ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 10664

Г.В.Ефимов

СИЛЬНАЯ СВЯЗЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1977

P2 - 10664

Г.В.Ефимов

СИЛЬНАЯ СВЯЗЬ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Направлено в "Communications in Mathematical Physics"

Ефимов Г.В. P2 - 10664

Сильная связь в квантовой теории поля с нелокальным неполиномиальным взаимодействием

В квантовой теории однокомпонентного поля $\phi(x)$ с нелокальным неполиномиальным взаимодействием $\mathcal{L}_I = gU(\phi(x))$, когда причинная функция ограничена в евклидовой области $0 \le D_c(x_E^2) \le D_c(0) < \infty$ и функция $U(\phi)$ ограничена при вещественных ϕ, получено представление для матричных элементов S-матрицы в евклидовой области импульсных переменных при любых константах связи g. Показано, что двухточечная функция Грина ограничена в физической области импульсных переменных.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Efimov G.V. P2 - 10664

Strong Coupling in the Quantum Field Theory with a Nonlocal Nonpolynomial Interaction

In the relativistic quantum field theory the representation for the S-matrix elements is obtained for any coupling constants g in the case of one-component scalar field $\phi(x)$ with nonlocal nonpolynomial interaction $\mathcal{L}_I(\phi) = gU(\phi)$ when the causal function is bounded in the Euclidean region $0 \le D_c(x_E^2) \le D_c(0) < \infty$ and function $|U(\alpha)| \le 1$ for real α. It is proved that the two-point Green function is bounded in the physical region of momenta variable p^2.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

§I. Введение. Постановка задачи

Выход за рамки теории возмущений в квантовой теории поля представляет главную задачу, стоящую на повестке дня теории элементарных частиц. Суммирование различных классов диаграмм Фейнмана не решает задачи, поскольку неизвестен характер поведения полных амплитуд при больших константах связи или больших энергиях для любых рассматриваемых в настоящее время лагранжианов взаимодействия.

В данной работе мы получим представление матричных элементов S-матрицы при произвольных константах связи в квантовой теории поля с нелокальным взаимодействием для неполиномиальных лагранжианов взаимодействия. Кроме того, мы покажем, что при больших энергиях двухточечная функция Грина ограничена. Этот вывод очевидным образом распространяется и на любые другие амплитуды.

Ранее (см. /I/) было доказано, что в рассматриваемой модели S-матрица конечна, унитарна и причинна в каждом порядке теории возмущений. Таким образом, в данной работе показано, что для построенной модели релятивистски ковариантной теории поля полная S-матрица унитарна при любых константах связи и ее матричные элементы ограничены при больших энергиях.

Будем рассматривать теорию однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$, описываемого плотностью лагранжиана взаимодействия

$$\mathcal{L}(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)(\Box-m^2)\varphi(x)+gU(K(\Box)\varphi(x)). \qquad (I.1)$$

Здесь g – константа связи. Функция $U(\varphi)$, описывающая взаимодействие, вещественна, аналитична в некоторой окрестности вещественной оси и такова, что

$$\max_{\varphi\in\mathbb{R}}|U(\varphi)|=1,$$
$$U(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,\tilde{U}(\beta)e^{i\beta\varphi}. \qquad (I.2)$$

Ниже будем рассматривать два вида функций:

(а) $U(\varphi)=-U(-\varphi)$ – нечетные,

(б) $U(\varphi)=U(-\varphi)$ – четные.

Будем также считать, что $U(\varphi)\geqslant 0$ при $\varphi\geqslant 0$. Приведем примеры возможных функций $U(\varphi)$:

$$\varphi^3e^{-\varphi^2},\quad \frac{\varphi^3}{(1+\varphi^2)^2},\quad \varphi^4e^{-\varphi^2},\quad \frac{\varphi^4}{(1+\varphi^2)^3} \quad \text{и т.д.}$$

Оператор $K(\Box)$ в (I.I) является нелокальным и таков, что $K(z)$ – целая аналитическая функция некоторого порядка $\rho\geqslant\frac{1}{2}$ в комплексной z-плоскости, убывающая достаточно быстро при $z=k^2\to-\infty$ (в евклидовом направлении).

Все вопросы, связанные с квантованием системы, описываемой лагранжианом (I.I), и построением S-матрицы, конечной, унитарной и причинной в каждом порядке теории возмущений, изложены в /I/.

S-матрица, как функционал от скалярного поля $\varphi(x)$, записывается в евклидовой метрике следующим образом:

$$S[\varphi]= \qquad (I.3)$$
$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\iint dx_1dx_2\,D(x_1-x_2)\frac{\delta^2}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)}\right\}\exp\left\{g\int dx\,U(\varphi(x))\right\}$$

и понимается как разложение по константе связи g.

Здесь $D(x_1-x_2)$ – нелокальная причинная функция в евклидовой метрике:

$$D(x_1-x_2)=\overline{\varphi_H(x_1)\varphi_H(x_2)}=\overline{K(\Box)\varphi(x_1)\cdot K(\Box)\varphi(x_2)}= \qquad (I.4)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\frac{[K(-k^2)]^2e^{-ik(x_1-x_2)}}{k^2+m^2}=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\,\tilde{D}(k^2)e^{-ik(x_1-x_2)},$$

где все интегрирования проводятся по евклидову k-пространству. Функция $D(x)$ удовлетворяет условиям:

(а) $D(x)$ – вещественная, положительная функция,

(б) $D(0)<\infty$, $\qquad$ (I.5)

(в) $\tilde{D}(k^2)\geqslant 0$.

В представлении (I.3) S-матрица содержит объемные расходимости, связанные с трансляционной инвариантностью теории. Поэтому в (I.3) введем интегрирования по конечному объему V (мы будем считать, что это шар радиуса L, так что $V=\frac{1}{2}\pi^2L^4$).

Кроме того, нам будет удобно ввести функцию

$$\mathcal{D}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int dk\,\tilde{\mathcal{D}}(k^2)e^{-ikx}, \qquad (I.6)$$

такую, что

$$D(x_1-x_2)=\int dy\,\mathcal{D}(x_1-y)\mathcal{D}(y-x_2).$$

Определим далее функцию

$$D_V(x_1,x_2)=\int_V dy\,\mathcal{D}(x_1-y)\mathcal{D}(y-x_2), \tag{I.7}$$

при этом при $V\to\infty$

$$D_V(x_1,x_2)=D(x_1-x_2)+O\left(exp\left\{-const\cdot V^{1/4}\right\}\right), \tag{I.8}$$

поскольку $D(x)\sim e^{-m\sqrt{x^2}}$ при $x^2\to\infty$.

Тогда регуляризованная S-матрица может быть представлена в виде

$$S_V[g,\varphi]=$$

$$=exp\left\{\frac{1}{2}\iint_{VV}dx_1dx_2\,D_V(x_1,x_2)\frac{\delta^2}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)}\right\}exp\left\{g\int_V dx\,U[\varphi(x)]\right\}. \tag{I.9}$$

Ряд теории возмущений для S-матрицы (I.9) записывается так:

$$S_V[g,\varphi]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\int_V dx_1\ldots\int_V dx_n\int_{-\infty}^{\infty}d\beta_1\,\tilde{U}(\beta_1)e^{i\beta_1\varphi(x_1)}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}d\beta_n\,\tilde{U}(\beta_n)e^{i\beta_n\varphi(x_n)}\times \tag{I.10}$$

$$\times\, exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i D_V(x_i,x_j)\beta_j\right\}.$$

Введем обозначения

$$\int_V d\mu=\int_V dx\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,\tilde{U}(\beta)e^{-\frac{1}{2}\beta^2D_V(x,x)}\cdot e^{i\beta\varphi(x)}, \tag{I.11}$$

$$w_{ij}=w_V(\beta_i\beta_j;x_i,x_j)=exp\left\{-\beta_i D_V(x_i,x_j)\beta_j\right\}-1.$$

Тогда ряд (I.10) можно переписать в компактной форме

$$S_V[g,\varphi]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\int_V d\mu_1\ldots\int_V d\mu_n\prod_{1\le i<j\le n}\left(1+w_{ij}\right). \tag{I.12}$$

Произведение $\prod_{i<j}(1+w_{ij})$ в (I.12) может быть интерпретировано как сумма всевозможных линейных связных и несвязных графов с n вершинами, когда ребру графа, соединяющему точки i и j, соответствует функция w_{ij}.

Если представить

$$S_V[g,\varphi]=exp\left\{B_V[g,\varphi]\right\}, \tag{I.13}$$

то тогда

$$B_V[g,\varphi]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\int d\mu_1\ldots\int d\mu_n\left\{\prod_{1\le i<j\le n}(1+w_{ij})\right\}_{cв}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\int dx_1\cdots\int dx_m\,B_m(V;x_1,\ldots,x_m)\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m), \tag{I.14}$$

где $\left\{\prod(1+w_{ij})\right\}_{cв}$ означает, что из всего произведения остаются только связные графы с n-вершинами.

