ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 10676

И.П.Волобуев, Р.М.Мир-Касимов

КОМПЛЕКСНЫЕ КВАТЕРНИОНЫ И СПИНОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ДЕ СИТТЕРА SO(4,1) И SO(3,2)

1977

P2 - 10676

И.П.Волобуев, Р.М.Мир-Касимов

КОМПЛЕКСНЫЕ КВАТЕРНИОНЫ И СПИНОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ДЕ СИТТЕРА SO(4,1) И SO(3,2)

Направлено в "Acta Physica Polonica"

Волобуев И.П., Мир-Касимов Р.М. P2 - 10676

Комплексные кватернионы и спинорные представления групп де Ситтера $SO(4,1)$ и $SO(3,2)$

Найдена гиперкомплексная реализация накрывающих для групп де Ситтера $SO(4,1)$ и $SO(3,2)$. Эта реализация применяется для описания групп орисферических сдвигов пространств постоянной кривизны и построения спинорных представлений групп де Ситтера.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Volobujev I.P., Mir-Kasimov R.M. P2 - 10676

Complex Quaternions and Spinor Representations of de Sitter Groups $SO(4,1)$ and $SO(3,2)$

A hypercomplex number realization of the universal covering groups for the de Sitter groups $SO(4,1)$ and $SO(3,2)$ is found. This realization is used for the description of the horospherical schifts of the spaces of constant curvature and the construction of the spinor representations of the de Sitter groups.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

"Достоинство кватернионов пока состоит не столько в решении трудных задач, сколько в том, что они дают нам возможность видеть смысл задачи и ее решения".

Д.К. Максвелл

§1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория поля с импульсным пространством постоянной кривизны получила свое развитие в работах /1-7/. Схема, построенная здесь, основана на аксиоматическом подходе Боголюбова /8-10/.

Было показано, что можно отказаться от обычно используемого плоского импульсного пространства вне массовой поверхности и заменить его на p-пространство постоянной кривизны. Квантовая теория поля, основанная на этом предположении, непротиворечива и является альтернативой обычной теории.

Рассматривались оба возможных варианта p-пространства постоянной кривизны /пространства де Ситтера/ с метриками

$$g_{KL}p^L p^K = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 = -1, \qquad /1.1/$$

$$\hat{g}_{KL}p^L p^K = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_4^2 = 1 \qquad /1.2/$$

и с группами движений $SO(4,1)$ и $SO(3,2)$ соответственно.

Использование свойств представлений групп движений играет ключевую роль во всей схеме. Анализ Фурье, опирающийся на основную серию унитарных неприводимых представлений групп де Ситтера, позволил ввести адекватное конфигурационное представление. Условие причинности в новом конфигурационном пространстве является прямым обобщением условия причинности Боголюбова.

Важное место в квантовой теории поля с искривленным p-пространством принадлежит кривым сдвигам/1,3/ и орисферическим сдвигам/2/. В данной работе будет развита удобная техника для описания этих преобразований при помощи гиперкомплексной реализации накрывающих групп SO(4,1) и SO(3,2)*. Эта реализация послужит также основой для нахождения спинорных /конечномерных, неунитарных/ представлений групп де Ситтера/11/. Спинорные представления необходимы для построения уравнений движения и конфигурационного представления для частиц с ненулевым спином.

Гиперкомплексными реализациями мы называем группы матриц второго порядка, элементы которых принадлежат алгебре {K} гиперкомплексных чисел /кватернионов/ над полем комплексных чисел {Z}. Использование в качестве скаляров комплексных чисел существенно: именно в этом случае возможно рассмотрение на общей основе всех вещественных ветвей комплексной ортогональной группы. Эти ветви переходят одна в другую при аналитическом продолжении по компонентам 5-импульса. Иными словами, мы получаем аппарат, позволяющий рассматривать единым образом SO(4,1) и SO(3,2) -варианты квантовой теории поля и аналоги их евклидовых формулировок. Алгебра {K} содержит делители нуля. Этот факт непосредственно связан с наличием изотропных векторов в подпространствах, отвечающих редукции на псевдоортогональные группы низшей размерности. Классические вещественные кватернионы возникают при построении универсальной накрывающей группы для SO(4,1)/12/ /положительно определенная квадратичная форма $p_4^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2$, отвечающая редукции $SO(4,1) \supset O(4)$ совпадает с нормой гамильтонова кватерниона/. Универсальная накрывающая SL(2,C)/13,14/ группы Лоренца получается при сужении на подалгебру комплексных чисел $\subset${K} /см. ф-лу /2.12d //.

*Гиперкомплексная реализация преобразований группы SO(3,2) применительно к теории поля с искривленным p-пространством рассматривалась в/7/.

Отметим, что кватернионы многократно рассматривались как числовая система для квантовой механики/15/. В работах/16/ кватернионы использовались для анализа представлений группы Лоренца и построения волновых уравнений в пространствах постоянной кривизны.

§2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим алгебру {K} гиперкомплексных чисел a вида

$$a = a_0 + a_i\sigma_i \quad (i = 1,2,3), \qquad /2.1/$$

где $\{\sigma_i\}$ - система трех "мнимых единиц" с таблицей умножения

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k . \qquad /2.2/$$

Система $\{\sigma_i\}$ может быть реализована с помощью двухрядных матриц Паули. Последний факт будет нами использован при построении спинорных представлений.

