

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С323.5

К-887

3704/2-77

А.В.Кудинов, С.П.Кулешов

19/IX-77

P2 - 10636

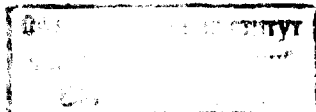
МЕТОД ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ
И ПРОБЛЕМА ЭЙКОНАЛА. II

1977

P2 - 10636

А.В.Кудинов, С.П.Кулешов

МЕТОД ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ПУТЕЙ
И ПРОБЛЕМА ЭЙКОНАЛА. II



Кудинов А.В., Кулешов С.П.

P2 - 10636

Метод прямолинейных путей и проблема эйконала. II

В работе исследуется модель скалярной электродинамики. В пренебрежении радиационными поправками и замкнутыми нуклонными линиями показана справедливость приближения эйконала.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Koudinov A.V., Kuleshov S.P.

P2 - 10636

Straight-Line Path Method and Eikonal Problem. II

A model of the scalar electrodynamics is studied. The validity of the eikonal approximation is shown by neglecting the radiative corrections and nucleon loops.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

1. Введение

Эйкональное представление амплитуды рассеяния^{/1/} может быть эффективно использовано для теоретического анализа экспериментальных данных^{/2/}. В связи с этим возникла необходимость обоснования приближения эйконала в рамках квантовой теории поля. Плодотворным в этой области оказался подход, использующий метод функционального интегрирования. При этом возникают проблемы двух типов.

Во-первых, использование метода континуальных интегралов позволяет получить замкнутые выражения для амплитуды рассеяния в пределе $s \rightarrow \infty$; t - фиксировано / s и t - обычные мандельштамовские переменные/^{/3/}. Преимущество метода состоит в том, что удается просуммировать вклады определенного типа бесконечной последовательности диаграмм.

При этом, естественно, континуальные интегралы необходимо привести к гауссову виду и основная проблема состоит в выборе подходящего приближения. Одна из возможностей - метод прямолинейных путей^{/4/}. На языке диаграмм Фейнмана этот метод является дальнейшим развитием так называемого $k_i k_j$ -приближения^{/5/}, т.е. означает отбрасывание в знаменателях пропагаторов нуклонов произведений типа $k_i k_j$, где k_i и k_j - импульсы мезонов.

Вторая проблема состоит в обосновании используемого приближения. В пределе $s \rightarrow \infty$, t - фиксировано, приближение прямолинейных путей справедливо, если имеются две лидирующие частицы, переносящие большой импульс. Это означает, что ведущий вклад в асимпто-

тику амплитуды рассеяния дают две конфигурации линий каждой диаграммы, так называемые t -пути, совпадающие с "траекториями" лидирующих частиц. Справедливость эйконоального приближения в низших порядках теории возмущений исследовалась в работах /6/. Произвольные лестничные диаграммы с перекрестиями в модели с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{int} = g : \phi^2(x) \psi(x) :$$

анализировались в работах /7,8/, в которых было указано на тот факт, что в восьмом порядке по константе связи g появляются неэйкональные вклады, имеющие один порядок с эйкональными, а в более высоких порядках неэйкональные вклады являются доминирующими. При этом выяснилось, что эйкональное представление для амплитуды рассеяния справедливо лишь при определенных соотношениях /8/ между энергией и массами реальных и виртуальных частиц.

Однако суммирование эйкональных вкладов в скалярном случае имеет чисто академический интерес, так как вклад диаграммы порядка $2N$ по g имеет вид

$$f_{2N} \sim \frac{a}{s^{N-1}}$$

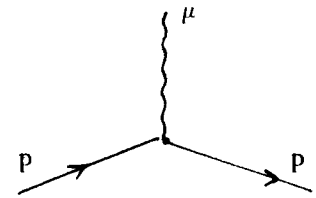
и фактически существенен только первый член разложения. Ситуация меняется в случае наличия частиц со спином /7/. В настоящей работе исследуется модель скалярной электродинамики, где, в отличие от скалярного случая, диаграммы всех порядков по константе связи дают вклады одного порядка по s . Кроме того, за счет появления числителей подавляются вклады неэйкональных t -путей.

