \hat{C}^{(2)}_{\alpha\beta}\right] = 0. \tag{23}$$

Следовательно, два искомых диагональных оператора можно выбрать в виде некоторой линейной комбинации операторов Казимира второго порядка подгрупп $U(3)$ и $U(2)$ группы $U(4)$, т.е. в виде

$$\hat{F}_1 = \sum_{\alpha} a_{\alpha}\hat{C}^{(2)}_{\alpha}, \quad \hat{F}_2 = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\hat{C}^{(2)}_{\alpha\beta}, \tag{24}$$

где 10 параметров a_{α} и $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ представляют собой некоторые постоянные. Связь постоянных a_{α} с постоянными $a_{\alpha\beta}$ определяется из условия, что коммутатор операторов $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$ в (24) должен равняться нулю. Учитывая факт, что имеют место соотношения

$$\left[\hat C^{(2)}_{\alpha}, \hat C^{(2)}_{\alpha\beta}\right] = \left[\hat C^{(2)}_{\beta}, \hat C^{(2)}_{\alpha\beta}\right] = 0,$$

$$\left[\hat C^{(2)}_{\alpha}, \hat C^{(2)}_{\beta\gamma}\right] + \left[\hat C^{(2)}_{\beta}, \hat C^{(2)}_{\gamma\alpha}\right] + \left[\hat C^{(2)}_{\gamma}, \hat C^{(2)}_{\alpha\beta}\right] = 0, \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma, \tag{25}$$

из условия коммутации операторов (24) находим между постоянными a_α и $a_{\alpha\beta}$ простую связь, которая имеет вид

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta . \tag{26}$$

Таким образом, наиболее общим набором диагональных операторов на сфере в четырёхмерном комплексном пространстве является система операторов:

$$\frac{1}{2}\hat A^1_1 = n_1, \quad \frac{1}{2}\hat A^2_2 = n_2, \quad \frac{1}{2}\hat A^3_3 = n_3, \quad \frac{1}{2}\hat A^4_4 = n_4,$$

$$\hat C^{(2)} = \frac{1}{2}\hat A^\alpha_\beta \hat A^\beta_\alpha = \frac{1}{2}\left[(\hat A^1_1)^2 + (\hat A^2_2)^2 + (\hat A^3_3)^2 + (\hat A^4_4)^2\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\hat A^1_2\hat A^2_1 + \hat A^2_1\hat A^1_2 + \hat A^2_3\hat A^3_2 + \hat A^3_2\hat A^2_3 + \hat A^3_1\hat A^1_3 + \hat A^1_3\hat A^3_1 + \hat A^1_4\hat A^4_1 + \hat A^4_1\hat A^1_4 + \right.$$
$$\left. + \hat A^2_4\hat A^4_2 + \hat A^4_2\hat A^2_4 + \hat A^3_4\hat A^4_3 + \hat A^4_3\hat A^3_4\right] = w(w+3) + n^2,$$

$$\hat F_1 = \frac{1}{2}a_1\left[(\hat A^2_2)^2 + (\hat A^3_3)^2 + (\hat A^4_4)^2 + \hat A^2_3\hat A^3_2 + \hat A^3_4\hat A^4_3 + \hat A^4_2\hat A^2_4 + \hat A^3_2\hat A^2_3 + \hat A^4_3\hat A^3_4 + \hat A^2_4\hat A^4_2\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}a_2\left[(\hat A^3_3)^2 + (\hat A^4_4)^2 + (\hat A^1_1)^2 + \hat A^3_4\hat A^4_3 + \hat A^4_1\hat A^1_4 + \hat A^1_3\hat A^3_1 + \hat A^4_3\hat A^3_4 + \hat A^1_4\hat A^4_1 + \hat A^3_1\hat A^1_3\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}a_3\left[(\hat A^4_4)^2 + (\hat A^1_1)^2 + (\hat A^2_2)^2 + \hat A^4_1\hat A^1_4 + \hat A^1_2\hat A^2_1 + \hat A^2_4\hat A^4_2 + \hat A^1_4\hat A^4_1 + \hat A^2_1\hat A^1_2 + \hat A^4_2\hat A^2_4\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}a_4\left[(\hat A^1_1)^2 + (\hat A^2_2)^2 + (\hat A^3_3)^2 + \hat A^1_2\hat A^2_1 + \hat A^2_3\hat A^3_2 + \hat A^3_1\hat A^1_3 + \hat A^2_1\hat A^1_2 + \hat A^3_2\hat A^2_3 + \hat A^1_3\hat A^3_1\right] =$$
$$= \varepsilon^{w}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(a_1, a_2, a_3, a_4), \tag{27}$$