Умножение кватерниона на комплексное число $z \in \{Z\}$, сложение и вычитание определим следующим образом:

$$za = za_0 + za_i\sigma_i , \qquad /2.3a/$$

$$a + b = (a_0 + b_0) + (a_i + b_i)\sigma_i , \qquad /2.3б/$$

$$a - b = (a_0 - b_0) + (a_i - b_i)\sigma_i = a + (-b). \qquad /2.3в/$$

Произведение кватернионов вновь является кватернионом. Операция сопряжения задается формулой

$$a \to \bar{a} = a_0 - a_i \sigma_i \,. \qquad /2.4/$$

Для любых a и b

$$\overline{ab} = \bar{b}\bar{a} \,. \qquad /2.5/$$

Норма кватерниона $||a||$ определяется соотношением

$$||a|| = a\bar{a} = \bar{a}a \,. \qquad /2.6/$$

Очевидно, что норма является комплексным числом; она может быть, в частности, отрицательной или равной нулю. В случае, когда $||a|| \neq 0$, существует обратный по отношению к a элемент алгебры $\{K\}$:

$$a^{-1} = \frac{\bar{a}}{||a||} \,, \qquad /2.7а/$$

$$a a^{-1} = a^{-1} a = 1 \,. \qquad /2.7б/$$

Элементы алгебры $\{K\}$, обладающие нулевой нормой, назовем сингулярными, или делителями нуля. Для сингулярных элементов не определен обратный a^{-1}.

Определим операцию эрмитова сопряжения кватернионов /звездочка обозначает обычное комплексное сопряжение/

$$a^+ = a_0^* + a_i^* \sigma_i \,, \qquad /2.8а/$$

$$(ab)^+ = b^+ a^+ \,, \qquad /2.8б/$$

а также операцию комплексного сопряжения кватернионов

$$\hat{a} = a^* - a^* \sigma \,, \qquad /2.9а/$$

$$\widehat{(ab)} = \hat{a}\hat{b} \,. \qquad /2.9б/$$

Последовательное применение любых двух операций $-$, $+$ или $\hat{}$ равносильно применению третьей. Например,

$$(\bar{a})^+ = \hat{a} \,. \qquad /2.10/$$

Кроме того, нам понадобится операция частичного сопряжения

$$\tilde{a} = \sigma_3 \bar{a} \sigma_3 = a_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 - a_3\sigma_3 \,, \qquad /2.11а/$$

$$\widetilde{(ab)} = \tilde{b}\tilde{a} \,. \qquad /2.11б/$$

Алгебра комплексных кватернионов /2.1/ содержит три замкнутых подалгебры. Запишем

$$a = (a_{01} + i a_{02}) + (a_{i1} + i a_{i2})\sigma_i \,, \qquad a_\mu \in \{Z\}, \qquad /2.12а/$$

$$b = b_0 + b_k\, i\sigma_k \,, \qquad b_\mu \in \{R\}, \qquad /2.12б/$$

$$c = c_0 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\, i\sigma_3 \,, \qquad c_\mu \in \{R\}, \qquad /2.12в/$$

$$d = d_0 + d_1\, i\sigma_3 \,, \qquad d_{0,1} \in \{R\}, \qquad /2.12г/$$

где $\{R\}$ - поле действительных чисел. Система /2.12г/ изоморфна обычным комплексным числам. Система /2.12б/ совпадает с классическими /вещественными/ кватернионами /17/. Три мнимые единицы i, j, k, образующие стандартный базис классических кватернионов, связаны с σ_i формулами

$$i = -i\sigma_1 \,, \quad j = -i\sigma_2 \,, \quad k = -i\sigma_3 \,. \qquad /2.13/$$

В отличие от систем /2.12г/ и /2.12б/ система /2.12в/ содержит делители нуля. Ниже мы увидим, что ветви /2.12б/ и /2.12в/ естественно возникают при анализе универсальных накрывающих групп SO(4,1) и SO(3,2).

Рассмотрим теперь матрицы второго порядка

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,, \qquad /2.14/$$

где a, b, c, d - кватернионы вида /2.1/. Обозначим через u^+ "эрмитово сопряженную" матрицу

$$u = \begin{pmatrix} \bar a & \bar c \\ \bar b & \bar d \end{pmatrix}. \qquad /2.15/$$

Для эрмитовых матриц ($u^+ = u$) однозначно определен детерминант

$$\det u = ad - bc\ , \qquad /2.16/$$

т.к. в этом случае $ad = da$, $bc = cb$.

§3. *ГИПЕРКОМПЛЕКСНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ УНИВЕРСАЛЬНОЙ НАКРЫВАЮЩЕЙ ГРУППЫ* SO(4,1)

Введем эрмитовы матрицы второго порядка

$$\tau^\circ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \tau^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix},\quad \tau^4 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (k = 1,2,3). \qquad /3.1/$$

Поставим в соответствие 5-вектору p_L матрицу

$$p = p_L \tau^L = \begin{pmatrix} -ip_4 & \bar p \\ p & ip_4 \end{pmatrix}. \qquad /3.2/$$

Очевидно, что

$$p^+ = p\ , \qquad /3.3а/$$

$$\det p = -g_{KL} p^K p^L . \qquad /3.3б/$$

Пусть u - унитарные кватернионные матрицы ($u^+ = u^{-1}$) вида /2.14/.