Поправка к энергии вакуума определяется выражением

$$E=-\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\ln S_V[g,0]=-\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}B_V[g,0]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\int d\mu_1\ldots\int d\mu_n\,n^4\delta(x_1+\ldots+x_n)\left\{\prod_{i<j}\left(1+w(\beta_i\beta_j,x_i-x_j)\right)\right\}_{cв}. \tag{I.15}$$

Связная часть амплитуды взаимодействия m частиц в евклидовой области импульсных переменных определяется выражением

$$\tilde{B}_m(p_1,\ldots,p_m)=\lim_{V\to\infty}\int dy_1\ldots\int dy_m\,e^{i(p_1y_1+\ldots+p_my_m)}B_m(V;y_1,\ldots,y_m), \tag{I.16}$$

$$B_m(V;y_1,\ldots,y_m)=\frac{\delta^m}{\delta\varphi(y_1)\ldots\delta\varphi(y_m)}B_V[g,\varphi]\Big|_{\varphi=0},$$

$$\tilde{B}_m(p_1,\dots,p_m) = (2\pi)^4\delta(p_1+\dots+p_m)\,T_m(p_1,\dots,p_m) \quad ,$$

$$T_m(p_1,\dots,p_m) = m^4\int dy_1\dots\int dy_m\,\delta(y_1+\dots+y_m)\,e^{i(p_1y_1+\dots+y_mp_m)}\lim_{V\to\infty}B_m(V;y_1,\dots,y_m).$$

По теории возмущений получим:

$$T_m(p_1,\dots,p_m) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}d\beta_1\,\tilde{U}(\beta_1)\,e^{-\frac{1}{2}\beta_1^2D(0)}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d\beta_n\,\tilde{U}(\beta_n)\,e^{-\frac{1}{2}\beta_n^2D(0)}\times$$

$$\times\, n^4\int dx_1\dots\int dx_n\,\delta(x_1+\dots+x_n)\left\{\prod_{i<j}\left(1+w_{ij}(\beta_i\beta_j,x_i-x_j)\right)\right\}_{cl}\prod_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,e^{ip_kx_j}\right). \tag{I.17}$$

В работах /2,3/ было доказано, что в рассматриваемом классе теорий ряды теории возмущений (I.15) и (I.17) в евклидовой области импульсных переменных $(p_1,\dots,p_n)$ сходятся в некотором радиусе

$$|g| < g_0 \quad , \tag{I.18}$$

где g_0 зависит от параметров теории и существенно определяется условиями (I.5) и (I.2):

$$D(0) < \infty\ ,$$

$$\max_{\varphi}|U(\varphi)| = 1\ .$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти особенности амплитуд в g -плоскости и выйти за радиус сходимости (I.18).

Мы покажем, что в случае нечетных функций взаимодействия, т.е. $U(\varphi) = -U(-\varphi)$,особенности расположены на мнимой оси (рис. Iа), а в случае четных функций - в левой полуплоскости (рис. Iб).

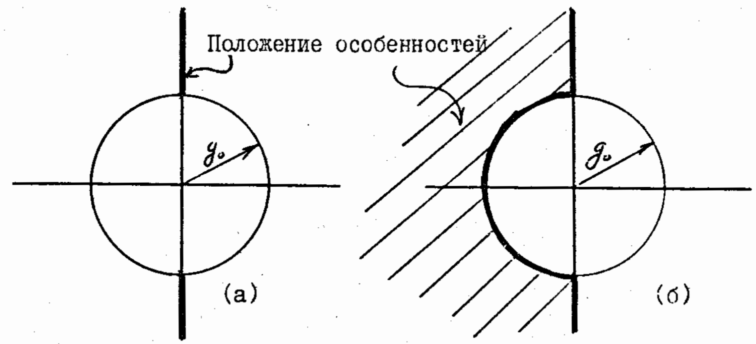

Рис. I. Положение особенностей в g -плоскости для нечетных (а) и четных (б) функций $U(\varphi)$.

Наш путь доказательства следующий:

(I) для S -матрицы (I.I0) выводится представление в виде континуального интеграла ,и доказывается, что континуальный интеграл существует при любых конечных V ;

(2) вводится функция $F_V[\zeta,\varphi] = S_V[\frac{\zeta}{V},\varphi]$,и доказывается, что она является целой аналитической функцией первого порядка роста в ζ - плоскости;

(3) для функции $F_V[\zeta,\varphi]$ записывается представление Адамара в виде бесконечного произведения по нулям целой функции, и находятся соответствующие выражения для физических амплитуд через предельные соотношения при $V\to\infty$;

(4) при помощи формул Йенсена и Карлемана из теории аналитических функций доказываются предельные соотношения при $V\to\infty$ для нулей целой функции $F_V[\zeta,\varphi]$;

(5) полученные предельные соотношения вместе с результатами теории возмущений дают представления для поправки к энергии вакуума и для физических амплитуд при любых константах связи g;

(6) для двухточечной функции Грина рассматривается продолжение по энергии в физическую область.

§2. Представление S-матрицы в виде континуального интеграла

Рассмотрим континуальный интеграл

$$S_V[g,\varphi]=\int\delta\Lambda\, exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_V dx\,\Lambda^2(x)+g\int_V dx\,U\Big(\varphi(x)+\int_V dy\,\mathcal{D}(x-y)\Lambda(y)\Big)\Big\}= \tag{2.I}$$

$$\overline{\overline{D\!f}}\ \int\delta\Lambda\, exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_V\Lambda^2+g\int_V U\big(\varphi+\int_V\mathcal{D}\Lambda\big)\Big\}.$$

Здесь интегрирование по x проводится по четырехмерному шару объема V. Нормировка выбрана таким образом, что

$$S_V[0,\varphi]=\int\delta\Lambda\, exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_V\Lambda^2\Big\}=1. \tag{2.2}$$

Функция $\mathcal{D}(x)$ определяется (I.6) и (I.7).

Континуальный интеграл в (2.I) определим следующим образом. Пусть в объеме V имеется полная ортонормированная система функций $\{g_s(x),\ s=0,1,2,..\}$, такая, что

$$\begin{cases}\int_V dx\, g_s(x)g_{s'}(x)=\delta_{ss'}\ ,\\ \sum\limits_{s=0}^{\infty} g_s(x)g_s(x')=\delta(x-x').\end{cases} \tag{2.3}$$

Представим функцию $\Lambda(x)$ в виде разложения по системе $\{g_s\}$:

$$\Lambda(x)=\sum_{s=0}^{\infty}u_s g_s(x). \tag{2.4}$$

Тогда

$$\begin{aligned}&(1)\quad \int_V dx\,\Lambda^2(x)=\sum_{s=0}^{\infty}u_s^2\ ,\\ &(2)\quad \int_V dy\,\mathcal{D}(x-y)\Lambda(y)=\sum_{s=0}^{\infty}u_s\,\mathcal{D}_s(x)\ ,\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\mathcal{D}_s(x)=\int_V dy\,\mathcal{D}(x-y)g_s(y)$.

Поскольку функция $\mathcal{D}(x)$ гладкая, то

$$\lim_{s\to\infty}|\mathcal{D}_s(x)|=0 \tag{2.6}$$

равномерно для $x\in V$, как свойство коэффициентов разложения по ортонормированной системе, т.к. $\sum\limits_{s=0}^{\infty}(\mathcal{D}_s(x))^2=\mathcal{D}(0)<\infty$.

Дифференциал $\delta\Lambda$ в (2.I) определим следующим образом:

$$\int\delta\Lambda=\prod_{s=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du_s}{\sqrt{2\pi}}. \tag{2.7}$$

Тогда под континуальным интегралом (2.I) будем понимать предел

$$S_V[g,\varphi]=\lim_{N\to\infty}S_V^{(N)}[g,\varphi]\ , \tag{2.8}$$

$$S_V^{(N)}[g,\varphi]=\prod_{s=0}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du_s}{\sqrt{2\pi}}\,exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{N}u_s^2+g\int_V dx\,U\Big(\varphi(x)+\sum_{s=0}^{N}u_s\mathcal{D}_s(x)\Big)\Big\}. \tag{2.9}$$

Условие нормировки:

$$S_V^{(N)}[0,\varphi]=\prod_{s=0}^{N}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du_s}{\sqrt{2\pi}}\,exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{N}u_s^2\Big\}=1. \tag{2.10}$$

Докажем существование предела в (2.8). Расмотрим разность

$$\Delta_N^{N+M} = S_V^{(N+M)}[g,\varphi] - S_V^{(N)}[g,\varphi] =$$

$$= \iint\limits_{N+M} \left[\exp\left\{ g\int U(\varphi + \overset{N+M}{\underset{0}{\sigma}}) \right\} - \exp\left\{ g\int U(\varphi + \overset{N}{\underset{0}{\sigma}}) \right\} \right], \tag{2.11}$$