$$\hat F_2 = \frac{1}{2}a_1 a_2\left[(\hat A^3_3)^2 + (\hat A^4_4)^2 + \hat A^3_4\hat A^4_3 + \hat A^4_3\hat A^3_4\right] + \frac{1}{2}a_2 a_3\left[(\hat A^1_1)^2 + (\hat A^4_4)^2 + \hat A^1_4\hat A^4_1 + \hat A^4_1\hat A^1_4\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}a_3 a_1\left[(\hat A^2_2)^2 + (\hat A^4_4)^2 + \hat A^2_4\hat A^4_2 + \hat A^4_2\hat A^2_4\right] + \frac{1}{2}a_1 a_4\left[(\hat A^2_2)^2 + (\hat A^3_3)^2 + \hat A^2_3\hat A^3_2 + \hat A^3_2\hat A^2_3\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}a_2 a_4\left[(\hat A^3_3)^2 + (\hat A^1_1)^2 + \hat A^3_1\hat A^1_3 + \hat A^1_3\hat A^3_1\right] + \frac{1}{2}a_3 a_4\left[(\hat A^1_1)^2 + (\hat A^2_2)^2 + \hat A^1_2\hat A^2_1 + \hat A^2_1\hat A^1_2\right] =$$
$$= \tau^{w}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(a_1, a_2, a_3, a_4).$$

В формулах (27) собственные значения операторов $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$ обозначены соответственно через $\varepsilon^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(a_1,a_2,a_3,a_4)$ и $\tau^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(a_1,a_2,a_3,a_4)$. Очевидно, что эти собственные значения являются некоторыми функциями четырёх параметров a_α, зависят от квантовых чисел w и n_α и, кроме того, индексы λ,μ в скобках различают состояния с одинаковыми n_1,n_2,n_3,n_4 и указывают на взаимную связь этих двух собственных значений.

Из полного набора операторов (27) можно получить пять других неэквивалентных полных наборов операторов, если рассмотреть частные значения параметров a_α. Можно показать, что существует только пять неэквивалентных частных случаев операторов (27) /I7/. Для этого необходимо рассмотреть случаи:

$a_1=a_2\neq a_3\neq a_4$, $a_1\neq a_2=a_3\neq a_4$, $a_1=a_2\neq a_3=a_4$, $a_1=a_2=a_3\neq a_4$, $a_1\neq a_2\neq a_3<a_4\to\infty$. Таким образом, важным фактом является то, что на сфере в C_4 существует шесть неэквивалентных полных наборов наблюдаемых, которые в принципе можно использовать в задачах, связанных с симметрией группы $\mathcal{U}(4)$ или $S\mathcal{U}(4)$.

Эллиптический базис на сфере в C_4

Рассмотрим наиболее общую параметризацию сферы в четырёхмерном эвклидовом пространстве через эллиптическую систему координат. Алгебраическая форма эллиптической системы координат на сфере в E_4 имеет вид /I5/

$$\xi_1^2=\frac{(\rho_1-a_1)(\rho_2-a_1)(\rho_3-a_1)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)},\quad \xi_2^2=\frac{(\rho_1-a_2)(\rho_2-a_2)(\rho_3-a_2)}{(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_1-a_2)},$$
$$\xi_3^2=\frac{(\rho_1-a_3)(\rho_2-a_3)(\rho_3-a_3)}{(a_4-a_3)(a_1-a_3)(a_2-a_3)},\quad \xi_4^2=\frac{(\rho_1-a_4)(\rho_2-a_4)(\rho_3-a_4)}{(a_1-a_4)(a_2-a_4)(a_3-a_4)}, \tag{28}$$
$$a_1\leq\rho_1\leq a_2\leq\rho_2\leq a_3\leq\rho_3\leq a_4,$$

