ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10729

Д.И.Казаков, В.Н.Первушин, С.В.Пушкин

МЕТОД ИНВАРИАНТНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИММЕТРИЙ

1977

P2 - 10729

Д.И.Казаков, В.Н.Первушин, С.В.Пушкин

МЕТОД ИНВАРИАНТНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕАЛИЗАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИММЕТРИЙ

Направлено в "Nuclear Physics"

Казаков Д.И., Первушин В.Н., Пушкин С.В. P2 - 10729

Метод инвариантной перенормировки для нелинейных реализаций динамических симметрий

Исследуется структура ультрафиолетовых расходимостей в моделях теории поля, являющихся нелинейной реализацией произвольной полупростой группы Ли, со спонтанно нарушенной симметрией вакуума. Предложена инвариантная формулировка метода фонового поля, приводящая к явным образом инвариантным контрчленам вне массовой поверхности. Развит простой алгоритм построения контрчленов, основанный на инвариантах группы симметрии в терминах форм Картана. Получены общие формулы для однопетлевых и двухпетлевых контрчленов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Kazakov D.I., Pervushin V.N., Pushkin S.V. P2 - 10729

An Invariant Renormalization Method for Nonlinear Realizations of the Dynamical Symmetries

The structure of the ultraviolet divergences is investigated for the field theoretical models with nonlinear realization of an arbitrary semisimple Lie group, with spontaneously broken symmetry of vacuum. An invariant formulation of the background field method of renormalization is proposed which gives the manifestly invariant counterterms off mass shell. A simple algorithm for construction of counterterms is developed. It is based on invariants of the group of dynamical symmetry in terms of the Cartan forms. The results of one-loop and two-loop calculations are reported.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

I. Введение

Существует тесная связь между исходной симметрией классической теории поля и динамикой ее квантования. Сам принцип симметрии является часто исходным пунктом в выборе лагранжиана классической теории, и квантование, в том числе схема перенормировок, строится таким образом, чтобы не нарушить исходной симметрии. Более того, существует мнение, что учет динамической симметрии в теориях с нелинейной реализацией, формально неперенормируемых, может приводить к перенормируемости /I/ или, по крайней мере, к различным соотношениям между контрчленами, отражающим динамические эффекты. Например, в двумерных моделях /2/ происходит динамическое восстановление симметрии вакуума (с аналогичным явлением в квантовой хромодинамике связывают механизм удержания кварков /3/).

Настоящая работа посвящена исследованию структуры ультрафиолетовых расходимостей в моделях теории поля, являющихся нелинейными реализациями произвольной полупростой группы Ли, со спонтанно нарушенной симметрией вакуума. В работе предлагается простой метод расчета многопетлевых контрчленов, который применяется для получения общей формулы контрчленов одно и двухпетлевого приближения.

Отметим, что для таких теорий расчет двухпетлевых контрчленов в рамках обычной теории возмущений - задача невыполнимая технически из-за неполиномиальности лагранжиана. Метод фонового поля /4-9/, заметно упрощающий вычисления однопетлевых контрчленов, в случае нелинейных реализаций неинвариантен вне массовой поверхности, и поэтому неприменим для вычисления высших контрчленов.

Основой для предлагаемой модификации метода фонового поля является теория нелинейных реализаций простых групп Ли (Э.Картан[10], С.Коулмен и др.[11], Д.В.Волков[12]). Эта теория оперирует геометрическими оразами фактор-пространства G/H, где G – исходная группа динамической симметрии, а H – подгруппа стабильности вакуума. Согласно методу феноменологических лагранжианов[10-12], алгоритм построения лагранжианов состоит в отождествлении параметров фактор-пространства с полями голдстоуновских частиц и нахождении инвариантов относительно преобразований группы G, заданных на ее фактор-пространстве.

Основным моментом при разделении полей на фоновые и квантованные является учет геометрии кривого пространства полей. Мы используем операцию сложения векторов на фактор-пространстве*) и даем алгоритм построения контрчленов на основе инвариантов группы прямо в ковариантных терминах форм Картана. Контрчлены, полученные таким образом, инвариантны вне массовой поверхности[13].

Статья построена следующим образом. В § 2 даются основные понятия метода феноменологических лагранжианов и вводятся формы Картана. § 3 посвящен методу перенормировок, описывается предлагаемая модификация метода фонового поля и доказывается его инвариантность. В § 4 получены однопетлевые контрчлены и предлагается общий алгоритм построения контрчленов любого порядка. Этот алгоритм применяется в § 5 для получения общей формулы

---

*) Такая операция сложения предлагалась для $SU(2)\times SU(2)$ теории в работе[4] и была детально разработана на основе теории Картана для произвольных динамических групп (в том числе и гравитации) в работах одного из авторов[15,16].

для двухпетлевых контрчленов. В § 6 содержатся некоторые выводы и обсуждаются возможные применения предложенного формализма.

2. Классическая теория

Построение нелинейных реализаций и на их основе инвариантов, определяющих структуру феноменологического лагранжиана для произвольной группы динамической симметрии, может быть проведено посредством стандартной процедуры/10-12/.