2. Вычисление импульсных интегралов

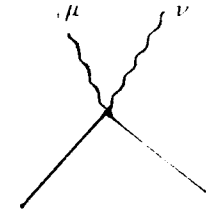
В качестве объекта исследования выберем амплитуду рассеяния двух скалярных нуклонов в модели:

$$\mathcal{L}_{int} = ig : \phi^*(x) \vec{\partial}_\mu \phi(x) A^\mu(x) : + \frac{1}{2} g^2 : \phi^*(x) \phi(x) A^2(x) :,$$

в пренебрежении радиационными поправками и замкнутыми нуклонными линиями. Этому лагранжиану взаимодействия соответствуют вершины двух типов:

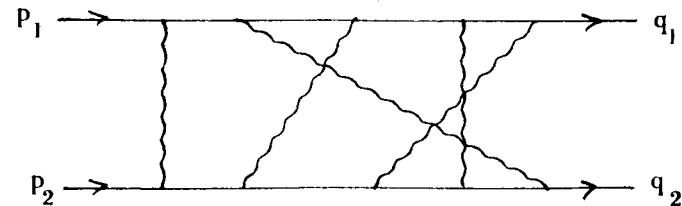


(1) $-ig(p+p')_\mu$



(2) $2i g^2 g^{\mu\nu}$

Рассмотрим сначала диаграммы с вершинами только типа /1/, так как есть основания предположить, что именно они дают ведущий вклад в амплитуду рассеяния при $s \rightarrow \infty$. Таким образом, рассматриваемая амплитуда представляется в виде суммы диаграмм типа:



где p_1 и p_2 - импульсы входящих, а q_1 и q_2 - импульсы выходящих частиц.

Для исследования асимптотического поведения вклада каждой из таких диаграмм в амплитуду рассеяния необходимо его замкнутое выражение в виде параметрического интеграла. Переход в α -представление* и интегрирование

* В отличие от работы /8/, где используется фейнмановская параметризация, в данном случае предпочтительнее α -представление, для которого процедура перенормировок лучше разработана.

по независимым внутренним импульсам позволяют получить интегральное представление для амплитуды^{/9/}. Но прежде чем привести необходимые формулы, напомним несколько определений. Каждой линии связной диаграммы Фейнмана G сопоставим направление и параметр a ; $\Gamma = (i, j)$ означает, что линия Γ начинается в вершине i и кончается в вершине j . Пусть диаграмма имеет ℓ независимых петель. Деревом G назовем односвязную поддиаграмму, получающуюся из G удалением ℓ линий и не имеющую ни одной замкнутой петли, 2-деревом-двусвязную поддиаграмму G , получающуюся из G удалением $\ell + 1$ линий и не имеющую замкнутых петель. Удаленные линии назовем соответственно хордами деревьев и 2-деревьев. Для обозначения деревьев и 2-деревьев используем символы T_1 и T_2 . Любое 2-дерево, которое становится деревом при подстановке обратно удаленной линии Γ будем обозначать $T_2(\Gamma)$. Любое 2-дерево, которое становится деревом при подстановке обратно либо линии Γ , либо линии s , будем обозначать $T_2(\Gamma, s)$.

Для произведений ℓ и $\ell + 1$ параметров, ассоциированных с хордами дерева или 2-дерева, примем обозначения

\prod_a и $\prod_a^{\ell+1}$ соответственно. Обозначение L_i примем для компоненты 2-дерева, содержащей вершину i ; $\sum_{k \in L_i} p_k$

означает алгебраическую сумму внешних импульсов, присоединенных к вершинам компоненты L_i 2-дерева.

Тогда, с точностью до несущественного нормировочного множителя, вклад диаграммы в амплитуду рассеяния имеет вид

$$f_G \approx \int_0^\infty \left(\prod_{r=1}^N da_r \right) \Delta^{-2}(a) \exp[-i(\sum_{r=1}^N a_r m_r^2 + P(a, p))] M(a, J), \quad /1/$$

где N - число линий диаграммы;

$$\Delta(a) = \sum_{T_1} \left(\prod a \right);$$

$$\Delta(a) P(a, p) = \sum_{T_2} \left(\prod a \right) \left(\sum_{a \in L_i} p_a \right)^2;$$

$$M(a, J) = \sum_{k=0}^{\infty} M^{(k)}(a, J) = \exp \left[\frac{i}{4} \sum_{r,s=1}^N \frac{H_{r,s}(a)}{\Delta(a)} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial J_r^\mu} \frac{\partial}{\partial J_s^\nu} \right] M^{(0)}(J);$$

$$M^{(k)}(a, J) = \left[\frac{i}{4} \sum_{r,s=1}^N \frac{H_{r,s}(a)}{\Delta(a)} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial J_r^\mu} \frac{\partial}{\partial J_s^\nu} \right]^k \frac{1}{k!} M^{(0)}(J);$$

$$J_r^\mu = \frac{1}{\Delta(a)} F_r^\mu(a, p);$$

$$F_r^\mu(a, p) = a_r^{-1} \sum_{T_2(r)} \left(\prod a \right) \left(\sum_{k \in L_i} p_k^\mu \right); \quad \text{где } r = (i, j);$$

$$H_{r,s}(a) = (a_r a_s)^{-1} \sum_{T_2(r,s)} \left(\prod a \right) \epsilon_{ij,kl};$$