Из условий

$$u u^+ = 1\ , \qquad /3.4а/$$

$$u^+ u = 1 \qquad /3.4б/$$

получаем две /эквивалентные/ системы ограничений на элементы матрицы u:

$$\left.\begin{aligned} a\bar a + b\bar b = c\bar c + d\bar d = 1\ , \\ a\bar c + b\bar d = 0 \end{aligned}\right\} \qquad /3.5а/$$

и

$$\left.\begin{aligned} \bar a a + \bar c c = \bar b b + \bar d d = 1\ , \\ \bar a b + \bar c d = 0. \end{aligned}\right\} \qquad /3.5б/$$

Наложим также условия

$$a^+ = \bar d\ ,\quad b^+ = \bar c\ . \qquad /3.6/$$

Легко видеть, что совокупность матриц u, удовлетворяющих условиям /3.4/, /3.6/, образует группу U, зависящую от 1O вещественных параметров. Преобразование

$$p' = u p u^+ \qquad /3.7/$$

сохраняет квадратичную форму /3.3б/. Очевидно, что паре матриц u и $-u$ отвечает одно и то же преобразование 5-вектора p_L. Таким образом, матричная группа U есть универсальная накрывающая по отношению к SO(4,1). Определим также группу матриц V, связанную с U преобразованием подобия:

$$V = SUS^{-1}\ , \qquad /3.8/$$

где

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}. \qquad /3.9/$$

Если матрица

$$v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad /3.1O/$$

связана с u преобразованием /3.8/, то имеем следующие соотношения между элементами матриц v и u:

$$\alpha = \frac{1}{2}(a - ib + ic + d), \quad \beta = \frac{1}{2}(-ia + b + c + id),$$

/3.11/

$$\gamma = \frac{1}{2}(ia + b + c - id), \quad \delta = \frac{1}{2}(a + ib - ic + d).$$

Матрица v^{-1} имеет вид

$$v^{-1} = S^2 v^+ S^{-2} = \begin{pmatrix} \bar\delta & \bar\beta \\ \bar\gamma & \bar\alpha \end{pmatrix}. \qquad /3.12/$$

Элементы α, β, γ, δ подчинены условиям

$$\alpha\bar\delta + \beta\bar\gamma = 1; \ \alpha\bar\beta + \beta\bar\alpha = \gamma\bar\delta + \delta\bar\gamma = 0, \qquad /3.13а/$$

или, эквивалентно,

$$\bar\delta\alpha + \bar\beta\gamma = 1; \ \bar\gamma\alpha + \bar\alpha\gamma = \bar\delta\beta + \bar\beta\delta = 0. \qquad /3.13б/$$

Кроме того, из /3.6/ и /3.11/ следует

$$\alpha^+ = \bar\alpha, \ \beta^+ = \bar\beta, \ \gamma^+ = \bar\gamma, \delta^+ = \bar\delta. \qquad /3.14/$$

Введем матрицу $\not p$ по формуле

$$\not p = p_L \pi^L = \begin{pmatrix} p_0 - p_4 & ip_k\sigma_k \\ -ip_k\sigma_k & p_0 + p_4 \end{pmatrix}, \qquad /3.15/$$

$$\det\not p = -g_{KL} p^K p^L, \qquad /3.16/$$

где в качестве базиса взят следующий набор эрмитовых матриц:

$$\pi^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^k = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_k \\ -i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\pi^L = S\tau^L\tau^0 S^{-1}. \qquad /3.17/$$

Преобразование

$$\not p' = v\not p v^+ \qquad /3.18/$$

также сохраняет квадратичную форму /3.16/. Исходя из /3.13/ и /3.14/, легко доказать следующую лемму: всякий элемент $v \in V$, удовлетворяющий условию $||\alpha|| \neq 0$, можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad /3.19/$$

где

$$z = iz_k\sigma_k, \quad \mu = i\mu_k\sigma_k,$$

$$\xi = \xi_0 + i\xi_k\sigma_k, \ ||\xi|| = \xi_0^2 + \xi_k^2 = 1, \qquad /3.2O/$$

$$t, z_k, \mu_k, \xi_0, \xi_k \in \{R\}.$$

Из /3.19/ получаем естественную параметризацию для элементов матрицы v /при $||\alpha|| \neq 0$ /.

$$\alpha = e^{t/2}\xi, \qquad \beta = e^{t/2}\xi\mu,$$

/3.21/

$$\gamma = e^{t/2} z\xi, \qquad \delta = e^{t/2} z\xi\mu + e^{-t/2}\xi.$$

Соотношения /3.2O/ обусловливают принадлежность элементов матриц $v \in V$ к подалгебре /2.12б/, т.е. к алгебре классических кватернионов.