где введены обозначения

$$\iint\limits_{N} = \prod_{s=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_s}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{N} u_s^2 \right\},$$

$$\overset{N_2}{\underset{N_1}{\sigma}} = \overset{N_2}{\underset{N_1}{\sigma}}(x) = \sum_{s=N_1}^{N_2} u_s \mathcal{D}_s(x).$$

После простых преобразований получим

$$\Delta_N^{N+M} = g\int_0^1 d\lambda \iint\limits_{N+M} \int_V dx\, \overset{N+M}{\underset{N+1}{\sigma}}(x)\, U'\left(\varphi(x) + \overset{N}{\underset{0}{\sigma}}(x) + \lambda \overset{N+M}{\underset{N+1}{\sigma}}(x)\right) \times$$

$$\times \exp\left\{ g\int_V U\left(\varphi + \overset{N}{\underset{0}{\sigma}} + \lambda \overset{N+M}{\underset{N+1}{\sigma}}\right) \right\} =$$

$$= \frac{g}{2}\int_0^1 d\lambda\, \lambda \int_{-1}^{1} d\nu \iint\limits_{N+M} \left\{ \int_V dx \left(\overset{N+M}{\underset{N+1}{\sigma}}(x) \right)^2 U''\left(\varphi(x) + \overset{N}{\underset{0}{\sigma}}(x) + \lambda\nu \overset{N+M}{\underset{N+1}{\sigma}}(x)\right) + \right. \tag{2.12}$$

$$\left. + g\left[\int_V dx\, \overset{N+M}{\underset{N+1}{\sigma}}(x)\, U'\left(\varphi + \overset{N}{\underset{0}{\sigma}} + \lambda\nu \overset{N+M}{\underset{N+1}{\sigma}}\right) \right]^2 \right\} \exp\left\{ g\int_V U\left(\varphi + \overset{N}{\underset{0}{\sigma}} + \lambda\nu \overset{N+M}{\underset{N+1}{\sigma}}\right) \right\}.$$

Получим оценку, используя очевидные неравенства

$$|\Delta_N^{N+M}| \leqslant \tag{2.13}$$

$$\leqslant \frac{1}{4}|g|V e^{|g|V} \left\{ \max_u |U''(u)| + |g|V\left(\max_u |U'(u)| \right)^2 \right\} \frac{1}{V}\int_V dx \sum_{s=N+1}^{\infty} \mathcal{D}_s^2(x).$$

Согласно (2.6), в силу равномерной сходимости ряда $\sum_s \mathcal{D}_s^2(x)$ правая часть (2.13) может быть сделана сколь угодно малой при $N\to\infty$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_0, что для всех $M>0$ и $N>N_0$

$$\left| S_V^{(N+M)}[g,\varphi] - S_V^{(N)}[g,\varphi] \right| < \varepsilon, \tag{2.14}$$

т.е. последовательность $S_V^{(N)}[g,\varphi]$ фундаментальная. Далее, из представления (2.9) легко получить оценку при любых $N>0$

$$\left| S_V^{(N)}[g,\varphi] \right| \leqslant e^{|g|V}. \tag{2.15}$$

Таким образом, предел в (2.8) существует и, как мы видим, не зависит от выбора базиса $\{g_s\}$. Этот предел определяет континуальный интеграл (2.1).

Из представления (2.8) получим ряд теории возмущений. Имеем

$$S_V[g,\varphi] = \lim_{N\to\infty} \prod_{s=0}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du_s}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{N} u_s^2 \right\} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int_V dx_1 \ldots \int_V dx_n \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} d\beta_n\, \tilde{U}(\beta_1) \ldots \tilde{U}(\beta_n)\, e^{i(\beta_1\varphi(x_1) + \ldots + \beta_n\varphi(x_n))} \times \tag{2.16}$$

$$\times \exp\left\{ i\sum_{j=1}^{n} \beta_j \sum_{s=0}^{N} u_s \mathcal{D}_s(x_j) \right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n}{n!} \int_V d\mu_1 \ldots \int_V d\mu_n \lim_{N\to\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathcal{D}_s(x_j) \right)^2 \right\}.$$

Но
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{s=0}^{N}\Big(\sum_{j=1}^{n}\beta_j \mathcal{D}_s(x_j)\Big)^2=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\beta_j\lim_{N\to\infty}\sum_{s=0}^{N}\mathcal{D}_s(x_i)\mathcal{D}_s(x_j)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\beta_j\int_V dy\,\mathcal{D}(x_i-y)\mathcal{D}(y-x_j)=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i D_V(x_i,x_j)\beta_j\,, \qquad (2.17)$$

где $\lim\limits_{V\to\infty} D_V(x_i,x_j)=D(x_i-x_j)$.

Окончательно

$$S_V[g,\varphi]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^n}{n!}\int_V d\mu_1\ldots\int_V d\mu_n\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i D_V(x_i,x_j)\beta_j\Big\}, \qquad (2.18)$$

т.е. мы получим представление (I.I0).

§3. Свойства S-матрицы при конечном объеме

В предыдущем параграфе мы получили представление S-матрицы в виде континуального интеграла (2.I), который хорошо определен. В этом параграфе мы детально исследуем свойства S-матрицы в комплексной g-плоскости на основе представления (2.I).

Введем функцию комплексного переменного ζ :

$$F_V[\zeta,\varphi]=S_V\Big[\frac{\zeta}{V},\varphi\Big]=$$

$$=\int\delta\Lambda\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_V\Lambda^2+\zeta\frac{1}{V}\int_V U\Big(\varphi+\int_V\mathcal{D}\Lambda\Big)\Big\}. \qquad (3.1)$$

Функция $F_V[\zeta,\varphi]$ является целой аналитической функцией первого порядка по переменной ζ, так как интеграл (3.I) существует при любых комплексных $\zeta=\xi+i\eta$ и справедлива следующая оценка сверху

$$|F_V[\zeta,\varphi]|\leqslant\int\delta\Lambda\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_V\Lambda^2+\xi\frac{1}{V}\int_V U\Big(\varphi+\int_V\mathcal{D}\Lambda\Big)\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{V}\int_V dx\int\delta\Lambda\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int\Lambda^2+\xi\, U\Big(\varphi(x)+\int_V dy\,\mathcal{D}(x-y)\Lambda(y)\Big)\Big\}= \qquad (3.2)$$

$$=\frac{1}{V}\int_V dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Lambda}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Lambda^2+\xi\, U\Big(\varphi(x)+\Lambda\sqrt{D_V(x,x)}\Big)\Big\}\leqslant e^{|\zeta|}.$$

Для того чтобы получить оценку, мы воспользовались неравенством

$$h\Big(\frac{1}{V}\int_V dx\,\psi(x)\Big)\leqslant\frac{1}{V}\int_V dx\,h(\psi(x))\,, \qquad (3.3)$$

справедливым для любых выпуклых книзу функций $(h''(s)\geqslant)$ и вещественных $\psi(x)$ (см. /4/).

Из (3.2) видно, что оценка сверху не зависит от объема V.

Кроме того, функция $F_V[\zeta,\varphi]$ аналитична по φ в окрестности точки $\varphi=0$. Заметим далее, что если $\int dx\,\varphi^n(x)<\infty$, то предел

$$\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\int_V dx\,e^{i\xi\varphi(x)}=1$$

и не зависит от $\varphi(x)$, поскольку $\int dx\,\varphi^n(x)<\infty$ при $n\geqslant 1$. Нас будет интересовать только разложение S-матрицы в окрестности точки $\varphi(x)=0$, поскольку коэффициенты этого разложения определяют матричные элементы различных процессов. Поэтому мы будем оценивать все пределы при $\varphi(x)=\varphi$, когда $\varphi=const$, где φ достаточно мало.