$$ds'^2 = d\xi_\alpha^2 = H_{\rho_1}^2 d\rho_1^2 + H_{\rho_2}^2 d\rho_2^2 + H_{\rho_3}^2 d\rho_3^2 = \frac{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)}{4(\rho_2-\rho_3)\,P_4(\rho_1)}\,d\rho_1^2 +$$
$$+\frac{(\rho_2-\rho_3)(\rho_2-\rho_1)}{4(\rho_3-\rho_1)\,P_4(\rho_2)}\,d\rho_2^2 + \frac{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)}{4(\rho_1-\rho_2)\,P_4(\rho_3)}\,d\rho_3^2\,,\quad P_4(\rho_1)\le 0\,,\quad P_4(\rho_2)\ge 0,$$
$$P_4(\rho) = (\rho-a_1)(\rho-a_2)(\rho-a_3)(\rho-a_4) \equiv \rho^4 - g_1\rho^3 + g_2\rho^2 - g_3\rho + g_4.$$

Если выразить генераторы $\hat{M}_{\alpha\beta}$ с помощью формулы (I6) (и соответственно также генераторы $\hat{A}^\alpha_\beta$ в формуле (I3)) через инфинитезимальные дифференциальные операторы от переменных φ_α из (I0) и переменных ρ_i из (28), то из (27) получаем следующую явную систему дифференциальных уравнений:

$$\hat{A}^1_1 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi_1} = 2n_1\,,\quad \hat{A}^2_2 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi_2} = 2n_2\,,\quad \hat{A}^3_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi_3} = 2n_3\,,\quad \hat{A}^4_4 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi_4} = 2n_4\,,$$
$$\frac{1}{2}\hat{A}^\alpha_\beta A^\beta_\alpha - \frac{1}{4}\left[(\hat{A}^1_1)^2 + (\hat{A}^2_2)^2 + (\hat{A}^3_3)^2 + (\hat{A}^4_4)^2\right] = w(w+3) =$$
$$= -\frac{\hat{D}(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)} - \frac{\hat{D}(\rho_2)}{(\rho_2-\rho_3)(\rho_2-\rho_1)} - \frac{\hat{D}(\rho_3)}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)} + \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{n_\alpha^2}{\xi_\alpha^2}\,,$$
$$\tilde{\mathcal{E}}^{\,w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(a_1,a_2,a_3,a_4) = -\frac{(\rho_2+\rho_3)\,\hat{D}(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)} -$$
$$-\frac{(\rho_3+\rho_1)\,\hat{D}(\rho_2)}{(\rho_2-\rho_3)(\rho_2-\rho_1)} - \frac{(\rho_1+\rho_2)\,\hat{D}(\rho_3)}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)} + \sum_{\alpha=1}^{4}\frac{n_\alpha^2}{\xi_\alpha^2}\,(\rho_1+\rho_2+\rho_3-a_\alpha), \tag{29}$$
$$\tilde{\tau}^{\,w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(a_1,a_2,a_3,a_4) = -\frac{\rho_2\rho_3\,\hat{D}(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)} -$$
$$-\frac{\rho_3\rho_1\,\hat{D}(\rho_2)}{(\rho_2-\rho_3)(\rho_2-\rho_1)} - \frac{\rho_1\rho_2\,\hat{D}(\rho_3)}{(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\rho_2)} +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{n_\alpha^2}{\xi_\alpha^2}\left[\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1-(\rho_1+\rho_2+\rho_3)a_\alpha + a_\alpha^2\right],$$

где через $\hat{D}(\rho)$ обозначен дифференциальный оператор

$$\hat{D}(\rho) = \frac{\partial}{\partial\rho}\left(P_4(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\right),$$

и вместо собственных значений ε и τ введены эквивалентные собственные значения $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\tau}$, определяемые соотношениями

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{1}{3}g_1 n^2 + \frac{2}{3}n\sum_{\alpha=1}^{4} a_\alpha n_\alpha + \frac{2}{3}\sum_{\alpha=1}^{4} a_\alpha n_\alpha^2 ; \quad \tilde{\tau} = \tau - g_1\sum_{\alpha=1}^{4} a_\alpha n_\alpha^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{4} a_\alpha^2 n_\alpha^2 .$$

Система операторных уравнений допускает разделения переменных, если искать волновые функции в виде произведения

$$\prod_{\alpha=1}^{4}\prod_{k=1}^{3}\Lambda^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(\rho_k)\, e^{2in_\alpha\varphi_\alpha} .$$

