

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



25/vii-77

P2 - 10564

P-159

2766/2-77  
А.В.Радюшкин

РОЖДЕНИЕ МАССИВНЫХ ЛЕПТОННЫХ ПАР  
И АСИМПТОТИЧЕСКИ СВОБОДНЫЕ  
КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

**1977**

P2 - 10564

А.В.Радюшкин

РОЖДЕНИЕ МАССИВНЫХ ЛЕПТОННЫХ ПАР  
И АСИМПТОТИЧЕСКИ СВОБОДНЫЕ  
КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

Направлено в *"Physics Letters"*

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

Радюшкин А.В.

P2 - 10564

Рождение массивных лептонных пар и асимптотически свободные калибровочные теории

Показано, что логарифмические поправки, обусловленные асимптотической свободой, приводят к модифицированной формуле Дрелла-Яна. В рамках неабелевых калибровочных теорий рассчитано распределение лептонных пар в области больших поперечных импульсов пары, обусловленное механизмами не дрелл-яновского типа.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Radyushkin A.V.

P2 - 10564

Massive Lepton Pair Production and Asymptotically Free Gauge Theories

Logarithmic corrections due to asymptotic freedom are shown to lead to a modified Drell-Yan expression. The production of  $\mu$ -pairs with high  $Q_{\perp}$  due to a non-Drell-Yan mechanisms is calculated in an asymptotically free non-Abelian gauge theory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1977

Неабелевы калибровочные теории /НАКТ/, пожалуй, стали основным средством выяснения динамики сильных взаимодействий <sup>/1/</sup>. С наибольшим успехом они были применены к исследованию процессов глубоконеупругого рассеяния. Характерной чертой применяемого при этом анализа является использование вильсоновского разложения произведения операторов на световом конусе и методов ренормализационной группы <sup>/1/</sup>. Но операторные разложения практически бесполезны, когда рассматриваются процессы, асимптотика которых не определяется ведущей сингулярностью на световом конусе. Наиболее интересным среди таких процессов является процесс  $pp \rightarrow \mu^+ \mu^- X$  при высоких энергиях и больших значениях массы  $\mu \mu$ -пары, то есть в области  $s, Q^2 \rightarrow \infty, \tau \equiv Q^2/s$  - фиксировано, в очевидных стандартных обозначениях.

Целью данной заметки является исследование того, что предсказывают асимптотически свободные теории относительно этого процесса. Будет, в частности, показано, что результаты качественного анализа, выполненного Когутом <sup>/2/</sup>, и оценки Полкингхорна <sup>/3/</sup>, основанные на рассмотрении упрощенной модели, с некоторыми оговорками могут считаться оправданными с точки зрения НАКТ.

Поскольку операторные разложения в простейшей форме не применимы к рассматриваемому процессу, необходим иной подход. По сути дела, операторные разложения и ренормгруппа дают нам метод суммирования асимптотик фейнмановских диаграмм в теории возмущений. Мы будем использовать другой метод суммирования <sup>/4/</sup> /диаграммный подход <sup>/5/</sup>/, который эквивалентен подходу, основанному на вильсоновских разложениях,

когда использование последних возможно, но обладает более широкой областью применимости. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим структурную функцию глубоконеупругого рассеяния  $W(P, q)$  в скалярной теории. Она имеет следующее  $\alpha$ -представление /4-6/ :

$$W(P, q) = \text{Disc}_s \sum_{\text{diag p.}} \int_{1a}^{\infty} \prod da_{\sigma} H(g) \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{D^2(a)} e^{i \left\{ \frac{q^2 A_+(a) + s A_-(a)}{D(a)} + I(a, m^2) \right\}} \quad /1/$$

Асимптотическое поведение функции  $W$  определяется областью интегрирования по  $\alpha$ -параметрам, в которой одновременно  $A_+(a)/D(a) \approx 0$  и  $A_-(a)/D(a) \approx 0$ . Структурная функция  $q^2 W(P_1, P_2, Q)$  для скалярного аналога процесса  $pp \rightarrow \mu^+ \mu^- X$  также может быть записана в  $\alpha$ -представлении:

$$W(P_1, P_2, Q) = \text{Disc}_s \sum_{\text{diag p.}} \int_{1b}^{\infty} \prod da_{\sigma} H(g) \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{D^2(a)} e^{i \left\{ \frac{s A_-(a)}{D(a)} - a_1 \tau s + \tilde{I}(a, m^2) \right\}} \quad /2/$$