Пусть G – $(k+r)$ параметрическая полупростая группа симметрии, приводящая к вырождению вакуума и появлению голдстоуновских частиц, H – его максимальная подгруппа, оставляющая инвариантным вакуум. Классический лагранжиан, инвариантный относительно группы G, имеет вид:

$$\mathcal{L}(A) = \frac{1}{2C_2} \operatorname{Sp} \omega_\mu(A)\omega_\mu(A), \tag{1}$$

где C_2 – квадратичный оператор Казимира группы G, а $\omega_\mu(A)$ есть дифференциальные формы Картана, определяемые по конечным преобразованиям группы G равенством

$$\begin{gathered} G^{-1}(A)\partial_\mu G(A) = i[\omega_\mu(A) + \theta_\mu(A)], \\ \omega_\mu(A) = \omega_\mu^i(A) X_i, \quad \theta_\mu(A) = \theta_\mu^\alpha(A) Y_\alpha, \end{gathered} \tag{2}$$

где Y_α $(\alpha = 1,2,\ldots,r)$ – генераторы подгруппы H, а X_i $(i = 1,2,\ldots,k)$ – генераторы смежного класса G/H, дополняющего H до группы G, с алгеброй

$$\begin{gathered} [Y_\alpha, Y_\beta] = i A_{\alpha\beta}^\gamma Y_\gamma, \quad [X_i, Y_\alpha] = i B_{i\alpha}^k X_k, \\ [X_i, X_k] = i C_{ik}^\alpha Y_\alpha. \end{gathered} \tag{3}$$

Параметры группы (A) отождествляются с полями частиц, а формы ω_μ и θ_μ имеют простой геометрический смысл: $\omega(A)$ определяет в некотором базисе компоненты малого смещения из точки A в точку $A+dA$, а $\theta(A)$ определяет изменение базиса и используется для определения ковариантного дифференцирования

$$D_\mu \omega_\nu = D_\nu \omega_\mu = \partial_\mu \omega_\nu + i\,[\theta_\mu, \omega_\nu]\,. \tag{4}$$

Формы Картана $\omega_\mu(A)$ и $\theta_\mu(A)$ связаны между собой структурными уравнениями фактор-пространства

$$\begin{aligned} \partial_\mu \theta_\nu - \partial_\nu \theta_\mu + i\,[\theta_\mu, \theta_\nu] &= -\,i\,[\omega_\mu, \omega_\nu] \equiv C_{\mu\nu}, \\ \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + i\,[\theta_\mu, \omega_\nu] &= -\,i\,[\omega_\mu, \theta_\nu] \equiv \tilde{C}_{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Явный вид форм Картана в выбранной параметризации может быть определен из равенства (2) как решение фундаментальных уравнений Картана. (см. Приложение I).

Лагранжиан (I) является минимальным по числу производных инвариантом группы G, а произвольный инвариант выражается через формы Картана следующим образом/I7/:

$$Sp\left(D^{L_1}_{\cdots}\,\omega\left[D^{L_2}_{\cdots}\,\omega, \left[\ldots, \left[D^{L_{n-1}}_{\cdots}\,\omega, D^{L_n}_{\cdots}\,\omega \right]\ldots\right]\right]\right), \tag{6}$$

где L_i - степени ковариантных дифференциалов, точки означают лоренцевы индексы, по которым производится суммирование. Инварианты (6) составляют полный набор.

3. Метод перенормировок

Процедуру перенормировок мы будем строить на основе инвариантной формулировки метода фонового поля. Прекрасное изложение метода фонового поля перенормировки можно найти в статье 'т Хоофта [6]. Поэтому мы напомним лишь основные моменты и остановимся на предлагаемой модификации метода в случае нелинейных реализаций.

Рассмотрим теорию поля с лагранжианом $\mathcal{L}(A)$. Произведем замену полей

$$A \to A + \varphi \,, \tag{7}$$

где поле A называется фоновым (или классическим, или внешним), а поле φ – квантовым (или внутренним). После этого производящий функционал для петлевых диаграмм записывается в виде

$$F[A] = \frac{1}{N}\int \prod_x \delta\mu(\varphi) \exp\left\{ i\int dx \left[\mathcal{L}(A+\varphi) - \mathcal{L}(A) - \varphi \frac{\delta \mathcal{L}(A)}{\delta A} \right] \right\} . \tag{8}$$

Контрчлены в лагранжиане получаются разложением $\mathcal{L}(A+\varphi)$ в ряд Тейлора по φ. При этом в контрчлен данного порядка дает вклад только конечное число членов разложения (для удаления расходимостей в подграфах нужно провести аналогичное разложение контрчленов низшего порядка, которые для этого нужно знать вне массовой поверхности).

Если лагранжиан обладает какой-либо линейной симметрией, то, как нетрудно показать, производящий функционал (8) также будет инвариантен. Получающиеся контрчлены автоматически будут удовлетворять всем тождествам Уорда.

Однако в случае нелинейных реализаций замена (7) нарушает исходную группу симметрии. Производящий функционал (8) уже не будет приводить к инвариантным контрчленам вне массовой поверхности. Поэтому мы предлагаем другой способ выделения фонового поля. Суть его состоит в следующем (см. [15]).

Пусть лагранжиан инвариантен относительно группы G преобразования полей

$$G(A') = G(g)\,G(A), \tag{9}$$

где $G(g)$ – преобразование группы G, причем

$$\mathcal{L}(G(A')) = \mathcal{L}(G(A)). \tag{10}$$

Преобразование (9) определяет нелинейную реализацию группы на координатах пространства частиц A. Тогда естественный путь выделения классических полей без нарушения симметрии – использовать геометрические свойства группового пространства полей, а именно – под суммой векторов (7) понимать сложение векторов в кривом пространстве (сложение векторов в фактор-пространстве G/H), т.е.

$$G(A) \to G(A)\,G(\varphi). \tag{11}$$

При таком "сложении" полей "сумма" будет являться элементом того же пространства и будет иметь тот же закон преобразования под действием группы G:

$$G(A')\,G(\varphi') = G(g)\,G(A)\,G(\varphi). \tag{12}$$

Из условий (9), (12) следует, что как лагранжиан $\mathcal{L}(A(+)\varphi)$, так и все члены его разложения в ряд Тейлора будут инвариантны относительно группы G. Покажем это на примере первой вариации лагранжиана, для чего представим ее в виде

$$\left.\frac{\delta \mathcal{L}(A(+)\varphi)}{\delta \varphi}\right|_{\varphi=0} = \frac{\delta \mathcal{L}(A)}{\delta A} = \left.\frac{\delta \mathcal{L}(G_A G_\varphi)}{\delta (G_A G_\varphi)} \cdot \frac{\delta (G_A G_\varphi)}{\delta G_\varphi} \cdot \frac{\delta G_\varphi}{\delta \varphi}\right|_{\varphi=0} =$$

$$= \left.\frac{\delta \mathcal{L}(G_A)}{\delta G_A}\, G_A\, \frac{\delta G_\varphi}{\delta \varphi}\right|_{\varphi=0}.$$