Кроме того, важно, что, благодаря факторизации /3.19/, мы получили различные подгруппы группы V. Рассмотрим подгруппу $\Omega \subset V$, состоящую из матриц вида

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ iz_k\sigma_k e^{t/2} & e^{-t/2} \end{pmatrix}. \qquad /3.22/$$

Назовем орисферой пространства де Ситтера /1.1/ совокупность точек, получающихся из данной фиксированной точки p гиперболоида /1.1/ под действием преобразований

$$v_\omega = v^{-1}\omega v, \qquad /3.23/$$

где ω пробегает всю подгруппу Ω /ср. с [14]/. Мы видим, что орисфера задается точкой пространства де Ситтера и элементом v группы де Ситтера.

Четырехпараметрическая подгруппа $\Omega \subset V$ преобразований, переводящих орисферу в себя, имеет важные физические применения [2, 5] /см. также [18]/. Полагая, что 5-вектор принадлежит гиперболоиду /1.1/ и имеет вид $p = (0,0,0,0,1)$, а $v = \omega$, получим из /3.7/ соотношение, отображающее совокупность параметров группы Ω на гиперболоид /1.1/.

$$\not{p} = \omega \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \omega^+ . \qquad /3.24/$$

Приравнивая соответственные элементы матриц в /3.24/, придем к орисферической системе координат на гиперболоиде /1.1/ /ср. [2]/:

$$\begin{aligned} p_4 - p_0 &= e^t , \\ p_4 + p_0 &= e^{-t} - e^t z_k^2 , \qquad /3.25/ \\ p_k &= e^t z_k . \end{aligned}$$

Группа преобразований Ω индуцирует некоторую групповую операцию на гиперболоиде /1.1/ - группу

орисферических сдвигов. В применении к 5-векторам будем обозначать эту операцию символом $\oplus$:

$$p' = p \oplus q . \qquad /3.26/$$

Это равенство эквивалентно соотношениям

$$\begin{aligned} t' &= t + s , \\ z_k' &= e^{-s} z_k + w_k , \end{aligned} \qquad /3.27/$$

где (t, z_k), (t', z_k') и (s, w_k) - орисферические координаты 5-векторов p, p' и q соответственно.

§4. ГИПЕРКОМПЛЕКСНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НАКРЫВАЮЩЕЙ ГРУППЫ SO(3,2)

Заметим вначале, что замена $p_4 \to ip_4$ переводит квадратичную форму /1.1/ в /1.2/. Эта замена может быть использована для получения и других формул в рамках анализа накрывающей группы SO(3,2), аналогичного проведенному в §3 для SO(4,1). Например, заменяя в /3.2/ $p_4 \to ip_4$, получим

$$p = \begin{pmatrix} p_4 & \bar{p} \\ p & -p_4 \end{pmatrix} = p_L \tau^L , \qquad /4.1/$$

$$\det p = -\hat{g}_{KL} p^K p^L , \qquad /4.2/$$

где эрмитовы матрицы τ^L имеют вид:

$$\tau^\circ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \tau^k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \ \tau^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \qquad /4.3/$$

Накрывающую U для SO(3,2) образуют теперь унитарные матрицы u, удовлетворяющие условиям /3.5/ и соотношениям *:

$$a^{+} = \bar{d}\,,$$
$$b^{+} = -\bar{c}. \qquad /4.4/$$

Переход к группе V совершается при помощи преобразования

$$v = TuT^{-1}\,, \qquad /4.5/$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\sigma_3 \\ \sigma_3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad /4.6/$$

Элементы матриц u и v связаны соотношениями

$$\alpha = \frac{1}{2}(a - b\sigma_3 - \sigma_3 c + \sigma_3 d\sigma_3),\ \beta = \frac{1}{2}(a\sigma_3 + b - \sigma_3 c\sigma_3 - \sigma_3 d),$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\sigma_3 a - \sigma_3 b\sigma_3 + c - d\sigma_3),\ \delta = \frac{1}{2}(\sigma_3 a\sigma_3 + \sigma_3 b + c\sigma_3 + d). \qquad /4.7/$$

Матрица v^{-1} имеет вид

$$v^{-1} = T^{2}v^{+}T^{-2} = \begin{pmatrix} \tilde{\delta} & -\tilde{\beta} \\ -\tilde{\gamma} & \tilde{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad /4.8/$$

где ~ –операция частичного отражения /2.11/. Элементы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ подчинены условиям:

$$\alpha\tilde{\delta} - \beta\tilde{\gamma} = 1,\ \gamma\tilde{\delta} - \delta\tilde{\gamma} = \beta\tilde{\alpha} - \alpha\tilde{\beta} = 0, \qquad /4.9a/$$

или эквивалентно:

$$\tilde{\delta}\alpha - \tilde{\beta}\gamma = 1,\ \tilde{\alpha}\gamma - \tilde{\gamma}\alpha = \tilde{\delta}\beta - \tilde{\alpha}\delta = 0. \qquad /4.9б/$$

Кроме того, из /4.4/ и /4.7/ следует

$$\alpha^{+} = \tilde{\alpha}\,,\ \beta^{+} = \tilde{\beta}\,,\ \gamma^{+} = \tilde{\gamma}\,,\ \delta^{+} = \tilde{\delta}\,. \qquad /4.10/$$