Рассмотрим функцию

$$F_V[\zeta,\varphi]=\int\delta\Lambda\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_V\Lambda^2+\zeta\frac{1}{V}\int_V U\Big(\varphi+\int_V\mathcal{D}\Lambda\Big)\Big\}. \qquad (3.4)$$

Поскольку функция $F_\nu[\zeta,\varphi]$ – целая первого порядка роста, для нее справедливо представление Пэли–Винера

$$F_\nu[\zeta,\varphi]=\int_{-1}^{1}dt\,\Phi_\nu(t,\varphi)e^{\zeta t} \tag{3.5а}$$

для нечетных функций взаимодействия и

$$F_\nu[\zeta,\varphi]=\int_{0}^{1}dt\,\Psi_\nu(t,\varphi)e^{\zeta t} \tag{3.5б}$$

для четных функций. Функция $\Phi_\nu(t,\varphi)$ определяется интегралом

$$\Phi_\nu(t,\varphi)=\int\delta\Lambda\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_\nu\Lambda^2}\delta\Big(t-\frac{1}{\nu}\int\limits_\nu U\big(\varphi+\int\limits_\nu\mathcal{D}\Lambda\big)\Big). \tag{3.6}$$

Здесь $\Phi_\nu(t,\varphi)$ и $\Psi_\nu(t,\varphi)$ – суммируемые функции, для которых справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\Phi_\nu(t,\varphi)\geqslant 0,\ \Psi_\nu(t,\varphi)\geqslant 0;\ \Phi_\nu(\pm1,\varphi)=0;\ \Psi(0,\varphi)=\Psi(1,\varphi)=0;\\ \int_{-1}^{1}dt\,\Phi_\nu(t,\varphi)=\int_0^1 dt\,\Psi_\nu(t,\varphi)=1.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Поэтому при $\zeta=\xi+i\eta$, $\xi>0$ справедливо

$$F_\nu(\zeta,\varphi)=O\Big(\frac{e^{\xi}}{\xi}\Big). \tag{3.8}$$

Получим поведение функции $\Phi_\nu(t)=\Phi_\nu(t,0)$ вблизи точки $t=+1$. Рассмотрим выражение

$$\Phi_\nu(1-\tau)=\int\delta\Lambda\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_\nu\Lambda^2}\delta\Big(\tau-\frac{1}{\nu}\int\limits_\nu\big[U(\varphi_0)-U\big(\int\limits_\nu\mathcal{D}\Lambda\big)\big]\Big), \tag{3.9}$$

где точка φ_0 определяет максимум функции $U(\varphi)$, т.е. $U(\varphi_0)=1$. Пусть теперь $\tau\to 0$, тогда

$$\Phi_\nu(1-\tau)\simeq\int\delta\Lambda\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_\nu\Lambda^2}\delta\Big(\tau-|U''(\varphi_0)|\frac{1}{\nu}\int\limits_\nu dx\big(\varphi_0-\int\limits_\nu dy\,\mathcal{D}(x-y)\Lambda(y)\big)\Big).$$

Этот континуальный интеграл может быть вычислен. Приведем результат вычислений при достаточно больших ν:

$$\Phi_\nu(1-\tau)\simeq\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv\,\exp\{iv\tau-iva\varphi_0^2[1+\frac{2}{\nu}iva\tilde{\mathcal{D}}]^{-1}\}}{[1+\frac{2}{\nu}iva\tilde{\mathcal{D}}]^{\frac{\nu}{2}}}, \tag{3.10}$$

где

$$a=|U''(\varphi_0)|,\quad \tilde{\mathcal{D}}=\int dx\,\mathcal{D}(x).$$

При $\tau\to 0$ эта функция ведет себя как

$$\Phi_\nu(1-\tau)=O(\tau^{\frac{\nu}{2}}). \tag{3.11}$$

Поэтому функция $\Phi_\nu(t)$ $[\frac{\nu}{2}]$-раз дифференцируема и, следовательно,

$$F_\nu[\zeta,0]=\int_{-1}^{1}dt\,\Phi_\nu(t)e^{\zeta t}=O\Big(\frac{\operatorname{ch}\zeta}{\zeta^{\frac{\nu}{2}}}\Big) \tag{3.12}$$

при $|\zeta|\to\infty$. Аналогичные оценки справедливы и для функции $\Psi_\nu(t,\varphi)$ для четных функций взаимодействия.

Получим теперь поведение отношения $F_\nu'(\zeta)/F_\nu(\zeta)$ при $\zeta\to\infty$ и любых ν, где функция $F_\nu(\zeta)=F_\nu[\zeta,0]$ определяется (3.4). Для $F_\nu'(\zeta)$ имеем

$$F_V'(\xi)=\int\delta\Lambda\,\frac{1}{V}\int\limits_V U\Big(\int\limits_V\mathscr{D}\Lambda\Big)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int\limits_V\Lambda^2+\xi\frac{1}{V}\int\limits_V U\Big(\int\limits_V\mathscr{D}\Lambda\Big)\Big\}. \qquad (3.13)$$

Для функции $F_V(\xi)$ имеем

$$F_V(\xi)=e^{\xi}f_V(\xi)\,, \qquad (3.14)$$

где

$$f_V(\xi)=\int\delta\Lambda\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int\limits_V\Lambda^2-\xi\frac{1}{V}\int\limits_V\Big[1-U\Big(\int\limits_V\mathscr{D}\Lambda\Big)\Big]\Big\}.$$

Воспользовавшись неравенством (3.3), получим

$$f_V(\xi)\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Lambda}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big\{-\frac{1}{2}\Lambda^2-\xi\big[1-U(\Lambda\sqrt{D})\big]\Big\}\,, \qquad (3.15)$$

откуда следует

$$f_V(\xi)=O\Big(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\Big) \qquad (\xi\to+\infty). \qquad (3.16)$$

Эта оценка, конечно, завышена по сравнению с (3.12), но для нас такая точность достаточна.

Для функции $F_V'(\xi)$ имеем

$$F_V'(\xi)=e^{\xi}\big[f_V(\xi)-\psi_V(\xi)\big]\,, \qquad (3.17)$$

где

$$\psi_V(\xi)=\int\delta\Lambda\,\frac{1}{V}\int\limits_V\Big[1-U\Big(\int\limits_V\mathscr{D}\Lambda\Big)\Big]\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int\limits_V\Lambda^2-\xi\frac{1}{V}\int\limits_V\Big[1-U\Big(\int\limits_V\mathscr{D}\Lambda\Big)\Big]\Big\}.$$

Рассмотрим функцию $h(s)=se^{-s}$, для нее при $s\geqslant 2$ имеем

$$h''(s)=(s-2)e^{-s}\geqslant 0\,.$$

Преобразуем $\psi_V(\xi)$:

$$\psi_V(\xi)=\frac{1}{\xi}\int\delta\Lambda\Big\{\xi\frac{1}{V}\int\limits_V\Big[1+\frac{2}{\xi}-U\Big(\int\limits_V\mathscr{D}\Lambda\Big)\Big]-2\Big\}\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int\limits_V\Lambda^2-\xi\frac{1}{V}\int\limits_V\Big[1+\frac{2}{\xi}-U\Big(\int\limits_V\mathscr{D}\Lambda\Big)\Big]+2\Big\}=\frac{1}{\xi}\big[\psi_{1V}(\xi)-2f_V(\xi)\big], \qquad (3.18)$$

где

$$\psi_{1V}(\xi)=\int\delta\Lambda\,e^{-\frac{1}{2}\int\limits_V\Lambda^2}h\Big(\xi\frac{1}{V}\int\limits_V\Big[1+\frac{2}{\xi}-U\Big(\int\limits_V\mathscr{D}\Lambda\Big)\Big]\Big).$$

Так как

$$\xi\frac{1}{V}\int\limits_V\Big[1+\frac{2}{\xi}-U\Big(\int\limits_V\mathscr{D}\Lambda\Big)\Big]\geqslant 2\,,$$

то, воспользовавшись неравенством (3.3), получим

$$|\psi_{1V}(\xi)|\leqslant\frac{1}{V}\int\limits_V dx\int\delta\Lambda\,e^{-\frac{1}{2}\int\limits_V\Lambda^2}h\Big(\xi\Big[1+\frac{2}{\xi}-U\Big(\int dy\,\mathscr{D}(x-y)\Lambda(y)\Big)\Big]\Big)=$$

$$=\xi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Lambda}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\Lambda^2}\Big[1+\frac{2}{\xi}-U(\Lambda\sqrt{D})\Big]e^{-\xi[1-U(\Lambda\sqrt{D})]+2}= \qquad (3.19)$$

$$=O\Big(\frac{1}{\sqrt{\xi}}\Big)\quad\text{при}\quad\xi\to+\infty.$$

Собирая оценки (3.16) и (3.19), получим

$$\psi_V(\xi)=O\Big(\frac{1}{\xi^{3/2}}\Big)\quad\text{при}\quad\xi\to+\infty\,. \qquad (3.20)$$

Итак, при $\xi\to+\infty$

$$F_V'(\xi)=e^{\xi}\Big[f_V(\xi)+O\Big(\frac{1}{\xi^{3/2}}\Big)\Big]\,. \qquad (3.21)$$

Ниже нам понадобится соотношение

$$\frac{F_V'(\xi)}{F_V(\xi)}=\frac{e^{\xi}\big[f_V(\xi)+O(\xi^{-\frac{3}{2}})\big]}{e^{\xi}f_V(\xi)}=1+O\Big(\frac{1}{\xi}\Big) \qquad (3.22)$$

при $\zeta \to +\infty$. Заметим, что эта оценка справедлива при любых V.