Тогда имеем

$$\frac{\delta \mathcal{L}(A')}{\delta A'} = \frac{\delta \mathcal{L}(G_{A'})}{\delta G_{A'}} G_{A'} \frac{\delta G_{\varphi'}}{\delta \varphi'}\Big|_{\varphi'=0} = \frac{\delta \mathcal{L}(G_{A'})}{\delta G_A} \frac{\delta G_A}{\delta G_{A'}} G_{A'} \frac{\delta G_{\varphi'}}{\delta \varphi'}\Big|_{\varphi'=0} =$$

$$= \frac{\delta \mathcal{L}(G_A)}{\delta G_A} G_g^{-1} G_g G_A \frac{\delta G_\varphi}{\delta \varphi}\Big|_{\varphi=0} = \frac{\delta \mathcal{L}(A)}{\delta A} .$$

Здесь мы воспользовались формулами (9), (I0) и тем фактом, что $\frac{\delta G_\varphi}{\delta \varphi}\Big|_{\varphi=0} = const$ и не преобразуется. Отсюда, принимая во внимание инвариантность меры интегрирования $\delta\mu(\varphi)$, получаем $F[A'] = F[A]$.

Таким образом, использование закона "сложения" полей (II) позволяет построить инвариантный формализм фонового поля в случае нелинейных реализаций. При этом мы не использовали уравнений движения для классических полей, что важно для построения конечных функций Грина вне массовой поверхности.

Преобразование (II) имеет простой геометрический смысл. Это есть сдвиг начала координат в точку A, что соответствует преобразованию квантовых полей с параметрами, совпадающими с классическими полями. Формы Картана в новых координатах можно получить, подставляя (II) в (2):

$$\left[G(A) G(\varphi) \right]^{-1} \partial_\mu \left[G(A) G(\varphi) \right] = i \left[\overline{\omega}_\mu (A,\varphi) + \overline{\Theta}_\mu (A,\varphi) \right], \quad (I3)$$

где явный вид $\overline{\omega}_\mu^i (A,\varphi)$ и $\overline{\Theta}_\mu^i (A,\varphi)$ в выбранной параметризации определяется как решение фундаментальных уравнений Картана с ненулевыми граничными условиями $\overline{\omega}_\mu (A,0) = \omega_\mu (A)$, $\overline{\Theta}_\mu (A,0) = \Theta_\mu (A)$ (см. Приложение I). Они имеют вид

$$\overline{\omega}_\mu^i (A,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mathcal{M}_\varphi^n)_\ell^i \left[\frac{\omega_\mu^\ell (A)}{(2n)!} + \frac{(\mathcal{D}_\mu \varphi)^\ell}{(2n+1)!} \right], \quad (I4)$$

$$\overline{\Theta}_\mu^i (A,\varphi) = \varphi^j C_{jk}^i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mathcal{M}_\varphi^n)_\ell^k \left[\frac{\omega_\mu^\ell (A)}{(2n+1)!} + \frac{(\mathcal{D}_\mu \varphi)^\ell}{(2n+2)!} \right],$$

где $(\mathcal{D}_\mu\varphi)^\ell = \partial_\mu\varphi^\ell + i(\Theta_\mu(A)\varphi)^\ell$ – ковариантная производная поля φ.

Тогда для теории с лагранжианом (I) имеем

$$\mathcal{L}(A(+)\varphi) = \frac{1}{2C_2}\,\mathrm{Sp}\,\bar{\omega}_\mu(A,\varphi)\bar{\omega}_\mu(A,\varphi). \qquad (I5)$$

Для нахождения контрчленов $\Delta\mathcal{L}_n$ в n-петлевом приближении нужно, во-первых, разложить лагранжиан (I5) по квантовым полям вплоть до φ^{2n}, а во-вторых, произвести разложение $\Delta\mathcal{L}_{n-1}$ до φ^{2n-2}, заменяя $\omega_\mu(A)$ на $\bar{\omega}_\mu(A,\varphi)$ и $\Theta_\mu(A)$ на $\bar{\Theta}_\mu(A,\varphi)$. Разложение $\Delta\mathcal{L}_{n-1}$ в n-петлевом приближении воспроизводит вычитание в подграфах.

4. <u>Алгоритм построения контрчленов</u>

Предложенный формализм позволяет развить простой алгоритм построения контрчленов любого приближения. Из формулы (I4) следует, что все коэффициентные функции в разложении лагранжиана (I5) являются произведениями форм $\omega_\mu(A)$ и $\Theta_\mu(A)$, причем во всех порядках разложения по φ существуют лишь три вида внешних структур, а именно $\omega_\mu(A)\omega_\mu(A)$, $\mathcal{D}_\mu(A)\omega_\mu(A)$ и $\mathcal{D}_\mu(A)\mathcal{D}_\mu(A)$. Это дает возможность получать явным образом инвариантные контрчлены, записанные прямо в терминах форм Картана без разложения по полям. Они строятся из набора линейно-независимых инвариантов группы (6), причем анализ расходящихся диаграмм показывает, что контрчлены n-петлевого приближения являются однородными функциями форм Картана степени $[\mathcal{D}\omega]^{2k}[\omega]^{2(n+1-2k)}$, $k=0,1,\dots,n-1$.*)

*) Этот факт является следствием использования размерной регуляризации. В противном случае указанная степень являлась бы максимальной для инвариантов n-петлевого приближения.