Введем величину $\not{p}$ по формуле

$$\not{p} = p_L \pi^L = \begin{pmatrix} p_3 + p_4 & p_0 - p_1\sigma_1 - p_2\sigma_2 \\ p_0 + p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 & p_3 - p_4 \end{pmatrix}, \qquad /4.11/$$

$$\det\not{p} = -\hat{g}_{KL}p^{K}p^{L}, \qquad /4.12/$$

$$\pi^{0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \pi^{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_{1,2} \\ \sigma_{1,2} & 0 \end{pmatrix},\ \pi^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \pi^{4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad /4.13/$$

Для преобразований из группы V

$$\not{p}' = v\not{p}v^{+} \qquad /4.14/$$

справедлив аналог леммы предыдущего параграфа. Всякий элемент $v \in V$, удовлетворяющий условию $||\alpha|| \neq 0$, можно представить, и притом единственным образом, в виде

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \tilde{\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad /4.15/$$

где

$$z = z_0 + z_1\sigma_1 + z_2\sigma_2\,,\quad \mu = \mu_0 + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2\,,$$

$$\xi = \xi_0 + \xi_1\sigma_1 + \xi_2\sigma_2 + i\xi_3\sigma_3\,,$$

*Универсальная накрывающая группы SO(3,2) имеет бесконечный дискретный центр. Однако найденная "минимальная" накрывающая оказывается достаточной для построения всех спинорных представлений этой группы.

$$||\xi|| = \xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 = \pm 1,$$

$$z_0, z_k, \mu_0, \mu_k, \xi_0, \xi_k, t \in \{R\}. \qquad /4.16/$$

Соотношения /4.16/ показывают, что параметры группы V в случае SO(3,2) принадлежат к ветви /2.12в/.

Переводя сказанное в §3 относительно орисфер на язык группы SO(2,3), придем к псевдоорисферическим координатам

$$\begin{aligned} &p_3 + p_4 = e^t, \\ &p_3 - p_4 = (z_0^2 - z_1^2 - z_2^2)e^t - e^{-t}, \\ &p_{0,1,2} = e^t z_{0,1,2} \end{aligned} \qquad /4.17/$$

и к псевдоорисферическим сдвигам

$$p' = p \oplus q, \qquad /4.18а/$$

$$\begin{aligned} &t' = t + s, \\ &z_k' = e^{\cdot s} z_k + w_k. \end{aligned} \qquad /4.18б/$$

Вывод формул /4.17/, /4.18/ основан на треугольных матрицах $\omega \in V$ вида

$$\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ ze^{t/2} & e^{-t/2} \end{pmatrix}, \qquad /4.19/$$

где z задается формулой /4.16/.

§5. СПИНОРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП SO(4,1) И SO(3,2)

Наинизшее спинорное представление группы SO(4,1) получается, если в гиперкомплексных матрицах /см. §3/ второго порядка заменить кватернионы σ_i на соответствующие матрицы Паули. При такой замене матрицы τ^L /3.1/ перейдут в матрицы Γ^L, принадлежащие алгебре матриц Дирака *

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu, \Gamma^4 = \gamma^5 \quad (\mu = 0,1,2,3). \qquad /5.1/$$

По своим трансформационным свойствам относительно группы SO(4,1) 15 матриц Дирака распадаются на 5-вектор Γ^L и антисимметричный тензор

$$M^{KL} = \frac{i}{4}[\Gamma^K, \Gamma^L]. \qquad /5.2/$$

Для определенных таким образом матриц Γ^L справедливо соотношение

$$\Gamma_K = -\frac{1}{4!}\epsilon_{KLMNS}\Gamma^L\Gamma^M\Gamma^N\Gamma^S, \qquad /5.3/$$

где ϵ_{KLMNS} - антисимметричный тензор ($\epsilon_{01234} = 1$). Матрицы /5.2/ являются инфинитезимальными операторами четырехрядного представления группы SO(4,1). Конечные преобразования из группы SO(4,1), отвечающие гиперкомплексным матрицам u, обозначим через A. Ограничения /3.5/, /3.6/ для матриц A принимают вид

$$\begin{cases} \mathcal{C}A^T\mathcal{C}^{-1}A = 1, \\ \Gamma_0 A^+ \Gamma_0 A = 1, \end{cases} \qquad /5.4/$$

где

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = \Gamma_0\Gamma_2\Gamma_4, \quad c = -i\sigma_2. \qquad /5.5/$$

Из /5.4/ видно, что матрица конечного преобразования

$$\Lambda^L{}_M = \frac{1}{4}\mathrm{Sp}(\Gamma^L A \Gamma_M A^{-1})$$

удовлетворяет условиям

---

*Мы пользуемся реализацией матриц Дирака, принятой в [10] /см. там ф-лу /2.4.15//.

$$\begin{cases}\Lambda^0_0 > 0,\\ \Lambda^L{}_M\Lambda_K{}^M=\delta_K{}^L.\end{cases}$$

Для выделения односвязной группы наложим еще условие $\det A = 1$, совместное с /5.4/. Таким образом, группа четырехрядных матриц, удовлетворяющих условиям

$$\mathcal{C}A^T\mathcal{C}^{-1}A = 1,$$

$$\Gamma_0 A^+\Gamma_0 A = 1,$$

$$\det A = 1, \qquad /5.6/$$

образует универсальную накрывающую группы $SO(4,1)$.