При этом функция $\Lambda^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(\rho)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\begin{gathered}\Big\{ \frac{d}{d\rho}P_4(\rho)\frac{d}{d\rho} + \frac{n_1^2}{\rho-a_1}(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1) + \frac{n_2^2}{\rho-a_2}(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_1-a_2) + \\ + \frac{n_3^2}{\rho-a_3}(a_4-a_3)(a_1-a_3)(a_2-a_3) + \frac{n_4^2}{\rho-a_4}(a_1-a_4)(a_2-a_4)(a_3-a_4) - w(w+3)\rho^2 + \\ + \tilde{\varepsilon}^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(a_1,a_2,a_3,a_4)\rho - \tilde{\tau}^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(a_1,a_2,a_3,a_4)\Big\}\Lambda^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(\rho) = 0. \end{gathered} \tag{30}$$

Если искать решения дифференциального уравнения (30) в виде

$$R^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(\rho)\prod_{\alpha=1}^{4}(\rho-a_\alpha)^{|n_\alpha|},$$

то функция $R^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(\rho)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered}\Big\{ P_4(\rho)\frac{d^2}{d\rho^2} + \left[2(n_0+2)\rho^3 - (2G_1+3g_1)\rho^2 + 2(G_2+g_2)\rho - (2G_3+g_3)\right]\frac{d}{dr} + \\ + \Big[-(w-n_0)(w+n_0+3)\rho^2 + \left\{\tilde{\varepsilon} - 2(n_0+1)G_1 + n_0^2 g_1\right\}\rho - \tilde{\tau} + (2n_0+1)G_2 - \\ - 2n_0 g_1 G_1 + G_1^2 + n_0^2(g_1^2 - g_2)\Big]\Big\} R^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(\rho) = 0, \end{gathered} \tag{31}$$

где для удобства введены обозначения: $n_0 = |n_1| + |n_2| + |n_3| + |n_4|$,

$$G_1 = (a_2+a_3+a_4)|n_1| + (a_3+a_4+a_1)|n_2| + (a_4+a_1+a_2)|n_3| + (a_1+a_2+a_3)|n_4|,$$

$$G_2 = (a_2a_3+a_3a_4+a_4a_2)|n_1| + (a_3a_4+a_4a_1+a_1a_4)|n_2| + (a_4a_1+a_1a_2+a_2a_4)|n_3| + \\ + (a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)|n_4|,$$

$$G_3 = a_2a_3a_4|n_1| + a_3a_4a_1|n_1| + a_4a_1a_2|n_3| + a_1a_2a_3|n_4|.$$

Дифференциальное уравнение (3I) относится к дифференциальным уравнениям класса Фукса с пятью регулярными особыми точками. Его можно охарактеризовать следующим P – символом Римана:

$$P\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -w+n_0 \\ 2|n_1| & 2|n_2| & 2|n_3| & 2|n_4| & w+n_0+3 \end{matrix}\right\}.$$

Полиномиальные решения дифференциального уравнения (3I) имеют вид ряда

$$R^{w(\lambda,\mu)}_{n_1n_2n_3n_4}(\rho) = \sum_{r=0}^{\infty} Z_r(a_1,a_2,a_3,a_4)\,\rho^{w-n_0-r}, \qquad (32)$$

причём коэффициенты $Z_r(a_1,a_2,a_3,a_4)$ при этом удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$r(r-2w-3)Z_r + \left\{\tilde{\varepsilon} - 2(w-r+2)G_1 + [(w-r+2)(w-r+2n_0+2)-1]g_1\right\}Z_{r-1} +$$

$$+\left\{-\tilde{\tau} + (2w-2r+5)G_2 - 2n_0g_1G_1 + G_1^2 + n_0^2g_1^2 + [(w-r-n_0+2)(w-r-n_0+3)-n_0^2]g_2\right\}Z_{r-2} -$$

$$-(w-n_0-r+3)[2G_3 + (w-n_0-r+4)g_3]Z_{r-3} +$$

$$+(w-n_0-r+4)(w-n_0-r+3)Z_{r-4} = 0, \qquad Z_p = 0,\ p<0.$$

Собственные значения $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\tau}$ определяются из условия конечности ряда (32), которое имеет вид: $Z_{w-n_0+1} = Z_{w-n_0+2} = 0$.