Рассмотрим сначала однопетлевое приближение. Производящий лагранжиан для однопетлевых диаграмм с учетом (8), (I4) и (I5) имеет вид

$$\mathcal{L}^{(1)}_{int}(A,\varphi) = \frac{1}{2}\left\{(\mathcal{D}_\mu\varphi)^i(\mathcal{D}_\mu\varphi)^i - \varphi\,\omega_\mu\omega_\mu\,\varphi\right\}. \qquad (I6)$$

Генераторы группы X_i и Y_α при этом выбраны в присоединенном представлении, и для простоты мы полагаем структурные постоянные A, B и C в формуле (3) одинаковыми. Получаем следующие типы вершин

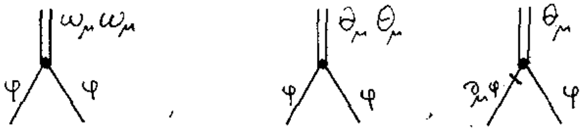

Рис. I.

Здесь и далее на диаграммах одинарные внутренние линии обозначают квантовые поля φ, а двойные внешние линии – формы от классических полей A.

Линейно-независимые инварианты степени 4 имеют вид

$$I_1 = Sp\,\omega_\mu\omega_\mu\omega_\nu\omega_\nu\,, \quad I_2 = Sp\,\omega_\mu\omega_\nu\omega_\mu\omega_\nu\,. \qquad (I7)$$

Однако инвариант I_2 не получается непосредственно из однопетлевых диаграмм с вершинами, изображенными на рис. I. Поэтому перегруппируем инварианты I_1 и I_2, используя структурные уравнения (5)

$$J_1 = I_1 - I_2 = i\,Sp\,\omega_\mu G_{\mu\nu}\omega_\nu = -\frac{1}{2}Sp\,G_{\mu\nu}G_{\nu\mu}\,, \qquad (I8)$$
$$J_2 = I_1 + I_2 = Sp\left[\omega_\mu\omega_\mu\omega_\nu\omega_\nu + \omega_\mu\omega_\nu\omega_\mu\omega_\nu\right].$$

Заметим, что новые инварианты содержат такие структуры, которые непосредственно воспроизводятся из однопетлевых диаграмм и входят только в один из инвариантов. Будем называть такие структуры характерными. Они имеют вид

$$
\begin{aligned}
J_1 &\Rightarrow Sp\, \theta_\mu \theta_\nu \theta_\mu \theta_\nu , \\
J_2 &\Rightarrow Sp\, \omega_\mu \omega_\mu \omega_\nu \omega_\nu .
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Контрчлены теперь будем искать в виде

$$
\Delta \mathcal{L}_1 = b_1 J_1 + b_2 J_2 , \tag{20}
$$

где коэффициенты b_1 и b_2 определяются вкладами различных расходящихся диаграмм в характерные структуры (I9). Для этого достаточно рассмотреть две диаграммы

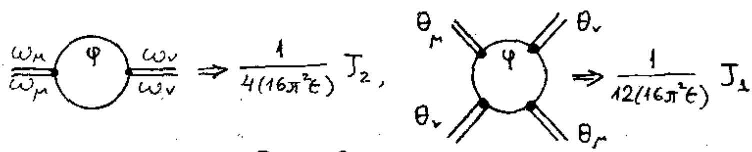

Рис. 2.

где $\epsilon = \frac{d-4}{2}$ – параметр размерной регуляризации, $d \to 4$ – размерность пространства. Подставляя $b_1 = \frac{1}{12(16\pi^2\epsilon)}$ и $b_2 = \frac{1}{4(16\pi^2\epsilon)}$ в (20) с учетом (I8), получим:

$$
\Delta \mathcal{L}_1 = \frac{1}{3(16\pi^2\epsilon)} \left[I_1 + \frac{1}{2} I_2 \right] . \tag{21}
$$

Сформулируем теперь общий алгоритм построения контрчленов в n-петлевом приближении.

Контрчлены строятся в виде

$$
\Delta \mathcal{L}_n = a_1 I_1 + \dots + a_N I_N , \tag{22}
$$

где $I_1, \ldots, I_N$ – полный набор линейно-независимых инвариантов (6), а $a_1, \ldots, a_N$ – функции регуляризирующего параметра, для определения которых необходимо :

I) Выписать производящий функционал n -петлевого приближения с учетом (8), (I4), (I5) и разложить низшие контрчлены с учетом (I4).

2) Выбрать набор линейно-независимых инвариантов группы необходимой степени по формам Картана, используя (6) и структурные уравнения (5).

3) Перегруппировать инварианты так, чтобы они непосредственно воспроизводились комбинациями коэффициентных функций из производящего лагранжиана.

4) В каждом из новых инвариантов выбрать характерную структуру и вычислить вклад в нее из расходящихся диаграмм n - петлевого приближения.

Продемонстрируем использование предложенного алгоритма для нахождения двухпетлевых контрчленов.

5. <u>Двухпетлевое приближение</u>

Производящий лагранжиан в двухпетлевом приближении имеет вид

$$\mathcal{L}^{(2)}_{int} = \frac{1}{2}\left\{ (\mathcal{D}_\mu \varphi)^i (\mathcal{D}_\mu \varphi)^i - \varphi \omega_\mu \omega_\mu \varphi \right\} + \tag{23}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{ -\frac{4}{3}\varphi(\mathcal{D}_\mu \varphi)\omega_\mu \varphi - \frac{1}{3}\varphi(\mathcal{D}_\mu \varphi)(\mathcal{D}_\mu \varphi)\varphi + \frac{1}{3}\varphi X^i \omega_\mu \varphi \varphi X^i \omega_\mu \varphi \right\}.$$