Введем спиноры ξ_α, ξ^α, $\eta_{\dot\alpha}$, $\eta^{\dot\alpha}$, преобразующиеся соответственно с помощью матриц $A, (A^T)^{-1}, A^*, (A^+)^{-1}$. Очевидно, что вследствие соотношений /5.6/ все эти представления эквивалентны. Поэтому мы будем рассматривать только спиноры с нижними непунктирными индексами. В качестве матрицы подъема индексов выступает матрица $\mathcal{C}$:

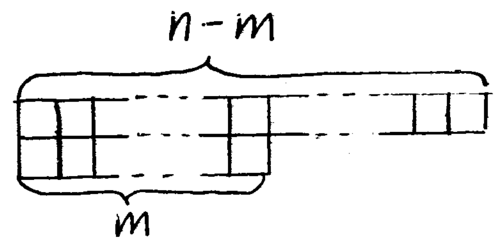
$$\xi_\alpha = \mathcal{C}_{\alpha\beta}\xi^\beta,\ \xi^\alpha = (\mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta}\ \xi_\beta,\ \mathcal{C}^T = -\mathcal{C}.$$

При построении спинорных представлений высшего ранга следует принять во внимание, что вследствие ограничений /5.6/ на матрицы A имеется два инвариантных спинтензора: спин-тензор второго ранга $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ и антисимметричный спин-тензор четвертого ранга $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ $(\epsilon_{1234}=1)$.

Неприводимые представления группы $SO(4,1)$ реализуются спинорами, удовлетворяющими условию

$$(\mathcal{C}^{-1})^{\alpha\beta}\ \chi_{\alpha_1...\beta...\alpha...\alpha_n} = 0$$

по любой паре индексов и, кроме того, обладающими определенной симметрией относительно перестановок индексов. Наличие антисимметричного спин-тензора $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ дает возможность построить все спинорные представления группы $SO(4,1)$, используя только спиноры с симметрией, описываемой схемами Юнга следующего типа:



В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением симметричных спиноров, которые представляют наибольший интерес для физических приложений. Представление, реализуемое симметричным спинором ранга n

$$\Phi_{\alpha_1...\alpha_n},$$

имеет размерность $(n+1)(n+2)(n+3)/3!$. Операторы Казимира C_I и C_2 [19] принимают в этих представлениях следующие значения:

$$C_1 = \frac{1}{2}\hat M_{KL}\hat M^{KL} = \frac{n(n+4)}{2},$$

$$C_2 = W_K W^K = \frac{n(n+4)}{2}\left(\frac{n+2}{8}\right)^2, \qquad /5.7/$$

причем генераторы $\hat M_{KL}$ имеют вид

$$\hat M_{KL} = \sum_{i=1}^{n}(\dot M_{KL})_i, \qquad /5.8/$$

а оператор W_k определяется равенством

$$W_K = \frac{1}{8}\epsilon_{KLMNS}\hat M^{LM}\hat M^{NS} = \frac{n+2}{4}\sum_{i=1}^{n}(\Gamma_K)_i. \qquad /5.9/$$

Перейдем к новой нумерации компонент спиноров:

$$\Phi_{\alpha_1...\alpha_2} \to F_{\rho\sigma}\left(\frac{\ell}{2},\frac{h-\ell}{2}\right), \qquad /5.1O/$$

где $\frac{\ell}{2}+\rho$ - число индексов 1, $\frac{\ell}{2}-\rho$ - число индексов 2,

$\frac{n-\ell}{2}+\sigma$ - число индексов 3, $\frac{n-\ell}{2}-\sigma$ - число индексов 4.

Очевидны следующие ограничения на ℓ, ρ, σ:

$$0\le \ell \le n, \; -\frac{\ell}{2}\le \rho \le \frac{\ell}{2}, \; -\frac{n-\ell}{2}\le\sigma\le\frac{n-\ell}{2}.$$

В явном виде

$$F_{\rho\sigma}\left(\frac{\ell}{2},\frac{n-\ell}{2}\right)=\frac{\Phi_{\overbrace{1\ldots1}^{\frac{\ell}{2}+\rho}\overbrace{2\ldots2}^{\frac{\ell}{2}-\rho}\overbrace{3\ldots3}^{\frac{n-\ell}{2}+\sigma}\overbrace{4\ldots4}^{\frac{n-\ell}{2}-\sigma}}}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}+\rho\right)!\left(\frac{\ell}{2}-\rho\right)!\left(\frac{n-\ell}{2}+\sigma\right)!\left(\frac{n-\ell}{2}-\sigma\right)!}}. \qquad /5.11/$$

Коэффициент в /5.11/ получается из требования инвариантности скалярного произведения

$$\sum_{\ell=0}^{n} F^{\rho\sigma}\left(\frac{\ell}{2},\frac{n-\ell}{2}\right)F_{\rho\sigma}\left(\frac{\ell}{2},\frac{n-\ell}{2}\right)= \qquad /5.12/$$

$$=\text{inv}=\frac{\Phi^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{n!}.$$