Поведение при больших  $s, Q^2$  определяется областью, где  $a_1 \approx 0, A_-(a)/D(a) \approx 0$ . Из представлений /1/ и /2/ ясно, что в диаграммном подходе нет никакой разницы между исследованиями асимптотики этих двух процессов. Разложение в ряд выражения  $\exp\{is A_-(a)/D(a)\}$  аналогично вильсоновскому разложению. Затем необходимо извлечь вклад, который является лидирующим при  $Q^2 \rightarrow \infty$ . Это легко осуществляется с помощью преобразования Меллина:

$$T^+(Q^2, s) = \int_{-i\infty}^{i\infty} (Q^2)^{\ell} s^j \Gamma(-j) \Gamma(-\ell) \frac{dj d\ell}{(2\pi i)^2} \Phi^+(j, \ell, m^2) \frac{1 + e^{i\pi j}}{2}, \quad /3/$$

$$\Phi^+(j, \ell, m^2) = \sum_{\text{diag p.}} \int_{1b}^{\infty} \prod da_{\sigma} H(g) \int_0^{\infty} \frac{\sigma}{D^2(a)} (ia_1)^{\ell} \left( i \frac{A_-(a)}{D(a)} \right)^j e^{i I(a, m^2)}, \quad /4/$$

где  $W = \text{Disc } T^+$ , а  $T^+(Q^2, s) = (T(Q^2, s) \pm T(Q^2, -s))/2$ . Асимптотика по  $Q^2$  дается самой правой сингулярностью по  $J = \ell + j$ . Для любой заданной диаграммы таковая является суммой полюсов  $\sum C_n (J+1)^{-n}$  в скалярной теории типа  $\phi^3$  и  $\sum \tilde{C}_n J^{-n}$  в логарифмических теориях типа НАКТ. Существуют определенные соотношения между коэффициентами  $C_n /4/$ , и простейший вид получается после суммирования по всем дающим вклад диаграммам. Результат суммирования в логарифмической теории имеет следующий вид:

$$\Phi_{\ell_{\text{e ad}}}^+(J, j, m^2) = \left( \frac{1}{\mu^2} \right)^J \sum_{i, k} E_{ik}(J, j, g_{\lambda}) f_i(j, \mu^2, g_{\lambda}) f_k(j, \mu^2, g_{\lambda}), \quad /5/$$

где  $(\mu^2)^{-J} E_{ik}(J, j, g_{\lambda})$  - результат интегрирования по малым  $\alpha$ -параметрам ( $\sum a_{\sigma} < 1/\mu^2; \sigma \in V$ ) линий  $\sigma$ , принадлежащих подграфу  $V$ , с суммированием по всем возможным  $V$ . Подграф  $V$  должен обладать двумя свойствами: 1/ сжатие его в точку лишает диаграмму зависимости от больших переменных и 2/ он обладает наименьшим возможным числом фермионных внешних линий /4 в данном случае/. Индексы  $i, k$  нумеруют различные двухчастичные промежуточные состояния.

В основе формулы /5/ лежит следующее рассмотрение. Произведем замену  $a_{\sigma} = \lambda_V \beta_{\sigma}$ ,  $\sum \beta_{\sigma} = 1$  для линий подграфа  $V$ . Тогда подынтегральное выражение примет вид

$$\lambda_V^{J-1} \phi(\beta_{\sigma}, \lambda_V, a_{\sigma'}) = \lambda_V^{J-1} \phi_0(\beta_{\sigma}, 0, a_{\sigma'}) + \lambda_V^J \phi_1(\beta_{\sigma}, 0, a_{\sigma'}) + \dots$$

Линии  $\sigma'$  лежат вне подграфа  $V$ . Только член с  $\phi_0$  ответственен за лидирующую сингулярность. Функции  $A_{\pm}$  и  $D$ , входящие в формулу /4/, факторизуются:  $A_{\pm}(L+V+R) = A_{\pm}(L)A_{\pm}(V)A_{\pm}(R)$ ;  $D(L+V+R) = D(L)D(V)D(R)\{1 + O(\lambda_V)\}$ . Вследствие этого свойства функция  $\Phi_{\ell_{\text{e ad}}}^+$  распадается на произведение /точнее, сумму произведений/ 3 вкладов:  $E_{ik}, f_i$  и  $f_k$ . Выражение /5/ служит заменой вильсоновскому разложению. Затем имеет смысл использовать то, что  $\Phi_{\ell_{\text{e ad}}}^+$  не зависит ни от  $\mu$ , ни от  $\lambda$  - ренормировочного параметра  $R$ -операции. Чтобы из-

бежать ненужных усложнений, связанных с учетом членов типа  $(\ell_n(\lambda/\mu^2))^k$ , необходимо положить  $\lambda = \mu^2$ .