Выберем линейно-независимые инварианты следующим образом:

$$I_1 = Sp\, \omega_\mu \omega_\mu \omega_\nu \omega_\nu \omega_\rho \omega_\rho\,, \quad I_2 = Sp\, \omega_\mu \omega_\nu \omega_\mu \omega_\nu \omega_\rho \omega_\rho\,,$$

$$I_3 = Sp\, \omega_\mu \omega_\nu \omega_\nu \omega_\mu \omega_\rho \omega_\rho\,, \quad I_4 = Sp\, \omega_\mu \omega_\nu \omega_\rho \omega_\mu \omega_\nu \omega_\rho\,,$$

$$I_5 = Sp\, \omega_\mu \omega_\nu \omega_\rho \omega_\mu \omega_\rho \omega_\nu ,$$

$$I_6 = Sp\, D_\mu \omega_\mu D_\nu \omega_\nu \omega_\rho \omega_\rho \;;\; I_7 = Sp\, D_\mu \omega_\nu D_\mu \omega_\nu \omega_\rho \omega_\rho ,$$

$$I_8 = Sp\, D_\mu \omega_\mu D_\nu \omega_\rho \omega_\nu \omega_\rho ,\; I_9 = Sp\, D_\mu \omega_\nu D_\mu \omega_\rho \omega_\rho \omega_\nu , \tag{24}$$

$$I_{10} = Sp\, D_\mu \omega_\mu \omega_\rho D_\nu \omega_\nu \omega_\rho ,\; I_{11} = Sp\, D_\mu \omega_\mu \omega_\nu D_\nu \omega_\rho \omega_\rho .$$

Перегруппируем их с учетом структурных уравнений (5). Получим новую систему инвариантов

$$
\begin{aligned}
J_1 &= I_2 - I_3 = i\, Sp\, \omega_\mu \omega_\nu C_{\mu\nu} \omega_\rho \omega_\rho = -\tfrac{1}{2} Sp\, C_{\mu\nu} C_{\mu\nu} \omega_\rho \omega_\rho ,\\
J_2 &= I_2 + I_3 = Sp\, [\omega_\mu \omega_\nu \omega_\mu \omega_\nu \omega_\rho \omega_\rho + \omega_\mu \omega_\nu \omega_\nu \omega_\mu \omega_\rho \omega_\rho],\\
J_3 &= -I_1 + 3I_2 + I_4 - 3I_5 = -i\, Sp\, C_{\mu\nu} C_{\rho\mu} C_{\nu\rho} ,\\
J_4 &= I_1 - I_2 + I_4 - I_5 = -Sp\, [C_{\mu\nu} C_{\rho\mu} \omega_\nu \omega_\rho + C_{\mu\nu} C_{\rho\mu} \omega_\rho \omega_\nu],\\
J_5 &= -I_1 - I_2 + I_4 - I_5 = i\, Sp\, [\omega_\mu \omega_\nu C_{\rho\mu} \omega_\nu \omega_\rho + \omega_\nu \omega_\mu C_{\rho\mu} \omega_\nu \omega_\rho +\\
&\qquad + \omega_\mu \omega_\nu C_{\rho\mu} \omega_\rho \omega_\nu + \omega_\nu \omega_\mu C_{\rho\mu} \omega_\rho \omega_\nu],
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$J_6 = I_6 ,\; J_7 = I_7 ,\; J_8 = I_8 ,\; J_9 = I_9 ,\; J_{10} = I_{10} ,\; J_{11} = I_{11} .$$

Выберем в инвариантах J_i **характерные структуры**

$$
\begin{aligned}
J_1 &\Rightarrow Sp\, \partial_\mu \theta_\nu \partial_\mu \theta_\nu \omega_\rho \omega_\rho , & J_6 &\Rightarrow Sp\, \partial_\mu \omega_\mu \partial_\nu \omega_\nu \omega_\rho \omega_\rho ,\\
J_2 &\Rightarrow Sp\, \omega_\mu \omega_\nu \omega_\mu \omega_\nu \omega_\rho \omega_\rho , & J_7 &\Rightarrow Sp\, \partial_\mu \omega_\nu \partial_\mu \omega_\nu \omega_\rho \omega_\rho ,\\
J_3 &\Rightarrow Sp\, \theta_\mu \theta_\nu \theta_\rho \theta_\mu \theta_\nu \theta_\rho , & J_8 &\Rightarrow Sp\, \partial_\mu \omega_\mu \partial_\nu \omega_\rho \omega_\nu \omega_\rho ,\\
J_4 &\Rightarrow Sp\, \partial_\mu \theta_\nu \partial_\rho \theta_\mu \omega_\nu \omega_\rho , & J_9 &\Rightarrow Sp\, \partial_\mu \omega_\nu \partial_\mu \omega_\rho \omega_\rho \omega_\nu ,\\
J_5 &\Rightarrow Sp\, \omega_\mu \omega_\nu \partial_\rho \theta_\mu \omega_\nu \omega_\rho , & J_{10} &\Rightarrow Sp\, \partial_\mu \omega_\mu \omega_\rho \partial_\nu \omega_\nu \omega_\rho ,\\
& & J_{11} &\Rightarrow Sp\, \partial_\mu \omega_\mu \omega_\nu \partial_\nu \omega_\rho \omega_\rho .
\end{aligned} \tag{26}
$$

Вклад в эти структуры дают следующие диаграммы:

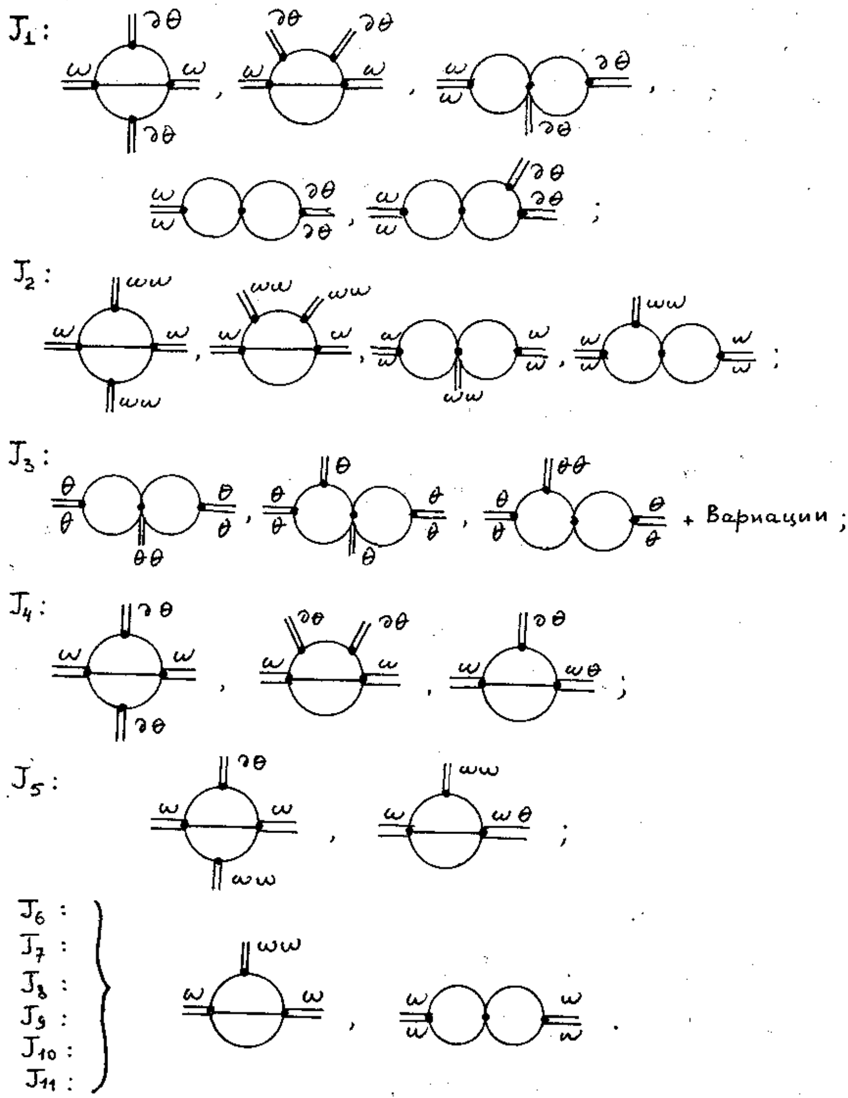

Рис. 3

Для вычисления сингулярных частей интегралов, соответствующих диаграммам, приведенным на рис. 3, и вычитания сингулярностей в подграфах, мы использовали схему перенормировки, предложенную 'т Хоофтом /I8/. Преобразования полученных выражений с учетом групповой алгебры производились согласно формулам Приложения 2. В результате имеем следующее выражение для контрчленов двухпетлевого приближения:

$$\Delta \mathcal{L}_2 = \sum_{i=1}^{11} \frac{2C_2}{9(16\pi^2\epsilon)^2} b_i I_i ,$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{1}{48}\left(1 + 582\cdot\frac{5}{N+2}\right) + \frac{\epsilon}{96\cdot 3}\left(71 - 458\cdot\frac{5}{N+2}\right),\\
b_2 &= \frac{1}{24}\left(11 + 1056\cdot\frac{5}{N+2}\right) - \frac{\epsilon}{96\cdot 6}\left(211 + 3008\cdot\frac{5}{N+2}\right),\\
b_3 &= -\frac{1}{16}\left(7 - 50\cdot\frac{5}{N+2}\right) + \frac{\epsilon}{96\cdot 2}\left(23 - 676\cdot\frac{5}{N+2}\right),\\
b_4 &= -\frac{1}{48}\left(1 - 570\cdot\frac{5}{N+2}\right) + \frac{\epsilon}{96\cdot 3}\left(71 + 358\cdot\frac{5}{N+2}\right),\\
b_5 &= \frac{1}{48}\left(1 - 1818\cdot\frac{5}{N+2}\right) - \frac{\epsilon}{96\cdot 3}\left(71 - 458\cdot\frac{5}{N+2}\right),\\
b_6 &= -\frac{1}{12}\left(1 + \frac{5}{N+2}\right) + \frac{\epsilon}{18}\left(5 - \frac{7}{4}\cdot\frac{5}{N+2}\right),\\
b_7 &= \frac{3}{16} - \frac{\epsilon}{32}\left(1 + 8\cdot\frac{5}{N+2}\right),\\
b_8 &= \frac{11}{27}\cdot\frac{5}{N+2}\epsilon ,\\
b_9 &= -\frac{1}{16} + \frac{\epsilon}{16\cdot 9}\left(13 - 46\cdot\frac{5}{N+2}\right),\\
b_{10} &= \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{N+2} + \frac{7}{72}\cdot\frac{5}{N+2}\epsilon ,\\
b_{11} &= -\frac{1}{16} + \frac{\epsilon}{16\cdot 54}\left(175 - 176\cdot\frac{5}{N+2}\right).
\end{aligned} \tag{27}$$

где C_2 -оператор Казимира, N - число параметров группы (см. Приложение 2).

Подчеркнем еще раз, что инварианты (24) не содержат произведения шпуров. Это отражает так называемое свойство алгебраической дуальности /I7/. Такие произведения, даже если они появляются, не должны, по нашему мнению, давать вклад в инварианты. В противном случае они должны быть включены в исходный набор инвариантов (6) и (24). Это не приводит к каким-либо принципиальным изменениям в предложенной схеме, а лишь усложняет ее технически.

6. Заключение

В настоящей работе предложен инвариантный подход к проблеме ультрафиолетовых расходимостей, позволяющий наиболее полно учесть свойства симметрии при построении контрчленов в теории поля, являющейся нелинейной реализацией произвольной полупростой группы Ли, со спонтанно нарушенной симметрией вакуума. Сформулируем преимущества предложенного формализма.

I) Контрчлены явным образом инвариантны без учета уравнений движения. Это позволяет исследовать структуру расходимостей в S-матрице и функциях Грина вне массовой поверхности.

2) Контрчлены строятся из небольшого числа заранее известных инвариантов группы.

3) Процедура определения коэффициентов при инвариантах позволяет вычислять наименьшее возможное число диаграмм.

4) Все расчеты производятся непосредственно в ковариантных терминах форм Картана, без разложения по полям.