При преобразованиях из группы SO(4,1) эти компоненты преобразуются по закону

$$F'_{\rho\sigma}\left(\frac{\ell}{2},\frac{n-\ell}{2}\right)=\sum_{m=0}^{n} D(A)^{m;\tau\phi}_{\ell;\rho\sigma}\,F_{\tau\phi}\left(\frac{m}{2},\frac{n-m}{2}\right), \qquad /5.13/$$

где "матрица" $D(A)^{m;\tau\phi}_{\ell;\rho\sigma}$ однозначно определяется матрицей A . Нетрудно заметить, что при преобразованиях Лоренца

$$D(A)^{m;\tau\phi}_{\ell;\rho\sigma}=D(A)^{\ell;\tau\phi}_{\ell;\rho\sigma}\;\delta^{m}_{\ell}, \qquad /5.14/$$

то есть компоненты с различными ℓ преобразуются независимо. Такая нумерация компонент отвечает редукции $SO(4,1)\supset SO(3,1)$. Отсюда тривиально следует, что неприводимое представление группы SO(4,1), реализуемое симметричным спином ранга n, разлагается в прямую сумму неприводимых представлений группы Лоренца

$$(n)_{SO(4,1)}=\sum_{\ell=0}^{n}\oplus\left(\frac{\ell}{2},\frac{n-\ell}{2}\right). \qquad /5.15/$$

В случае спинорных представлений группы SO(3,2) из /4.2/ получим следующий 5-вектор Γ-матриц:

$$\Gamma^{\mu}=\gamma^{\mu}, \quad \Gamma^{4}=i\gamma^{5}. \qquad /5.16/$$

Выражения для генераторов $\hat{M}^{KL}$ совпадают с /5.2/, а вместо /5.3/ теперь имеем

$$\Gamma_K=-\frac{i}{4!}\epsilon_{KLMNS}\,\Gamma^{L}\Gamma^{M}\Gamma^{N}\Gamma^{S}. \qquad /5.17/$$

Аналогично /5.6/ матрицы конечных преобразований A удовлетворяют условиям

$$\mathcal{C}A^{T}\mathcal{C}^{-1}A=1,$$
$$\Gamma^{\circ}\Gamma^{4}A^{+}\Gamma^{4}\Gamma^{\circ}A=1, \qquad /5.18/$$
$$\det A=1.$$

Очевидно, что в данном случае, так же как и для группы SO(4,1), все низшие спинорные представления эквивалентны. Неприводимые представления реализуются спинорами, обладающими нулевой сверткой по любой паре индексов и симметрией, описываемой теми же схемами Юнга, что и в случае группы SO(4,1).

Рассмотрим более подробно представления, отвечающие симметричным спинорам. Симметричный спинор $\Phi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ ранга n реализует представления размерности $(n+1)(n+2)(n+3)/3!$. Генераторы $\hat{M}_{KL}$ определяются той же формулой /5.8/, что и для группы SO(4, 1), а оператор W_K/5.9/ имеет вид

$$W_K = -i\frac{n+2}{4}\sum_{i=1}^{n}(\Gamma_K)_i \, . \qquad /5.19/$$

Операторы Казимира C_1 и C_2 принимают в симметричных представлениях значения

$$C_1 = \frac{n(n+4)}{2},$$
$$/5.20/$$
$$C_2 = -\frac{n(n+4)}{2}\,\frac{(n+2)^2}{8} \, .$$

Соотношения /5.10/-/5.15/ переносятся на случай группы $SO(3,2)$ без изменений. В частности, разложение неприводимого симметричного представления группы $SO(3,2)$ по представлениям группы Лоренца имеет вид:

$$(n)_{SO(3,2)} = \sum_{\ell=0}^{n} \oplus \left(\frac{\ell}{2}, \frac{n-\ell}{2}\right).$$

Авторы признательны В.Г.Кадышевскому и А.А.Логунову за внимание к работе и полезные замечания. Авторы также выражают свою благодарность Д.И.Желобенко, А.Н.Лезнову, С.Ш.Мавродиеву, М.Д.Матееву, М.И.Савельеву и Н.Б.Скачкову за обсуждение работы.

Приложение

Приведем явный вид матриц u, отвечающих конечным поворотам в различных плоскостях.

I. Группа $O(4,1)$.

а/ Трехмерное вращение $u_{\vec n}(\omega)$ вокруг оси $\vec n$ на угол ω:

$$u_{\vec n}(\omega) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2} + i(\vec\sigma\vec n)\sin\frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\omega}{2} + i(\vec\sigma\vec n)\sin\frac{\omega}{2} \end{pmatrix}. \qquad /П.1/$$

б/ Чисто лоренцовы $u_{0\vec n}(\chi)$ -преобразования, отвечающие скорости $\vec v = \vec n\,\mathrm{th}\chi$:

$$u_{0\vec n}(\chi) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\frac{\chi}{2} - (\vec\sigma\vec n)\,\mathrm{sh}\frac{\chi}{2} & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\frac{\chi}{2} + (\vec\sigma\vec n)\,\mathrm{sh}\frac{\chi}{2} \end{pmatrix}. \qquad /П.2/$$