Получим теперь оценку $F_V[\zeta,\varphi]$ при некотором фиксированном ζ и $V\to\infty$. Для этого рассмотрим ряд теории возмущений (2.18). Представим его в виде

$$F_V[\zeta,\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!}\prod_{j=1}^{n} \left\{\frac{1}{V}\int_V d\mu_j\, e^{-\frac{1}{2}\beta_j^2 D_V(x_j,x_j)}\right\}\times \tag{3.23}$$

$$\times \exp\Big\{-\sum_{i<j}\beta_i D_V(x_i-x_j)\beta_j\Big\} .$$

Воспользуемся соотношением

$$e^{-\Delta} = 1-\int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} e^{-\lambda\Delta} = \tag{3.24}$$

$$= 1+\int_0^1 d\lambda\,\Delta\, e^{-\lambda\Delta} ,$$

где $\Delta = \sum_{i<j}\beta_i D_V(x_i,x_j)\beta_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\beta_i D_V(x_i,x_j)\beta_j - \frac{1}{2}\sum_j \beta_j^2 D_V(x_j,x_j)$

Для $F_V[\zeta,\varphi]$ получим

$$F_V[\zeta,\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta^n}{n!}\left\{\frac{1}{V}\int_V dx\, U_0(\varphi)\right\}^n + Q_V[\zeta,\varphi] ,$$

$$Q_V[\zeta,\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!}\prod_{j=1}^{n}\left\{\frac{1}{V}\int_V d\mu_j\, e^{-\frac{1}{2}\beta_j^2 D_V(x_j,x_j)}\right\}\sum_{i<j}\beta_i D_V(x_i,x_j)\beta_j \times \tag{3.25}$$

$$\times\int_0^1 d\lambda \exp\Big\{-\frac{\lambda}{2}\sum_{ij}\beta_i D_V(x_i,x_j)\beta_j + \frac{\lambda}{2}\sum_j\beta_j^2 D_V(x_j,x_j)\Big\} =$$

$$= \zeta^2\frac{1}{V^2}\int_V dx_1\int_V dx_2\, D_V(x_1,x_2)\int_0^1 d\lambda\int\delta\Lambda\, \exp\Big\{-\frac{1}{2}\int_V\Lambda^2+\zeta\frac{1}{V}\int_V U_\lambda\big(\varphi+\sqrt{\lambda}\int D\Lambda\big)\Big\}\times \tag{3.26}$$

$$\times\, U_\lambda'\Big(\varphi(x_1)+\sqrt{\lambda}\int_V dy\, D(x_1-y)\Lambda(y)\Big)\, U_\lambda'\Big(\varphi(x_2)+\sqrt{\lambda}\int_V dy\, D(x_2-y)\Lambda(y)\Big) .$$

Здесь

$$U_\lambda(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\,\tilde{\sigma}(\beta)\exp\Big\{-\frac{1-\lambda}{2}\beta^2 D_V(x,x)+i\beta\varphi(x)\Big\} , \tag{3.27}$$

$$U_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\,\tilde{\sigma}(\beta)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\beta^2 D_V(x,x)+i\beta\varphi(x)\Big\} .$$

При $V\to\infty$ для Q_V получим оценку

$$\big|Q_V[\zeta,\varphi]\big| \leqslant \frac{|\zeta|^2}{V}\int dx\, D(x)\int_0^1 d\lambda\, \max_\varphi \big|U_\lambda'(\varphi)\big|\, e^{\sqrt{\lambda}\,\mathrm{Re}\,\zeta} , \tag{3.28}$$

откуда

$$\lim_{V\to\infty} Q_V[\zeta,\varphi] = 0 . \tag{3.29}$$

Тогда для $F[\zeta,\varphi]$ получаем

$$F[\zeta,\varphi] = \lim_{V\to\infty} F_V[\zeta,\varphi] = \tag{3.30}$$

$$= \exp\Big\{\zeta\int_{-\infty}^{\infty} d\beta\,\tilde{\sigma}(\beta)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\beta^2 D(0)+i\beta\varphi\Big\}\Big\} ,$$

где $\varphi = const$, как говорилось выше. Предельная функция $F[\zeta,\varphi]$ также является целой аналитической функцией в комплексной ζ-плоскости.

§4. Представление Адамара

Функция $F_V[\zeta,\varphi]$ в (3.I) является целой функцией первого порядка роста в ζ-плоскости, поэтому для нее справедливо представление Адамара (см., например, /5/):

$$F_V[\zeta,\varphi]=e^{a(V,\varphi)\zeta}\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\zeta}{a_j(V,\varphi)}\right)e^{\frac{\zeta}{a_j(V,\varphi)}}\left(1-\frac{\zeta}{a_j^*(V,\varphi)}\right)e^{\frac{\zeta}{a_j^*(V,\varphi)}}. \qquad (4.I)$$

Здесь $a_j(V,\varphi)$ $(j=1,2,\ldots)$ являются нулями функции $F_V[\zeta,\varphi]$. Обозначим

$$a_j(V,\varphi)=\zeta_j(V,\varphi)e^{i\theta_j(V,\varphi)}, \qquad (j=1,2,\ldots). \qquad (4.2)$$
$$0\le\theta_j(V,\varphi)\le\pi.$$

Каждый нуль $a_j(V,\varphi)$ является функционалом от поля φ, аналитическим в точке $\varphi=0$. Представим $a_j(V,\varphi)$ в виде функционального разложения:

$$a_j(V,\varphi)=a_j(V)+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\int dx_1\ldots\int dx_m\, a_j^{(m)}(V;x_1,\ldots,x_m)\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m). \qquad (4.3)$$

Тогда для функционала $B_V[g,\varphi]$, описывающего только связные графы, справедливо представление

$$B_V[g,\varphi]=\ln F_V[gV,\varphi]=$$
$$=Vg\,a(V,\varphi)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g^n}{n}2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{a_j(V,\varphi)}{V}\right]^n}. \qquad (4.4)$$

Сравнение с рядом теории возмущений дает

$$a(V,\varphi)=\frac{1}{V}\int_V dx\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,\tilde{v}(\beta)e^{-\frac{1}{2}\beta^2D_V(x,x)}\cdot e^{i\beta\varphi(x)}. \qquad (4.5)$$

Получим в рамках представления (4.4) выражения для поправки к энергии вакуума и для амплитуд различных процессов.

Поправка к энергии вакуума записывается в виде

$$E(g)=-\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\ln S_V[g,0]=-\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}B_V[g,0]=$$
$$=-g\,a(0)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g^n}{n}\mathcal{E}_n, \qquad (4.6)$$

где

$$a(0)=\lim_{V\to\infty}a(V,0)=\int_{-\infty}^{\infty}d\beta\,\tilde{v}(\beta)e^{-\frac{\beta^2}{2}D(0)}, \qquad (4.7)$$

$$\mathcal{E}_n=\lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{\infty}2\mathrm{Re}\frac{1}{\left[\frac{a_j(V)}{V}\right]^n}=$$
$$=\lim_{V\to\infty}\frac{2}{V}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos n\theta_j(V)}{\left[\frac{\zeta_j(V)}{V}\right]^n}. \qquad (4.8)$$

Из анализа ряда теории возмущений известно, что $\mathcal{E}_n$ конечны, т.е. предел в (4.8) существует и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{\mathcal{E}_n}{n}\right|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{g_0}, \qquad (4.9)$$

где g_0 – радиус сходимости ряда (4.6).

Рассмотрим теперь амплитуду взаимодействия m частиц. Связная часть этой амплитуды определяется формулой (I.I6). При вариационном дифференцировании суммы нулей в (4.4) получим, учитывая симметрию по $y_1,\dots,y_m$:

$$B_m^{(n)}(V;y_1,\dots,y_m)=2\,\mathrm{Re}\,\frac{\delta^m}{\delta\varphi(y_1)\dots\delta\varphi(y_m)}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{V}{a_j(V,\varphi)}\right)^n\Bigg|_{\varphi=0}=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\sum\frac{m!}{i_1!\,i_2!\dots i_m!}\cdot\frac{(-)^s(n+s-1)!}{(n-1)!}\cdot P(1,\dots,m)\times \qquad (4.10)$$

$$\times\frac{1}{V^{s-1}}\cdot\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left[\frac{a_j(V)}{V}\right]^{n+s}}\left(\frac{a_j^{(1)}}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{a_j^{(2)}}{2!}\right)^{i_2}\dots\left(\frac{a_j^{(m)}}{m!}\right)^{i_m}.$$

Здесь суммирование проводится по всем положительным решениям уравнения $i_1+2i_2+3i_3+\dots+mi_m=m$,

$$s=i_1+i_2+\dots+i_m\;,$$

$$a_j^{(i)}=a_j^{(i)}(V;x_1,\dots,x_i)\;,$$

$P(1,\dots,m)$ – оператор, симметризующий функцию по переменным $(y_1,\dots,y_m)$. Выпишем несколько первых коэффициентных функций

$$B_1^{(n)}(V;x_1)=-n\,2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^{(1)}(V;x)}{\left[\frac{a_j(V)}{V}\right]^{n+1}}\;;$$

$$B_2^{(n)}(V;x_1,x_2)=-n\,2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^{(2)}(V;x_1,x_2)}{\left[\frac{a_j(V)}{V}\right]^{n+1}}+ \qquad (4.11)$$

$$+\frac{n(n+1)}{V}\cdot 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^{(1)}(V;x_1)\,a_j^{(1)}(V;x_2)}{\left[\frac{a_j(V)}{V}\right]^{n+2}}\;;$$

$$B_3^{(n)}(V;x_1,x_2,x_3)=-n\cdot 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^{(3)}(V;x_1,x_2,x_3)}{\left[\frac{a_j(V)}{V}\right]^{n+1}}+$$

$$+\frac{n(n+1)}{V}\cdot 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{P(1,2,3)\,a_j^{(1)}(V;x_1)\,a_j^{(2)}(V;x_2,x_3)}{\left[\frac{a_j(V)}{V}\right]^{n+2}}-$$

$$-\frac{n(n+1)(n+2)}{V^2}\cdot 2\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{V}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j^{(1)}(V;x_1)\,a_j^{(1)}(V;x_2)\,a_j^{(3)}(V;x_3)}{\left[\frac{a_j(V)}{V}\right]^{n+3}}$$

и т.д.