где

$$r = (i, j); \quad s = (k, \ell); \quad r \neq s;$$

$$\epsilon_{ij,kl} = \begin{cases} +1, & \text{если } i \in L_k; j \in L_\ell; \\ -1, & \text{если } i \in L_\ell; j \in L_k; \end{cases}$$

$$H_{r,r}(a) = -\frac{\partial \Delta(a)}{\partial a_r};$$

$M^{(0)}(q)$ - числитель, который появляется в обычных пра-
вилах Фейнмана. Это полином по q , где q_i - импульсы
внутренних линий, если есть связи с производными и
пропагаторы частиц со спином. $M^{(0)}(J)$ получается из
 $M^{(0)}(q)$ заменой импульса, текущего в положительном на-
правлении каждой линии, соответствующей величиной J_r .

3. Перенормировки и вычисление асимптотик

Как показывает вычисление индексов расходимости,
все исследуемые диаграммы расходятся логарифмичес-
ки и имеют расходящиеся подграфы*. Для получения
конечных амплитуд необходимо произвести R-операцию,
причем вычитание удобнее всего производить в нуле
внешних импульсов. Для диаграмм первого класса, т.е.
таких, для которых любые два расходящихся подграфа
либо не пересекаются, либо один из них целиком содер-
жится в другом, R-операция полностью факторизуется.
Для устранения расходимостей в этом случае доста-
точно параметры всех линий каждого расходящегося
подграфа домножить на соответствующее ν_i и поде-
литель на f оператором R_{ν_i} :

$$R_{\nu_i} = \int_0^1 d\nu_i \frac{\partial}{\partial \nu_i} \nu_i^{\ell_i},$$

где ℓ_i - число линий данного расходящегося подграфа.

Для диаграмм второго класса положение несколько
усложняется, так как в этом случае R-операция пол-
ностью не факторизуется. Но, как будет видно из даль-
нейшего, перенормировки на ведущую асимптотику не
влияют.

При исследовании асимптотического поведения ам-
плитуды в пределе $s \rightarrow \infty$; t - фиксировано, воспользуемся

* Отметим, что имеющиеся в скалярной электродина-
мике инфракрасные расходимости для обоснования эй-
конального приближения несущественны и могут быть
устранены введением фиктивной фотонной массы.

методом, основанным на преобразовании Меллина. При-
ведем основные результаты, полученные в работах /10,6/.

t -подграфом назовем такую связную совокупность
линий диаграммы, что если стянуть все эти линии в
точку, то диаграмма разбивается на две части, соеди-
ненные лишь в одной вершине /в которую стянут t -под-
граф/, причем p_1 и q_1 присоединяются к одной из
частей, а p_2 и q_2 - к другой.

Эффективной длиной t -подграфа назовем число

$$\rho = 2n - \ell - 2 = \ell - 2k;$$

где n - число вершин, ℓ - число линий, а k - число
замкнутых петель t -подграфа. Наиболее сильный вклад
в асимптотику дают те области интегрирования по a -
параметрам, в которых параметры всех линий одного
или нескольких t -подграфов близки к нулю.

В случае отсутствия $M(a, J)$ амплитуда рассеяния
будет при $s \rightarrow \infty$ вести себя как $s^{-\rho_0} (\ln s)^\mu$, где ρ_0 -
наименьшая возможная эффективная длина t -подграфа,
 $\mu = \nu$ при $\rho_0 \leq 0$ и $\mu = \nu - 1$ при $\rho_0 > 0$, ν - число членов
наибольшей допустимой последовательности t -под-
графов длины ρ_0 . За определением допустимой после-
довательности снова отсылаем к работам /10/.

При наличии $M(a, J)$ асимптотическое поведение ам-
плитуды изменится, так как $M(a, J)$ само является
полиномом по степеням s , причем коэффициенты есть
функции a . Для исследования асимптотики сделаем,
как обычно, λ -преобразование параметров линий t -
подграфа:

$$a_i = \lambda a'_i,$$

$$\prod da_i = \delta(1 - \sum a'_i) \lambda^{\ell-1} d\lambda \prod da'_i.$$

Тогда $M(a, J)$ будет иметь вид:

$$M(a, J) = \sum_{(a, b)} \lambda^a s^b f_{ab}(a, a').$$

Очевидно, что если $\max_{(a, b)} (b - a) = d$, то с учетом

$M(a, J)$ асимптотическое поведение амплитуды рассеяния

будет определяться приведенной длиной t -подграфа, равной $\rho-d$, а исследование асимптотического поведения сведется к отысканию t -подграфов с наименьшей приведенной длиной. Так как величина ρ известна для любого t -подграфа заранее, задача состоит в определении величины d .