в/ Повороты $u_{4\vec n}(\delta)$ в плоскости $(4,\vec n)$, т.е. кривые сдвиги /3/ на вектор $k_L = (k_0 = 0,\ \vec k = \vec n\sin\delta,\ k_4 = \cos\delta)$:

$$u_{4\vec n}(\delta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\delta}{2} & -i(\vec\sigma\vec n)\sin\frac{\delta}{2} \\ -i(\vec\sigma\vec n)\sin\frac{\delta}{2} & \cos\frac{\delta}{2} \end{pmatrix}. \qquad /П.3/$$

г/ Гиперболические повороты $u_{04}(\psi)$ в плоскости $(0,4)$, т.е. кривые сдвиги на вектор $k_L = (k_0 = \mathrm{sh}\psi,\ \vec k = \vec 0,\ k_4 = \mathrm{ch}\psi)$:

$$u_{04}(\psi) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\frac{\psi}{2} & -i\,\mathrm{sh}\frac{\psi}{2} \\ i\,\mathrm{sh}\frac{\psi}{2} & \mathrm{ch}\frac{\psi}{2} \end{pmatrix}. \qquad /П.4/$$

II. Группа $O(3,2)$

Матрицы, отвечающие случаям а/ и б/ для $O(3,2)$, совпадают с /П.1/ и /П.2/.

в/ Гиперболические повороты в плоскости $(4,\vec n)$, т.е. кривые сдвиги на вектор $k_L = (k_0 = 0,\ \vec k = \mathrm{sh}\psi'\vec n,\ k_4 = \mathrm{ch}\psi')$:

$$u_{4\vec{n}}(\psi') = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\frac{\psi'}{2} & (\vec{\sigma}\vec{n})\,\mathrm{sh}\frac{\psi'}{2} \\ (\vec{\sigma}\vec{n})\,\mathrm{sh}\frac{\psi'}{2} & \mathrm{ch}\frac{\psi'}{2} \end{pmatrix} . \qquad /П.5/$$

г/ Повороты $u_{04}(\delta')$ в плоскости $(0,4)$, т.е. кривые сдвиги на вектор $k_L = (k_0 = \sin\delta', \vec{k} = \vec{0},\ k_4 = \cos\delta')$.

$$u_{04}(\delta') = \begin{pmatrix} \cos\frac{\delta'}{2} & -\sin\frac{\delta'}{2} \\ \sin\frac{\delta'}{2} & \cos\frac{\delta'}{2} \end{pmatrix} . \qquad /П.6/$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кадышевский В.Г. В сб.: Проблемы теоретической физики, посвященном памяти И.Е.Тамма. Наука, М., 1972.*
2. *Кадышевский В.Г. ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971.*
3. *Донков А.Д. и др. Болгарский физический журнал, 1974, т. 1, 58, 15О, 233; 1975, т. 2, 3.*
4. *Донков А.Д. и др. В кн.: Труды XVII Международной конференции по физике высоких энергий, т. 1, 267. Лондон, 1974.*
5. *Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. ОИЯИ, Р2-8877, Дубна, 1975.*
6. *Кадышевский В.Г., Матеев М.Д., Мир-Касимов Р.М. ОИЯИ, Е2-8892, Дубна, 1975.*
7. *Мир-Касимов Р.М. В кн.: Труды 2-ой школы по физике элементарных частиц и высоких энергий. Гюлечица, НРБ, 1975.*
8. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. Наука, М., 1973.*
9. *Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз, М., 1958.*
10. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. Наука, М., 1969.*

11. *Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. Наука, М., 197О.*
12. *Takahashi R. Bulletin de la Societe matematique de France, v. 91, 289, 1963;*
Ström S. Arkiv fur Fysik, 1969, 40.
13. *Наймарк М.А. Линейные представления группы Лоренца. Физматгиз, М., 1958.*
14. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, М., 1962.*
15. *Лезнов А.Н., Федосеев И.А. Препринт ИФВЭ СТФ69-1О2, 1969;*
Finkelstein D. e.a. Journal of Mathematical Physics, 1962, 3, 207;
Birkhoff G., van Neuman J. Annalen der Matematik, 1936, 37, 823.
16. *Дирак П.А.М. В сб.: Проблемы теоретической физики, посвященном памяти И.Е.Тамма, Наука, М., 1972;*
Rostall P. Reviews of Modern Physics, 1964, 36, 280;
Edmonds J.D. Jr. International Journal of Theoretical Physics, 1974, 11, 1;
Богуш А.А. и др. Известия АН БССР, серия физ-мат. наук, 1976, №1, 69;
Ymaeda K. Nuovo Cimento, 1976, 32B, 138;
Mignani R. Recani E. Nuovo Cimento, 1974, 24A, 438;
Mignani R. Lettere al Nuovo Cimento, 1975, 13, 134.
17. *Hamilton W.R. Lectures on quaternions, Dublin, 1953.*
18. *Гарсеванишвили В.Р. и др. ТМФ, 1971, 7, 2О3.*
19. *Newton T. Annals of Mathematics, 1950, 51, 730.*

Рукопись поступила в издательский отдел
2О мая 1977 года.