Согласно результатам теории возмущений, существуют конечные пределы для любых n и m :

$$B_m^{(n)}(x_1,\dots,x_m)=\lim_{V\to\infty}B_m^{(n)}(V;x_1,\dots,x_m)\,, \qquad (4.12)$$

причем $B_m^{(n)}(x_1,\dots,x_m)$–трансляционно инвариантная функция и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|B_m^{(n)}(x_1,\dots,x_m)\right|^{\frac{1}{n}}\leq\frac{1}{g_0}\;, \qquad (4.13)$$

поскольку ряды теории возмущений сходятся при $|g|<g_0$.

Дальнейшая задача состоит в изучении свойств пределов при $V\to\infty$ в (4.8) и (4.12).

§5. Формула Йенсена и предел при $V\to\infty$

Пусть целая функция $F_V[\zeta,\varphi]$ в (4.I) имеет нули в точках $a_j(V,\varphi)=\rho_j(V,\varphi)e^{i\theta_j(V,\varphi)}$. Обозначим через $n_{V,\varphi}(R)$ число нулей этой функции в круге $|\zeta|\leq R$. Воспользуемся формулой Йенсена (см., например, /5/):

$$\sum_{j=1}^{N(R)} \ln \frac{R}{r_j(V,\varphi)} = \int_0^R \frac{dr\, n_{V,\varphi}(r)}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \ln \left| F_V[Re^{i\theta},\varphi] \right| , \tag{5.1}$$

где

$$r_{N(R)}(V,\varphi) < R < r_{N(R)+1}(V,\varphi). \tag{5.2}$$

Используя оценку (3.2), легко получить

$$\int_0^R \frac{dr}{r} n_{V,\varphi}(r) \leq \frac{2}{\pi} R , \tag{5.3}$$

так что оценка сверху не зависит от V. Из (5.2) и (5.3) следует, что

$$N(R) \leq n_{V,\varphi}(R) \leq \frac{2}{\pi} R. \tag{5.4}$$

В формуле (5.I) положим $R = AV$, где A - некоторое произвольное положительное число. Используя (5.I) и (5.4), получим

$$\frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N(VA)} \ln \frac{A}{\left[\frac{r_j(V,\varphi)}{V}\right]} \leq \frac{2}{\pi} A \tag{5.5}$$

при любых A. Это значит, что существует предел

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N(VA)} \ln \frac{A}{\left[\frac{r_j(V,\varphi)}{V}\right]} = B(A,\varphi) \leq \frac{2}{\pi} A. \tag{5.6}$$

Напомним, $\varphi = const.$

Сумма в (5.5) может быть записана в виде интеграла:

$$\frac{1}{V} \sum_{j=1}^{N(VA)} \ln \frac{A}{\left[\frac{r_j(V,\varphi)}{V}\right]} = \int_0^{A_1(V)} du \ln \frac{A}{r_V(u,\varphi)} = B_V(A,\varphi). \tag{5.7}$$

Здесь мы определили суммируемую функцию $r_V(u,\varphi)$, такую, что

$$r_V(u,\varphi) = \frac{r_j(V,\varphi)}{V} \quad \text{при} \quad \frac{j-1}{V} < u \leq \frac{j}{V} \quad (j=1,2,\dots) \tag{5.8}$$

и

$$A_1(V) = \frac{N(VA)}{V} \leq A . \tag{5.9}$$

Поскольку подынтегральная функция в (5.7) положительна и ограничена сверху в силу (5.7) при любых V и предел при $V\to\infty$ существует для любых $A>0$, то в силу теоремы о мажорантной сходимости (см., например, /6/) существует предел

$$\lim_{V\to\infty} \ln \frac{A}{r_V(u,\varphi)} = \ln \frac{A}{r(u,\varphi)} \in L , \tag{5.10}$$

где

$$\lim_{V\to\infty} \frac{r_{Vu}(V,\varphi)}{V} = \lim_{V\to\infty} r_V(u,\varphi) = r(u,\varphi).$$

Тогда соотношение (5.6) перепишется в виде

$$\int_0^{A_1} du \ln \frac{A}{r(u,\varphi)} = B(A,\varphi) , \tag{5.11}$$

где

$$A_1 = \lim_{V\to\infty} \frac{N(AV)}{V} \leq A .$$

Из соотношений (5.6), (5.10) и (5.11) следует, что $r(u,\varphi)$ - положительная монотонно растущая функция, такая, что при $u\to\infty$

$$r(u,\varphi) \longrightarrow const\cdot u . \tag{5.12}$$

Кроме того, функция $r(u,\varphi)$ аналитична в окрестности точки $\varphi=0$.

Далее известно, что существуют пределы

$$\mathcal{E}_n = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos n\,\theta_j(V)}{\left[\frac{\tau_j(V)}{V}\right]^n}, \tag{5.13}$$

причем

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\mathcal{E}_n}{n}\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{g_0}. \tag{5.14}$$

Из этих условий и (5.11) следует, что должен существовать предел

$$\lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\,\theta_j(V)}{\left[\frac{\tau_j(V)}{V}\right]^n}. \tag{5.15}$$

Поэтому, применяя теорему Фишера и Рисса (см.,[6]), получим

$$\lim_{V\to\infty} \theta_{Vu}(V) = \theta(u). \tag{5.16}$$

Таким образом, имеем

$$\lim_{V\to\infty} \frac{a_{Vu}(V)}{V} = \tau(u)\,e^{i\theta(u)} = a(u), \tag{5.17}$$

где $\tau(u)$ и $a(u)$-суммируемые функции. При этом, как следствие (5.14), получим, что функция $\tau(u)$ ограничена снизу и, согласно (5.12), растет линейно с ростом u :

$$g_0 \leq \tau(u) \underset{u\to\infty}{\longrightarrow} \text{const}\cdot u. \tag{5.18}$$

Окончательно, для поправки к энергии вакуума в n -ом порядке теории возмущений получим

$$\mathcal{E}_n = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{du}{[a(u)]^n} = 2\int_0^\infty \frac{du\,\cos n\,\theta(u)}{[\tau(u)]^n}. \tag{5.19}$$

Рассмотрим теперь пределы при $V\to\infty$ в выражениях для коэффициентных функций $B_m^{(n)}(V;x_1,..,x_m)$. В силу аналитичности всех рассматриваемых нами выражений в окрестности точки $\varphi=0$ и существования пределов в (4.12) и (5.11) при $V\to\infty$ заключаем, что

$$\lim_{V\to\infty} a_{Vu}^{(m)}(V;x_1,\ldots,x_m) = a^{(m)}(u;x_1,\ldots,x_m), \tag{5.20}$$

где $a^{(m)}(u;x_1,..,x_m)$- суммируемая функция, растущая на бесконечности при $u\to\infty$ не быстрее, чем линейно по u . Тогда

$$B_m^{(n)}(x_1,\ldots,x_m) = \lim_{V\to\infty} B_m^{(n)}(V;x_1,\ldots,x_m) = \\ = -n\,2\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{du\,a^{(m)}(u;x_1,\ldots,x_m)}{[a(u)]^{n+1}}. \tag{5.21}$$

Выпишем окончательно формулы, определяющие поправку к энергии вакуума и коэффициентные функции:

$$E(g) = -g\,a(0) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{g^n}{n}\,2\int_0^\infty \frac{du\,\cos n\,\theta(u)}{[\tau(u)]^n} = \\ = -g\,a(0) - \int_0^\infty du\left\{\ln\left(1-2\frac{g}{\tau(u)}\cos\theta(u)+\frac{g^2}{\tau^2(u)}\right)+2\frac{g}{\tau(u)}\cos\theta(u)\right\}, \tag{5.22}$$

где

$$a(0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\,\tilde{v}(\beta)\,e^{-\frac{1}{2}\beta^2 D(0)};$$

$$B_m(x_1,\dots,x_m) = g\,a^{(m)}(x_1,\dots,x_m) + 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=2}^{\infty} g^n \int_0^{\infty} \frac{du\, a^{(m)}(u;x_1,\dots,x_m)}{[a(u)]^{n+1}} =$$

$$= g\,a^{(m)}(x_1,\dots,x_m) + 2\,\mathrm{Re}\, g^2 \int_0^{\infty} \frac{du\, a^{(m)}(u;x_1,\dots,x_m)}{[a(u)]^2[a(u)-g]}, \tag{5.23}$$

где

$$a^{(m)}(x_1,\dots,x_m) = a_m \int dy \prod_{j=1}^{m} \delta(y-x_j), \quad a_m = \int_{-\infty}^{\infty} d\beta\, \tilde{\sigma}(\beta)(i\beta)^m e^{-\frac{1}{2}\beta^2 D(y)}.$$

Эти представления справедливы при $|g| < g_0$. В силу (5.12) и (5.20) интегралы (5.23) хорошо определены.