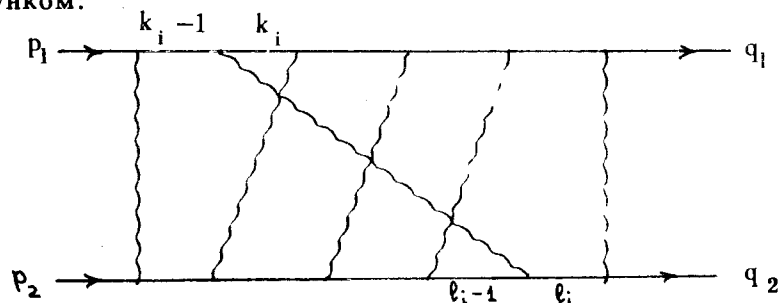
Наличие расходимостей влияет на асимптотику диаграммы следующим образом: если t -подграф содержит расходящиеся поддиаграммы, то степень логарифма может измениться, так как ν -параметр расходящейся поддиаграммы и a -параметры линий t , не входящих в нее, дают новый t -путь.

4. Исследование $M^{(0)}(J)$

Рассмотрим произвольную диаграмму порядка $2N$. Для нее

$$M^{(0)}(J) = \prod_{i=1}^N (J_{k_i-1} + J_{k_i}; J_{\ell_i-1} + J_{\ell_i});$$

каждое скалярное произведение соответствует одной из фотонных линий, принятые обозначения поясняются рисунком:



Выберем произвольный t -подграф, имеющий k независимых петель и ℓ линий, из которых a - фотонных. Пусть, для определенности, вершины, к которым присоединены внешние линии с импульсами p_1 и q_1 , принадлежат t -подграфу.

Разобьем все нуклонные линии /только для них соответствующие J_r и $H_{r,s}$ входят в $M(a, J)$ / на три группы:

- 1/ линии, не принадлежащие $t - \{1\}$;
- 2/ линии, принадлежащие t , снятие которых лишает t связности - $\{2\}$;
- 3/ линии, принадлежащие t , снятие которых не лишает его связности - $\{3\}$.

Прделаем λ -преобразование и рассмотрим J_r для линий каждого типа в отдельности. При этом

$$F_r \rightarrow \lambda^k [(p_1 - q_1) f_1(a) + p_2 f_2(a) + q_2 f_3(a) + O(\lambda)]; r \in \{1\};$$

так как для получения 2-дерева нужно разорвать все петли t -подграфа, т.е. по крайней мере k его линий войдут в число хорд. Если снято ровно k линий t , то p_1 и q_1 могут входить только в виде разности $(p_1 - q_1)$, так как при этом оставшиеся линии t образуют односвязный подграф и целиком входят в одну из компонент 2-дерева.

$$F_r \rightarrow \lambda^k [g_1(a, p, q) + O(\lambda)]; r \in \{2\};$$

так как после снятия линии типа 2 t -подграф разбивается на две компоненты, имеющие в общей сложности k петель, для размыкания которых по крайней мере еще k линий t должны войти в число хорд.

$$F_r \rightarrow \lambda^k [g_2(a, p, q) + O(\lambda)]; r \in \{3\};$$

$k-1$ линию t нужно включить в число хорд для размыкания оставшихся после снятия линии r $k-1$ петель t , еще одна линия t войдет в число хорд, так как после размыкания всех петель t -подграф станет деревом, а концы линии r должны принадлежать разным компонентам 2-дерева.

$$\Delta(a) \rightarrow \lambda^k (\tilde{\Delta}(a, a') + O(\lambda));$$

так как $\Delta(a)$ есть сумма произведений параметров хорд деревьев, для получения которых все петли t должны быть разомкнуты.

Следовательно:

$$J_r \rightarrow (p_1 - q_1) f_1'(a) + p_2 f_2'(a) + q_2 f_3'(a) + O(\lambda); r \in \{1\};$$

$$J_r \rightarrow g_1'(a, p, q) + O(\lambda); r \in \{2\};$$

$$J_r \rightarrow g_2'(a, p, q) + O(\lambda); r \in \{3\}.$$

Для скалярных произведений будем иметь

$$(J_r, J_s) = A s^0 + B \lambda s + O(\lambda); \quad r, s \in \{1\};$$

так как $(p_1 - q_1, p_2)$, $(p_1 - q_1, q_2)$, (p_2, q_2) , $(p_1 - q_1)^2$ имеют нулевой порядок по s .