При рассмотрении нелинейных реализаций динамических симметрий естественно возникает вопрос об их неперенормируемости. Рост степени инвариантов по формам Картана с числом петель, по-видимому, говорит о том, что чисто симметрийные соображения не приводят к замкнутости лагранжиана и тем самым перенормируемости его в обычном смысле. Представляет, однако, интерес такая ситуация, когда коэффициенты при высших инвариантах не произвольны, а определяются коэффициентами при низших. Физически это означало бы динамическое восстановление более широкой группы симметрии, чем исходная, в качестве носителя которой выступало бы связанное состояние первоначальных полей. Такое явление имеет место в двумерных моделях/2/. Попытки распространить его на 4-х мерные модели связывают с механизмом удержания кварков/3/. В случае нелинейной реализации киральной $SU(2)\times SU(2)$ группы было показано/8/, что однопетлевые контрчлены нельзя интерпретировать как динамическое возникновение изоскалярного σ-поля. Однако, при рассмотрении более сложного варианта σ-модели, включающего, например, изотензорные σ-поля, однопетлевое приближение допускает такую интерпретацию. Вопрос о справедливости ее в двухпетлевом и высших приближениях в настоящее время исследуется.

Отметим в заключение, что предложенный формализм применим также для теорий с алгеброй, отличной от (3), например, в квантовой гравитации/I6,I9/.

В заключение авторы выражают признательность Д.В.Ширкову и Д.И.Блохинцеву за поддержку и постоянный интерес к работе, А.А.Славнову и Е.А.Иванову - за плодотворные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Фундаментальные уравнения Картана

Получим формы Картана в экспоненциальной параметризации для конечных преобразований группы [15]

$$G(A) = e^{iX_a A^a}.$$

Такая параметризация соответствует нормальным координатам в пространстве голдстоуновских частей. Имеем

$$e^{-iX_a A^a} \partial_\mu e^{iX_a A^a} = i\,[\,\omega_\mu^i(A) X_i + \theta_\mu^\alpha(A) Y_\alpha\,],$$

Введем параметр t заменой $A \to At$, получим

$$e^{-iX_a A^a t} \partial_\mu e^{iX_a A^a t} = i\,[\,\omega_\mu^i(At) X_i + \theta_\mu^\alpha(At) Y_\alpha\,].$$

Дифференцируя по t левую и правую части, получим фундаментальные уравнения Картана

$$\frac{\partial \omega_\mu^i}{\partial t} = \partial_\mu A^i + A^k \theta_\mu^\beta B^i_{k\beta},$$

$$\frac{\partial \theta_\mu^i}{\partial t} = A^j \omega_\mu^\ell C^i_{j\ell}$$

и нулевые граничные условия

$$\omega_\mu(0) = 0, \quad \theta_\mu(0) = 0.$$

Решение фундаментальных уравнений Картана в общем случае может быть записано в виде ряда

$$\omega_\mu^i(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mathfrak{M}_A^n)^i_\ell \frac{\partial_\mu A^\ell}{(2n+1)!},$$

$$\theta_\mu^\beta(A) = A^j C^\beta_{jk} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\mathfrak{M}_A^n)^k_\ell \frac{\partial_\mu A^\ell}{(2n+2)!},$$

где

$$(\mathcal{M}^0_A)^i_\ell = \delta_{i\ell}\ ; \quad (\mathcal{M}_A)^i_\ell = -B^i_{k\beta}A^k C^\beta_{j\ell}A^j,$$

$$(\mathcal{M}^2_A)^i_\ell = (\mathcal{M}_A)^i_k(\mathcal{M}_A)^k_\ell\ ; \qquad B^i_{k\beta},\ C^\beta_{j\ell}\ -$$

структурные постоянные группы.

В системе координат (I2) формы Картана $\bar{\omega}_\mu(A,\varphi)$ и $\bar{\Theta}_\mu(A,\varphi)$ можно получить анологичным образом, изменяя лишь граничные условия

$$\bar{\omega}_\mu(A,0) = \omega_\mu(A), \quad \bar{\Theta}_\mu(A,0) = \Theta_\mu(A).$$

Результат имеет вид (I4).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Некоторые полезные формулы

Для генераторов группы G, взятых в присоединенном представлении ${}_a(X^b)_c = i f^{abc}$; $a,b,c = 1,2,\ldots,N$, f^{abc} - структурная постоянная группы, имеют место следующие формулы:

$$f^{abc}f^{abd} = C_2\,\delta^{cd}, \qquad C_2 \text{ - квадратичный оператор Казимира,}$$

$$X^aX^a = C_2 I,$$

$$\mathrm{Sp}\,X^a = 0,$$

$$\mathrm{Sp}\,X^aX^b = C_2\,\delta^{ab},$$

$$\mathrm{Sp}\,X^aX^bX^c = i\frac{C_2}{2}f^{abc},$$

$$\mathrm{Sp}\,X^aX^bX^cX^d = \frac{5C_2^2}{6(N+2)}\left(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}\right) - \frac{C_2}{6}\left(f^{ab\cdot}f^{cd\cdot} + f^{da\cdot}f^{bc\cdot}\right),$$

$$
Sp\, X^a X^b X^c X^d X^e = i\,\frac{5C_2^2}{12(N+2)}\Big[\delta^{ab} f^{cde} + \delta^{ac} f^{bde} + \delta^{ad} f^{bce} + \delta^{ae} f^{bcd} + \delta^{bc} f^{ade} +
$$

$$
+ \delta^{bd} f^{ace} + \delta^{be} f^{acd} + \delta^{cd} f^{abe} + \delta^{ce} f^{abd} + \delta^{de} f^{abc}\Big] +
$$

$$
+ \frac{iC_2}{20}\Big[f^{bc\cdot} f^{\cdot a \cdot} f^{\cdot de} + f^{ae\cdot} f^{\cdot b\cdot} f^{\cdot cd} + f^{ab\cdot} f^{\cdot c\cdot} f^{\cdot ed} + f^{ae\cdot} f^{\cdot d\cdot} f^{\cdot cb} + f^{ab\cdot} f^{\cdot e\cdot} f^{\cdot cd}\Big] +
$$