Дальнейшая задача состоит в продолжении полученных выражений в область $|g| > g_0$. Для этого нам необходимо знать фазу $\theta(u)$ траектории нулей $a(u) = r(u)e^{i\theta(u)}$.

§6. Формула Карлемана и положение нулей

Если некоторая функция $F(z)$ аналитична и конечной степени в правой полуплоскости, имеет нули в точках $a_k = r_k e^{i\theta_k}$ и $F(0)=1$, то для нее справедлива формула Карлемана (см., например, /5/):

$$\sum_{\mathrm{Re}\, a_k > 0} \frac{\cos\theta_k}{r_k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2} \ln|F(iy)F(-iy)| + \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\pi R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos\theta \ln|F(Re^{i\theta})| - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\, F'(0). \tag{6.1}$$

Определим функцию

$$F_v(\zeta, b) = \frac{F_v(\zeta+b)}{F_v(b)}. \tag{6.2}$$

Функция $F_v(\zeta, b)$ имеет нули в точках

$$\zeta = a_j(v) - b = r_j(v)e^{i\theta_j(v)} - b. \tag{6.3}$$

Применим к функции $F_v(\zeta, b)$ формулу Карлемана. Получим

$$\sum_{\mathrm{Re}(a_j(v)-b)>0} \mathrm{Re}\,\frac{1}{a_j(v)-b} = J_1(v) + J_2(v) + J_3(v), \tag{6.4}$$

где

$$J_1(v) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{dy}{y^2} \ln|F_v(iy,b)F_v(-iy,b)|, \tag{6.5}$$

$$J_2(v) = \frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \cos\theta \ln|F_v(Re^{i\theta}, b)|, \tag{6.7}$$

$$J_3(v) = -\frac{1}{2} F_v'(0, b). \tag{6.8}$$

Положим $b = g_1 V$, где $g_1 > 0$. Тогда в пределе $V\to\infty$ получим для левой части равенства (6.4):

$$\lim_{V\to\infty} \sum_{\mathrm{Re}(a_j(v)-g_1 V)>0} \mathrm{Re}\,\frac{1}{a_j(v)-g_1 V} = \lim_{V\to\infty}\frac{1}{V}\sum_{\mathrm{Re}\left(\frac{a_j(v)}{v}-g_1\right)>0} \mathrm{Re}\,\frac{1}{\left[\frac{a_j(v)}{v}\right]-g_1} = \int_{G(g_1)} du\, \mathrm{Re}\,[r(u)e^{i\theta(u)} - g_1]^{-1} \geq 0, \tag{6.9}$$

где интегрирование по u проводится по области

$$G(g_1) = \{u:\ \mathrm{Re}[r(u)e^{i\theta(u)} - g_1] > 0\}. \tag{6.10}$$

Далее имеем, используя оценки §3:

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \lim_{v\to\infty} J_1(v) = 0\,, \\
J_2 &= \lim_{v\to\infty} J_2(v) = \frac{1}{2}\,, \\
J_3 &= \lim_{v\to\infty} J_3(v) = -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}
\tag{6.II}
$$

Отсюда следует, что при любых $g_1 > 0$

$$\int\limits_{G(g_1)} du \, \mathrm{Re}\, \frac{1}{\tau(u) e^{i\theta(u)} - g_1} = 0. \tag{6.I2}$$

Поскольку подынтегральная функция положительна, это может быть лишь в случае, если

$$\frac{\pi}{2} \le \theta(u) \le \pi\,. \tag{6.I3}$$

Для нечетных потенциалов в силу симметрии функции

$$F_v(g,0) = F_v(-g,0)$$

получим

$$\theta(u) = \frac{\pi}{2}. \tag{6.I4}$$

Для четных потенциалов на основе наших оценок можно лишь сказать, что

$$\frac{\pi}{2} \le \theta(u) \le \pi\,. \tag{6.I5}$$

Далее все формулы будем получать лишь для нечетных потенциалов. Для поправки к энергии вакуума (5.22) и коэффициентных функций (5.23) тогда получим:

$$E(g) = -\int_0^\infty du \, \ln\left(1 + \frac{g^2}{\tau^2(u)}\right)\,, \tag{6.I6}$$

$$
\begin{aligned}
B_m(x_1,\ldots,x_m) &= g\, a^{(m)}(x_1,\ldots,x_m) + \\
&+ 2g^2 \mathrm{Re}\, i \int_0^\infty \frac{du\, a^{(m)}(u; x_1,\ldots,x_m)}{\tau^2(u)[\tau(u) - ig]}\,,
\end{aligned}
\tag{6.I7}
$$

или

$$
\begin{aligned}
T_m(p_1,\ldots,p_m) &= g a_m + \\
&+ 2g^2 \mathrm{Re}\, i \int_0^\infty \frac{du\, \tilde{a}^{(m)}(u; p_1,\ldots,p_m)}{\tau^2(u)[\tau(u) - ig]}\,,
\end{aligned}
\tag{6.I8}
$$

где a_m связана с $a^{(m)}$ формулой (I.I6).

Таким образом, мы видим, что особенности в комплексной g-плоскости находятся на мнимой оси. На вещественной оси g никаких особенностей нет. Поэтому полученные формулы дают представление функций при любых вещественных константах связи.

Из условий (5.I2) и (5.20) следует, что при $g \to \pm\infty$

$$
\begin{aligned}
E(g) &= O(g)\,, \\
T_m(p_1,\ldots,p_m) &= O(g)\,,
\end{aligned}
\tag{6.I9}
$$

т.е. все матричные элементы S-матрицы растут не быстрее, чем линейно с ростом g.

§7. Функция Грина в физической области

Представление (6.I8) для амплитуд $T_m(p_1,\dots,p_m)$ было получено в евклидовой области импульсных переменных $(p_{1E},\dots,p_{mE})$, где эти амплитуды хорошо убывают при $p_{jE}^2 \to +\infty$. Заметим, что выше мы нигде не вводили специальных индексов для евклидовых импульсов, поскольку везде предполагалось, что мы работаем в евклидовом пространстве. При продолжении в физическую область $p_{jE}^2=-p_j^2$ любые амплитуды $T_m(p_1,\dots,p_m)$, где p_j - уже физические импульсы, растут при $p_j^2 \to +\infty$ в каждом порядке теории возмущений как $\exp\{n(p^2\ell^2)^{\rho}\}$, где n -порядок теории возмущений, а ρ - порядок роста нелокального формфактора $[K(p^2)]^2$. Возникает вопрос: как ведут себя полные амплитуды при $p^2 \to +\infty$ в физической области? В этом параграфе мы покажем, что двухточечная функция Грина ограничена при $p^2 \to +\infty$. Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что в физической области любые амплитуды $T_m(p_1,\dots,p_m)$ ограничены.