Во всех остальных случаях скалярные произведения могут давать вклад в асимптотику порядка s , что соответствует максимально возможной величине.

Таким образом, каждый из сомножителей $(J_{k_i - 1} + J_{k_i}; J_{\ell_i - 1} + J_{\ell_i})$ будет величиной порядка s , если хотя бы один из четырех импульсов соответствует нуклонной линии t -подграфа. Если все четыре импульса соответствуют линиям типа $\{1\}$, то скалярное произведение имеет порядок s^0 .

Следовательно, для произвольного t -подграфа и $M^{(0)}(J)$ величина d задается формулой

$$d = N - m;$$

где m - число фотонных линий, не имеющих общих вершин с t -подграфом.

5. Асимптотическое поведение $I_0(s, t)$

Представим амплитуду рассеяния f в виде

$$f = \sum_{h=0}^{\infty} I_h(s, t);$$

где $I_h^{h=0}$ соответствует замене $M(s, t)$ на $M^{(h)}(s, t)$ в /1/, и рассмотрим асимптотику $I_0(s, t)$ при $s \rightarrow \infty$.

Выберем произвольный t -подграф и найдем его приведенную длину, для чего достаточно вычислить величину m . t -подграф имеет $n = \ell + 1 - k$ вершин. Если a фотонных линий принадлежат t , то $n - 2a = \ell + 1 - k - 2a$ фотонных линий имеют одну вершину, принадлежащую t -подграфу, причем другие вершины этих линий t -подграфу не принадлежат, иначе добавление к t такой фотонной линии, не меняя m , уменьшит ρ на единицу.

Всего число существенных линий, т.е. таких линий, для которых скалярные произведения имеют порядок s , будет равно:

$$a + (n - 2a) = \ell + 1 - k - a.$$

Тогда для приведенной длины t -подграфа имеем:

$$\ell - 2k - (\ell + 1 - k - a) = a - k - 1.$$

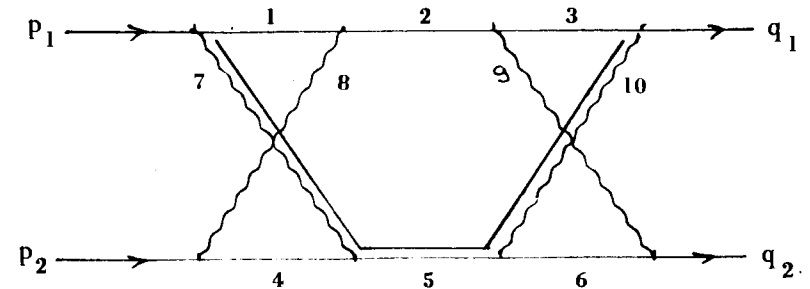
Очевидно, что для образования первой петли необходимы две фотонных линии, прибавление каждой новой петли требует каждый раз включения в t еще одной фотонной линии, следовательно, при $k \neq 0$

$$a - k - 1 \geq 0.$$

Если $k=0$, то можно получить минимально возможное значение приведенной длины, равное -1 . Это соответствует $a=0$, т.е. эйкональным t -путям, совпадающим с нуклонными дугами, и асимптотике

$$f \sim s \ln s.$$

В качестве примера рассмотрим диаграмму:

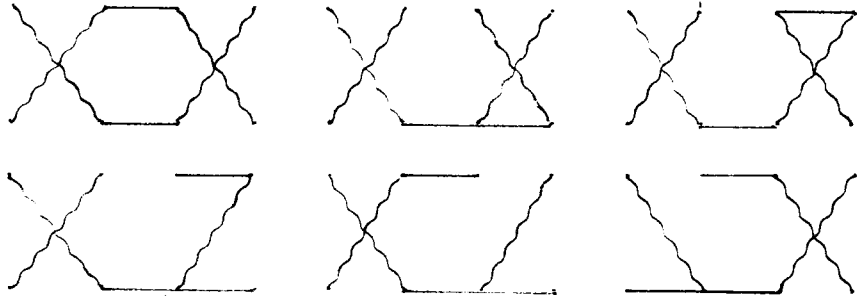


Вычислим для нее F_1 при условии, что параметры линий t -пути /5,7,10/ близки к нулю. В скалярной модели этот путь дает вклад в асимптотику того же порядка, что и эйкональные t -пути /1,2,3/ и /4,5,6/.