Для определения собственных значений $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\tau}$ получаем систему двух алгебраических уравнений степени $w-n_0+1$. Используя теорию исключения для систем алгебраических уравнений с многими неизвестными /I8/, решение данной системы двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\tau}$ можно свести к решению двух алгебраических уравнений степени $\frac{1}{2}(w-n_0+1)(w-n_0+2)$ для каждой переменной. Различные корни этих уравнений будем обозначать символами (λ) и (μ) соответственно.

Таким образом нетрудно построить явный вид ненормированных собственных волновых функций системы диагональных операторов (27). Эти функции имеют вид

$$\prod_{\alpha=1}^{4} \xi_\alpha^{2|n_\alpha|} e^{2i n_\alpha \varphi_\alpha} \cdot \prod_{i=1}^{3} \left(\sum_{r=0}^{w-n_0} Z_r \, \varrho_i^{w-n_0-r} \right). \tag{33}$$

С учётом тождества, которое легко проверить,

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{z_\alpha z^\alpha}{\theta - a_\alpha} = \left[P_4(\theta) \right]^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{3} (\varrho_i - \theta),$$

функции (33) можно переписать в другой форме:

$$\prod_{\alpha=1}^{4} (z_\alpha)^{\frac{|n_\alpha|+n_\alpha}{2}} \cdot (z^\alpha)^{\frac{|n_\alpha|-n_\alpha}{2}} \cdot \prod_{q=1}^{w-n_0} \left(\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{z_\alpha z^\alpha}{\theta_q - a_\alpha} \right),$$

где через θ_q обозначены корни полиномов в (33).

З а к л ю ч е н и е

Итак, в работе на основе теоретико-групповых соображений построен наиболее общий набор диагональных операторов на сфере в четырёхмерном комплексном пространстве. В принципе построены также собственные волновые функции этого набора операторов. Эта система операторов и собственных волновых функций построена с целью последующего применения к систематике элементарных частиц на основе группы $SU(4)$ - симметрии, а именно, с целью построения массового оператора и определения его собственных значений в отдельных супермультиплетах группы $SU(4)$. Этот массовый оператор должен представлять некоторое общее нарушение группы $SU(4)$ и должен быть аналогом массового оператора из работы /5/ для группы $SU(3)$. На основе этого массового оператора и правил сумм для собственных значений $\tilde{\varepsilon}^{w(\lambda,\mu)}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ и $\tilde{\tau}^{w(\lambda,\mu)}_{n_1 n_2 n_3 n_4}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ можно выписать ряд правил сумм для масс частиц, входящих в супермультиплет. Поставленные задачи можно будет решить, используя результаты данной статьи, но это станет предметом отдельной работы.

Литература

1. M. Gell-Mann. Report CTSL - 20, 1961.
2. Y. Ne'eman. Nucl. Phys., 26, 222 (1961).
3. A.B. Beg, H. Ruegg. Journ. Math. Phys., 6, 677 (1965).
4. И. Лукач, Л. Тотх. ЯФ, 17, 1337 (1973).
5. И. Лукач. ЯФ, 18, 202 (1973).
6. И. Лукач, Я.А. Смородинский. Сообщения ОИЯИ Р-2 9053, Дубна, 1975.
7. P. Tarjanne, V.L. Teplitz. Phys. Rev. Lett., 11, 447 (1963).
8. V. Amar, A. Esteve, P.G. Sona. Nuovo Cim., 30, 772 (1963).
9. P. Tarjanne. Phys. Rev., B136, 1532 (1964).
10. Y. Hara. Phys. Rev., B134, 701 (1964).
11. D. Amati, H. Bacry, J. Nuyts, J. Prentki. Phys. Letters, 11, 190 (1964).

12. J.J. Aubert et al. Phys. Rev. Letters, 33, 1404 (1974).
13. M.B. Eihorn. Fermilab lecture-75/1-THY/EXP, Batavia, 1975.
14. M.K. Gailard, B.W. Lee, J. Rosner. Rev. Mod. Phys., 47, 277 (1975).
15. М.Н. Олевский. Мат. сб., 27, 379 (1950).
16. Н.Я. Виленкин, Г.И. Кузнецов, Я.А. Смородинский. ЯФ, 2, 906 (1965).
17. I. Lukáč, M. Nagy. Proceedings of the Conference "Hadron Structure'76" in Smolenice, Bratislava (in print).
18. Б.Л. Ван дер Варден. Современная алгебра, часть 2, М.-Л., Гостехиздат, 1947.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 июня 1977 года.