$$
+ \frac{iC_2}{60}\Big[f^{bd\cdot} f^{\cdot a\cdot} f^{\cdot ce} + f^{ad\cdot} f^{\cdot b\cdot} f^{\cdot ce} + f^{ad\cdot} f^{\cdot c\cdot} f^{\cdot be} + f^{ac\cdot} f^{\cdot d\cdot} f^{\cdot be} + f^{ac\cdot} f^{\cdot e\cdot} f^{\cdot bd}\Big],
$$

$$
\begin{aligned}
Sp\, X^k \underbrace{X^a X^b} X^k \underbrace{X^c X^d} = {} & Sp\, X^a X^b X^c X^d \cdot \frac{C_2}{3} + \\
& Sp\, X^b X^a X^c X^d \cdot \frac{C_2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + \\
& Sp\, [X^a, X^c]\, X^d X^b \cdot \frac{C_2}{3}\left(\frac{5}{N+2}\right) + \\
& Sp\, [X^b, X^c]\, X^d X^a \cdot \frac{C_2}{3}\left(\frac{5}{N+2}\right) + \\
& + Sp\, X^a X^b\, Sp\, X^c X^d \cdot \frac{C_2}{6}\left(\frac{5}{N+2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Sp\, X^k \underbrace{X^a X^b X^c} X^k \underbrace{X^d X^e} = {} & Sp\, X^a X^b X^c X^d X^e \cdot \frac{C_2}{3} + \\
& Sp\, X^a X^b X^c X^e X^d \cdot \frac{C_2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + \\
& Sp\, [X^d, X^a]\, X^b [X^c, X^e] \cdot \frac{C_2}{3}\left(\frac{5}{N+2}\right) + \\
& Sp\, [X^e, X^a]\, X^b [X^c, X^d] \cdot \frac{C_2}{3}\left(\frac{5}{N+2}\right) + \\
& Sp\, X^a X^b X^c\, Sp\, X^d X^e \cdot \frac{C_2}{6}\left(\frac{5}{N+2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Sp\, X^k \underbrace{X^a X^b X^c X^d} X^k \underbrace{X^e X^f} = {} & Sp\, X^a X^b X^c X^d X^e X^f \cdot \frac{C_2}{3} + \\
& Sp\, X^a X^b X^c X^d X^f X^e \cdot \frac{C_2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + \\
& Sp\, [X^e, X^a]\, X^b [X^c, [X^d, X^f]] \cdot \frac{C_2}{3}\left(\frac{5}{N+2}\right) + \\
& Sp\, [X^f, X^a]\, X^b [X^c, [X^d, X^e]] \cdot \frac{C_2}{3}\left(\frac{5}{N+2}\right) + \\
& Sp\, X^a X^b X^c X^d\, Sp\, X^e X^f \cdot \frac{C_2}{6}\left(\frac{5}{N+2}\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Sp\, X^k \underbrace{X^a X^b X^c} X^k \underbrace{X^d X^e X^f} = {} & Sp\, X^a X^b X^c X^d X^e X^f \cdot \frac{C_2}{3} + \\
& Sp\, X^c X^b X^a X^d X^e X^f \cdot \frac{C_2}{3}\left(\frac{1}{2}\right) + \\
& \left.\begin{aligned}
& Sp\, [X^a, X^c]\, X^d [X^e, [X^f, X^b]] + \\
& Sp\, [X^b, X^c]\, X^d [X^e, [X^f, X^a]] + \\
& Sp\, [X^a, X^b]\, X^d [X^e, [X^f, X^c]] + \\
+ Sp\, [X^c, X^d]\, X^e [X^f, [X^a, X^b]] + {} & Sp\, [X^b, X^d]\, X^e [X^f, [X^a, X^c]] + \\
& Sp\, [X^a, X^d]\, X^e [X^f, [X^b, X^c]] +
\end{aligned}\right\}\ \frac{C_2}{6}\cdot\frac{5}{N+2} \\
& + Sp\, X^a X^b X^c\, Sp\, X^d X^e X^f .
\end{aligned}
$$

Литература

1. А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев. ТМФ 8, 297 (I97I).
2. W.Bardeen, B.Lee, H.Shrock. Phys.Rev., D14, 985 (1976).
3. W.Bardeen, R.Pearson. ibid. D14, 547 (1976).
4. B.S.De Witt. Phys.Rev., 162, 1195, 1239 (1967).
5. J.Honerkamp. Nucl.Phys., B48, 269 (1972).
6. G.'t Hooft Nucl.Phys., B62, 444 (1973).
7. И.Я.Арефьева, А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев. ТМФ 2I, 3II (I974).
8. S.Tamura. Lettere Nuovo Cim., 12, 266 (1975).
9. M.T.Grisaru, P. van Niewenhuizen, C.C.Wu. Phys.Rev., D12, 3203 (1975).
10. E.Cartan. Journal Math.Pures et Appl., 9, v. 6, 1 (1927). Э,Картан. Геометрия римановых пространств, ОНТИ (I936).
11. S.Coleman, G.Wess, B.Zumino. Phys.Rev., 177, 2239 (1969).
12. Д.В.Волков. ЭЧАЯ, 4, 3 (I973).
13. Д.И.Казаков, В.Н.Первушин, С.В.Пушкин ТМФ 3I, I69 (I977).
14. J.Honerkamp, Nucl.Phys., B36, 130 (1972). G.Echer and J.Honerkamp ibid B52, 211 (1973).
15. В.Н.Первушин ТМФ 22, 20I (I975).
16. В.Н.Первушин ТМФ 27, I6 (I976).
17. Д.В.Волков, В.Д.Гершун, А.А.Желтухин, А.И.Пашнев ТМФ, I5, 245 (I973).
18. G. 't Hooft, Nucl.Phys., B61, 455 (1973).
19. А.Б.Борисов, В.И.Огиевецкий. ТМФ, 2I, 329 (I974).

Рукопись поступила в издательский отдел
I0 июня I977 года.