Представим F_1 в виде

$$F_1 = F_1^{(1)} + \lambda F_1^{(2)}.$$

$F_1^{(1)}$ соответствует сумме по 2-деревьям $T_2(I)$, для которых линии 5,7,10 не являются хордами. Таких 2-деревьев - 6:



$$F_1^{(2)} = a_3 a_4 a_6 (p_1 - q_1) - a_2 a_3 a_4 p_2 - a_2 a_4 a_6 p_2 - a_2 a_4 a_9 p_2 - a_3 a_4 a_9 p_2 + a_3 a_6 a_8 q_2.$$

Точный вид $F_1^{(2)}$ несущественен. Аналогично вычисляются F_2 и F_4 . Так как рассматриваемый t -путь не имеет замкнутых петель, то

$$\Delta(a, a', \lambda) \Big|_{\lambda=0} \neq 0.$$

Отсюда очевидно, что для фотонной линии 8

$$(J_1 + J_2, P_2 + J_4) = A s^0 + B \lambda s + O(\lambda),$$

как и было показано в общем случае. Аналогично скалярное произведение, соответствующее фотонной линии 9, тоже имеет эффективный порядок s^0 . Таким образом, t -путь /5,7,10/ может дать следующий вклад в асимптотику:

$$s^2 \times s^{-3} = s^{-1},$$

что на два порядка по s слабее вклада эйкональных t -путей.

6. Асимптотическое поведение $I_h(s, t)$

Для выяснения асимптотического поведения $I_h(s, t)$; $h > 0$, необходимо знать, как изменяются величины $N_{r,s}$

при λ -преобразовании параметров линий произвольного t -подграфа. Как и прежде, все нуклонные линии разделим на три группы /см. раздел 4/. Будем считать, что число независимых петель t -подграфа $k \geq 1$, при этом возможны восемь различных случаев:

$$1) N_{r,r}; r \in \{1\}.$$

$$N_{r,r} = - \frac{\partial \Delta(a)}{\partial a_r}; \Delta(a) \sim \lambda^k; a_r \sim \lambda^0;$$

следовательно, $N_{r,r} \sim \lambda^k$.

$$2) N_{r,r}; r \in \{2, 3\}.$$

В этом случае $a_r \sim \lambda$ и $N_{r,r} \sim \lambda^{k-1}$.

$$3) N_{r,s}; r \neq s; r, s \in \{1\}.$$

После снятия линий r и s понадобится удалить еще по крайней мере k линий t -подграфа для размыкания его петель. Таким образом, $N_{r,s} \sim \lambda^k$.

$$4) N_{r,s}; r \neq s; r, s \in \{2\}.$$

Снятие линий r и s не размыкает петлю t ; поэтому снова $N_{r,s} \sim \lambda^k$.

$$5) N_{r,s}; r \neq s; r, s \in \{3\}.$$

Этот случай несколько более сложен. Возможны два варианта:

а/ Удаление линий r и s приводит к уменьшению числа петель t на две. Тогда для превращения t в дерево нужно сделать хордами еще $k-2$ линии t , еще одну линию t нужно сделать хордой для того, чтобы все вершины линий r и s не принадлежали одной компоненте 2-дерева /той, в которую входил бы превращенный в дерево t -подграф/.

б/ Удаление линий r и s приводит к размыканию одной петли t . Следовательно, еще по крайней мере $k-1$ линия t войдет в число хорд.

Таким образом, в обоих случаях $N_{r,s} \sim \lambda^{k-1}$.

$$6) N_{r,s}; r \in \{1\}; s \in \{2\}.$$

Удаление линии s не уменьшает числа петель t ; $N_{r,s} \sim \lambda^k$.

7) $N_{r,s}; r \in \{1\}, s \in \{3\}$.

После удаления линии s необходимо по причинам, аналогичным 5а, сделать хордами еще k линий t -подграфа; $N_{r,s} \sim \lambda^k$.

8) $N_{r,s}; r \in \{2\}, s \in \{3\}$.

После удаления линий r и s t -подграф распадается на две несвязных компоненты с общим числом петель $k-1$. Снятие еще $k-1$ линии t превратит обе компоненты в деревья, причем обе вершины линии s будут принадлежать одной из компонент, и поэтому нужно сделать хордой по крайней мере еще одну линию t -подграфа. $N_{r,s} \sim \lambda^k$.

Таким образом:

- I. $N_{r,s} \sim \lambda^{k-1}$, если $r=s \in \{2,3\}$ или $r \neq s; r, s \in \{2,3\}$.
- II. $N_{r,s} \sim \lambda^k$ во всех остальных случаях.

С точки зрения асимптотического поведения при $s \rightarrow \infty$ это означает, что в случае I/ $N_{r,s} / \Delta$ эквивалентно s^1 , а в случае II/ - s^0 .