Итак, рассмотрим двухточечную функцию Грина $(p^2=-p_E^2)$:

$$G(g,p^2)=T_2(p_E,-p_E)=\int dy_E\, e^{ip_E y_E} B_2\left(g;\frac{y_E}{2},-\frac{y_E}{2}\right) \qquad (7.1)$$

для нечетных функций взаимодействия. Воспользовавшись представлением (6.I8), получим

$$G(g,p^2)=2g^2\,\mathrm{Re}\, i\int_0^\infty \frac{du\,\tilde{a}^{(2)}(u;p_E,-p_E)}{z^2(u)[z(u)-ig]}. \qquad (7.2)$$

С другой стороны, представим $G(g,p^2)$ в виде ряда теории возмущений, согласно (I.I7):

$$G(g,p^2)=\sum_{n=1}^{\infty} g^{2n} G_{2n}(p^2), \qquad (7.3)$$

где

$$G_{2n}(p^2)=\frac{1}{(2n)!}\int_{-\infty}^{\infty} d\beta_1\,\tilde{v}(\beta_1)\, e^{-\frac{1}{2}\beta_1^2 D(0)}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} d\beta_n\,\tilde{v}(\beta_n)\, e^{-\frac{1}{2}\beta_n^2 D(0)}\times \qquad (7.4)$$

$$\times n^4\int dx_1\dots\int dx_n\,\delta(x_1+\dots+x_n)\Big\{\prod_{i<j}\big(1+w(\beta_i\beta_j,x_i-x_j)\big)\Big\}_{c\theta}\sum_{i,j=1}^{n}\beta_i\beta_j\, e^{ip_E(x_i-x_j)}.$$

Поскольку в ряд теории возмущений дают только четные степени g, то представление (7.2) перепишется в виде:

$$G(g,p)=2g^2\int_0^\infty \frac{du\,\tilde{a}(u,p_E)}{z(u)[z^2(u)+g^2]}. \qquad (7.5)$$

Введем новые переменные

$$t=\frac{g_0}{z(u)},\quad \lambda^2=\frac{g^2}{g_0^2},\quad p^2=-p_E^2=s, \qquad (7.6)$$

тогда представление (7.5) может быть переписано в виде

$$G(g,p^2)=\lambda^2\int_{-1}^{1}\frac{dt\,A(t,s)}{1+\lambda^2t^2}, \qquad (7.7)$$

где $A(t,s)$ - ограниченная суммируемая функция по t на отрезке $-1\leqslant t\leqslant 1$.

Разлагая (7.7) в ряд по λ^2 и сравнивая с (7.4), получим

$$G_{2n}(s)=\frac{(-)^n}{g_0^{2n}}\int_{-1}^{1}dt\,t^{2(n-1)}A(t,s). \qquad (7.8)$$

Из условия сходимости ряда теории возмущений следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \left| G_{2n}(s) \right|^{\frac{1}{2n}} \leq \frac{1}{g_0} \tag{7.9}$$

при всех евклидовых p_E^2, т.е. при $p^2 = s \leq 0$.

Наша задача-продолжить функцию Грина $G(g,s)$ в область физических значений p^2, т.е. в область $p^2 = s > 0$.

Анализ ряда теории возмущений, проведенный в /I/, показал, что при $s \to +\infty$

$$G_{2n}(s) = O\left(exp\{(2n-1)(s\ell^2)^\rho\}\right), \tag{7.10}$$

где ρ - порядок роста нелокального формфактора $[K(p^2)]^2$ в (I.5).

Разложим функцию $A(t,s)$ в (7.7) в ряд по ортогональным полиномам Чебышева 2-ого рода (см., например, /7/)

$$A(t,s) = \sqrt{1-t^2}\sum_{m=1}^{\infty} A_{2m}(s)\, U_{2m}(t), \tag{7.11}$$

где полиномы $U_{2m}(t)$ определяются производящей функцией

$$\frac{1}{1-2tw+w^2} = \sum_{m=0}^{\infty} w^m \cdot U_m(t) \tag{7.12}$$

и удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_{-1}^{1} dt\sqrt{1-t^2}\, U_m(t)\, U_{m'}(t) = \frac{\pi}{2}\delta_{mm'}. \tag{7.13}$$

Сравнение формул (7.II), (7.8) и (7.I0) дает

$$A_{2m}(s) = O\left(exp\{(2m+1)(s\ell^2)^\rho\}\right) \tag{7.14}$$

при $s \to +\infty$.

Для аналитического продолжения в область положительных вещественных s поступим стандартным образом. Прежде всего заметим, что ряд (7.II) определяет аналитическую функцию по s в некоторой окрестности полуоси $s \leq 0$. Введем функцию

$$h(t,s) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} e^{-(2m+1)x} A_{2m}(s)\, U_{2m}(t), \tag{7.15}$$

где $x = [(s_0+s)\ell^2]^\rho$ и $s_0 > \varepsilon > 0$. Этот ряд определяет ограниченную аналитическую функцию при $-1 \leq t \leq 1$ и $-s_0 \leq Re\, s \leq 0$. Тогда из (7.I5) получим

$$A_{2m}(s) = e^{(2m+1)x}\int_{-1}^{1} d\tau\, h(\tau,s)\sqrt{1-\tau^2}\; U_{2m}(\tau). \tag{7.16}$$

Подставив (7.I6) в (7.II) и (7.7), получим

$$G(g,s) = \lambda^2 e^{x}\int_{-1}^{1}\frac{dt\sqrt{1-t^2}}{1+\lambda^2 t^2}\sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}(t)\, e^{2mx} \times \tag{7.17}$$
$$\times \int_{-1}^{1} d\tau\sqrt{1-\tau^2}\, h(\tau,s)\, U_{2m}(\tau).$$

Порядок интегрирования по t и суммирования по m можно поменять местами и воспользоваться равенством

$$\int_{-1}^{1}\frac{dt\sqrt{1-t^2}\; U_{2m}(t)}{1+\lambda^2 t^2} = 2\pi(-)^m\left(\sqrt{1+\lambda^2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{1+\lambda^2}-1}{\sqrt{1+\lambda^2}+1}\right)^m. \tag{7.18}$$

Тогда в области

$$\left|\frac{\sqrt{1+\lambda^2}-1}{\sqrt{1+\lambda^2}+1}\, e^{2x}\right| < 1 \tag{7.19}$$

ряд по m в (7.17) сходится абсолютно, и мы можем поменять последовательность суммирования по m и интегрирования по τ. После некоторых преобразований получим

$$G(g,s)=\pi\lambda^2(\sqrt{1+\lambda^2}-1)^2\int_{-1}^{1}\frac{d\tau\sqrt{1-\tau^2}\,h(\tau,s)\,e^{x}}{\lambda^2\tau^2+(\mathrm{ch}\,x-\sqrt{1+\lambda^2}\,\mathrm{sh}\,x)^2}\times \tag{7.20}$$

$$\times\left[e^{x}(\mathrm{ch}\,x-\sqrt{1+\lambda^2}\,\mathrm{sh}\,x)-2\tau^2(\sqrt{1+\lambda^2}+1)\right].$$

Представление (7.20) получено в области (7.19), но оно может быть продолжено в область любых положительных $s>-s_0$, поскольку структура подынтегрального выражения в (7.20) такова, что функция $G(g,s)$ не имеет особенности при

$$\mathrm{ch}\,x-\sqrt{1+\lambda^2}\,\mathrm{sh}\,x=0.$$

Ближайшая особенность $G(g,s)$ как функции s возникает при

$$\lambda^2+(\mathrm{ch}\,x-\sqrt{1+\lambda^2}\,\mathrm{sh}\,x)^2=0,$$

откуда

$$x=[(s+s_0)\ell^2]^{\rho}=\pm i\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+\lambda^2}+1}{\sqrt{1+\lambda^2}-1}. \tag{7.21}$$

Таким образом, аналитическая структура функции Грина $G(g,s)$ в окрестности вещественной оси s определяется свойствами функции $h(\tau,s)$(7.15), т.е. свойствами ряда теории возмущений. В результате суммирования ряда теории возмущений не появляется никаких дополнительных особенностей в физической области импульсных переменных.

Рассмотрим теперь поведение функции Грина при больших энергиях в физической области. Из представления (7.20) при $s\to+\infty$ имеем

$$G(g,s)=8\pi\frac{(\lambda^2-1)}{\lambda^2}(\sqrt{1+\lambda^2}+1)^2e^{-x}\int_{-1}^{1}d\tau\sqrt{1-\tau^2}\,h(\tau,s)\,\tau^2=$$

$$=O(e^{-x}), \tag{7.22}$$

поскольку $h(\tau,s)$ -ограниченная при $s\to\infty$ функция. Таким образом, полная функция Грина ограничена при больших энергиях, хотя в каждом порядке теории возмущений $G(g,s)$ растет очень сильно.

Аналогичные выкладки могут быть проведены для любых матричных элементов S-матрицы.

В заключение выражаю благодарность Д.И.Блохинцеву, Б.Н.Валуеву, В.А.Загребнову, В.В.Приезжеву и В.К.Федянину за обсуждения.

Литература:

1. Г.В.Ефимов. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. "Наука", Москва, 1977.
2. Д.Я.Петрина, В.И.Скрипник, ТМФ, 8, 368, 1971.
3. А.Г.Басуев, ТМФ, 16, 281, 1973.
4. Г.Г.Харди, Д.Е.Литтльвуд, Г.Полиа. Неравенства. ИЛ, Москва, 1948.
5. Е.Титчмарш. Теория функций. Гостехиздат, Москва, 1951.
6. Г.Е.Шилов, Б.Л.Гуревич. Интеграл, мера и производная. "Наука", Москва, 1967.
7. Г.Сегё. Ортогональные многочлены. Физматгиз, Москва, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 мая 1977 года