Следовательно, асимптотика I_h при $s \rightarrow \infty$ не сильнее асимптотики I_0 , так как I_h получается из

I_0 заменами пар $J_r^\mu J_s^\nu$ величинами $\frac{iN_{r,s}}{2\Delta} g^{\mu\nu}$, а по-

следнее выражение дает вклад $\sim s$ только тогда, когда оба импульса, J_r и J_s , соответствуют нуклонным линиям t -подграфа, а в этом случае они и в I_0 дают вклад $\sim s$, если входят в одно скалярное произведение, либо $\sim s^2$, если входят в разные скалярные произведения. В любом случае от такой замены величина d не увеличится.

Если t -подграф не имеет петель, все $\frac{N_{r,s}}{\Delta}$ эквивалентны s^0 и замена пар импульсов J на такие выражения может только ослабить асимптотику. Для эйкональных t -путей все скалярные произведения имеют порядок s и асимптотика каждого из I_h по крайней мере на порядок слабее асимптотики I_0 .

7. Вычисление вклада эйкональных t -путей

Рассмотрим теперь более подробно вклад эйкональных t -путей в асимптотику. Так как существенна только асимптотика I_0 , то перенормировки можно не производить, ибо для I_0 действие R_{ν_i} сводится к замене ν_i на 1.

Найдем величины скалярных произведений, соответствующих фотонным линиям. При этом величины a -параметров, ассоциированных с линиями эйкональных t -путей, можно положить равными 0. Такие выражения будем обозначать тильдами. Исходное выражение для $\Delta(a)$ имеет вид:

$$\Delta(a) = \sum_{T_1} (\prod a).$$

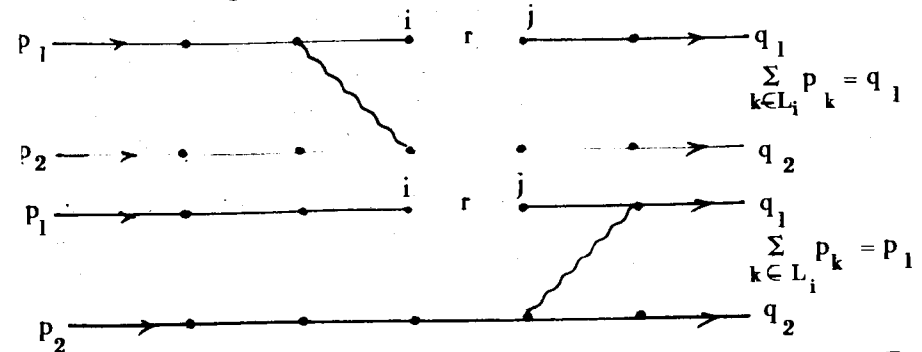
Ненулевыми будут только те слагаемые, для которых все линии t -путей не являются хордами и, следовательно, хордами каждый раз будут все фотонные линии, кроме одной. Таким образом:

$$\tilde{\Delta}(a) = \prod_{\{i_k\}} a_{i_k} \times (\sum_{\{i_k\}} a_{i_k}^{-1});$$

где $\{i_k\}$ - набор индексов фотонных линий. Исходное выражение для F_r имеет вид

$$F_r = a_r^{-1} \sum_{T_2(r)} (\prod a) (\sum_{k \in L_i} p_k).$$

Ненулевыми будут слагаемые, для которых хордами 2-дерева являются линия r и ℓ фотонных линий. Пусть нуклонная линия лежит на верхнем t -пути. Тогда возможны 2-дерева двух конфигураций



Таким образом:

$$\tilde{F}_r = A_1 p_1 + B_1 q_1,$$

где A_1 и B_1 - положительно определенные полиномы степени ℓ по параметрам фотонных линий, причем $A_1 + B_1 = \tilde{\Delta}$. Аналогично для нуклонных линий нижнего t -пути имеем:

$$\tilde{F}_r = A_3 p_2 + B_3 q_2; \quad A_3, B_3 > 0; \quad A_3 + B_3 = \tilde{\Delta}.$$

В таком виде можно представить и внешние импульсы, так, например, $p_1 = \frac{1}{\tilde{\Delta}}(A p_1 + B q_1)$; $A = \tilde{\Delta}$; $B = 0$. Любое скалярное произведение имеет вид

$$\frac{1}{\tilde{\Delta}^2} [(A_1 + A_2) p_1 + (B_1 + B_2) q_1; (A_3 + A_4) p_2 + (B_3 + B_4) q_2].$$

Удерживая члены порядка s , получим:

$$\frac{1}{\tilde{\Delta}^2} s/2 [A_1 + A_2 + B_1 + B_2] [A_3 + A_4 + B_3 + B_4] = 2s,$$

$$\tilde{M}_0(s) = (2s)^N,$$

где $2N$ -порядок диаграммы.

Таким образом, эйкональные t -пути действительно дают наиболее сильную возможную асимптотику $\ln s$.

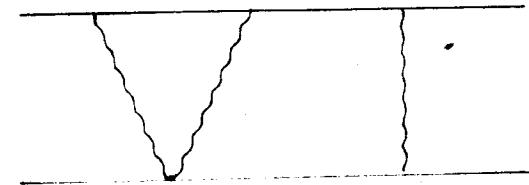
8. Асимптотики диаграмм с вершинами типа $\phi^* \phi A^2$

Оценим в заключение вклад эйкональных t -путей для диаграмм с четверными вершинами. Пусть на верхнем эйкональном t -пути имеется n_1 тройных и n_2 четверных вершин. При этом t -путь имеет $n_1 + n_2 - 1$ линию. Скалярные произведения будут соответствовать либо отдельным фотонным линиям, соединяющим тройные вершины, либо фотонным дугам, начало и конец которых - тройные вершины, а промежуточные вершины - четверные. Вклад порядка s дают те линии или дуги, хотя бы один конец которых лежит на t -пути. Поэтому максимальная степень s в $M_0(J)$ равна n_1 .

Следовательно, с точностью до логарифмических поправок вклад эйконального t -пути в асимптотику имеет вид

$$s^{n_1} \times s^{-(n_1 + n_2 - 1)} = s^{1 - n_2}.$$

Таким образом, асимптотика может быть того же порядка по s , что и для лестничных диаграмм, если $n_2 = 0$. Но при этом либо диаграмма не имеет четверных вершин вообще и относится к уже рассмотренному типу, либо фотонные линии образуют дуги, начало и конец которых принадлежат t -пути, а их вклад в асимптотику слабее s^{n_1} . Поясним это на примере диаграммы шестого порядка:



Верхний t -путь имеет $n_1 = 3$ и $n_2 = 0$. Его вклад в асимптотику

$$s^2 \times s^{-2} = s^0.$$

Подавление вкладов неэйкональных t -подграфов происходит аналогично случаю лестничных диаграмм. Следовательно, в асимптотической области $s \rightarrow \infty$, t -фиксировано, вклады в амплитуду рассеяния диаграмм, имеющих четверные вершины, на порядок s слабее вкладов лестничных диаграмм.

Таким образом, исследование диаграммного разложения амплитуды рассеяния в рассматриваемой модели показывает, что асимптотическое поведение амплитуды в пределе $s \rightarrow \infty$, t -фиксировано, определяется эйкональными t -путями лестничных диаграмм, что доказывает справедливость представления эйконала.

В заключение, пользуясь случаем, авторы выражают благодарность А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе и критические замечания, В.А.Матвееву, В.К.Митрюшкину, А.Н.Сисакяну и М.А.Смондыреву за плодотворные обсуждения.

Литература

1. *Moliere J. Naturforsch. Z.*, 1947, 2A, p.133; *Glauber R.J. Lectures in Theoretical Physics*, 1959, v. 1, p.315, N.Y.
2. Гарсеванишвили В.Р., Матвеев В.А., Слепченко Л.А. ЭЧАЯ, 1970, т.1, вып. 1, с.91.
3. *Abarbanel H.D.I., Itzykson C. Phys. Rev.Lett.*, 1969, 23, p.53; *Barbashov V.M., Kuleshov S.P., Matveev V.A., Sissakian A.N. JINR, E2-4692, Dubna, 1969; TMF, 1970, 3, p.342.*
4. Кулешов С.П., Матвеев В.А., Сисакян А.Н., Смондырев М.А., Тавхелидзе А.Н. ЭЧАЯ, 1974, т. 5, вып. 1, с.3.
5. Фрадкин Е.С. Труды ФИАН, 1965, т.29, с.7; Барбашов Б.М. ЖЭТФ, 1965, т. 48, с.607.
6. *Torgerson R. Phys. Rev.*, 1966, 143, p.1194; *Arnold R.C. Phys. Rev.*, 1967, 153, p.1523.
7. *Tiktopoulos Y., Treiman S.B. Phys. Rev.*, 1971, D3, p.1037.
8. Кулешов С.П., Матвеев В.А., Сисакян А.Н., Смондырев М.А., Тавхелидзе А.Н. ТМФ, 1974, 18, с.147.
9. *Lam S.I., Lebrun J.P. Nuovo Cim.*, 1969, 59A, p. 397.
10. Ефремов А.В., Завьялов О.И. В кн.: Труды XII Международной конференции по физике высоких энергий. Дубна, 1964, т.1, с.360, Атомиздат, М., 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 апреля 1977 года.