Применение  $\mu \frac{d}{d\mu}$  к обеим сторонам выражения /5/

дает уравнение ренормгруппы. Функции  $f_i(j, \mu^2, g(\mu^2))$  первоначально были получены в диаграммном подходе при исследовании глубоконеупругого рассеяния /7/ и имеют те же самые  $\alpha$ -представление и рецепт ренормировки, что и матричные элементы операторов в подходе, основанном на вильсоновских разложениях. Их можно считать моментами соответствующих функций распределения партонов /8/. Конечный результат для  $d\sigma/dQ^2$  в НАКТ имеет очень естественный вид:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} \Big|_{AB \rightarrow \mu^+ \mu^- X} = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^4} \tau \sum_a \lambda_a^2 \int_0^1 dx dy \times$$

$$\times [E_{q\bar{q}}(1, g(Q^2), \frac{xy}{\tau}) \frac{1}{N} f_{a/A}(x, Q^2) f_{\bar{a}/B}(y, Q^2) +$$

$$+ E_{qg}(1, g(Q^2), \frac{xy}{\tau}) f_{a/A}(x, Q^2) f_{g/B}(y, Q^2) +$$

$$+ \frac{1}{2} E_{gg}(1, g(Q^2), \frac{xy}{\tau}) f_{g/A}(x, Q^2) f_{g/B}(y, Q^2) + A \leftrightarrow B];$$

$$E_{q\bar{q}} = \delta(xy - \tau) + O(g^2(Q^2)). \quad /6/$$

Таким образом,  $d\sigma/dQ^2$  дается формулой Дрелла-Яна /9/, но с зависящими от  $Q^2$  функциями распределения партонов\* плюс вклад глюонов, имеющий порядок

\* Функции распределения партонов, зависящие от  $Q^2$ , были введены Когутом и Сасскайндом /10/. См. также работы /5,11,12/.

$E_{gg} = O(g^4(Q^2))$ ,  $E_{g\bar{q}} = O(g^2(Q^2))$ . / N - число цветов, в которые раскрашены кварки/. Если более предпочтительной считается формулировка на языке моментов, то

$$\int_0^1 W(r, Q^2) r^{n-1} dr =$$

$$= \sum_a \lambda_a^2 \left\{ \frac{1}{N} \tilde{E}_{q\bar{q}}(1, g(Q^2), n) \tilde{f}_{a/A}(n, Q^2) \tilde{f}_{\bar{a}/B}(n, Q^2) + \right.$$

$$+ \tilde{E}_{qg}(1, g(Q^2), n) \tilde{f}_{a/A}(n, Q^2) \tilde{f}_{g/B}(n, Q^2) + \quad /7/$$

$$\left. + \frac{1}{2} \tilde{E}_{gg}(1, g(Q^2), n) \tilde{f}_{g/A}(n, Q^2) \tilde{f}_{g/B}(n, Q^2) + A \leftrightarrow B \right\},$$

причем изменение  $\tilde{f}(n, Q^2)$  с  $Q^2$  дается теми же самыми аномальными размерностями, что и для глубоконеупругого рассеяния. Аргументы, приведенные в работе /3/\*, неверны, в частности, член с дигамма-функцией Эйлера может быть извлечен из диаграмм, изображенных на рис. 1г. Необходимо сделать еще следующее замечание относительно процедуры нормировки функций распределения партонов /или матричных элементов операторов/, так как может возникнуть ошибочное представление, что при рассмотрении глубоконеупругого рассеяния функции распределения нормируются в евклидовой области, в то время как для описания процесса рождения тяжелых лептонных пар используются функции распределения, нормированные в физической области. Мы подчеркиваем, что существует две различных схемы нормировки /13/ для функции  $F(q^2/\mu^2, g(\mu^2))$ . Первая,  $\lambda$ -схема, исходит из того, что  $F(1, g(q^2)) = 1$ , а вторая,  $\mu$ -схема, - из того, что  $F(q^2/\mu^2, 0) = 1$ . Например, схема 'т Хофта /14//  $d^4p \rightarrow d^{4-\epsilon} p^\epsilon$  с последующим вычитанием по-

\* Полкингхорн /3/ утверждает, что функции  $\tilde{f}(n, Q^2)$  отличаются от соответствующих функций глубоконеупругого рассеяния.

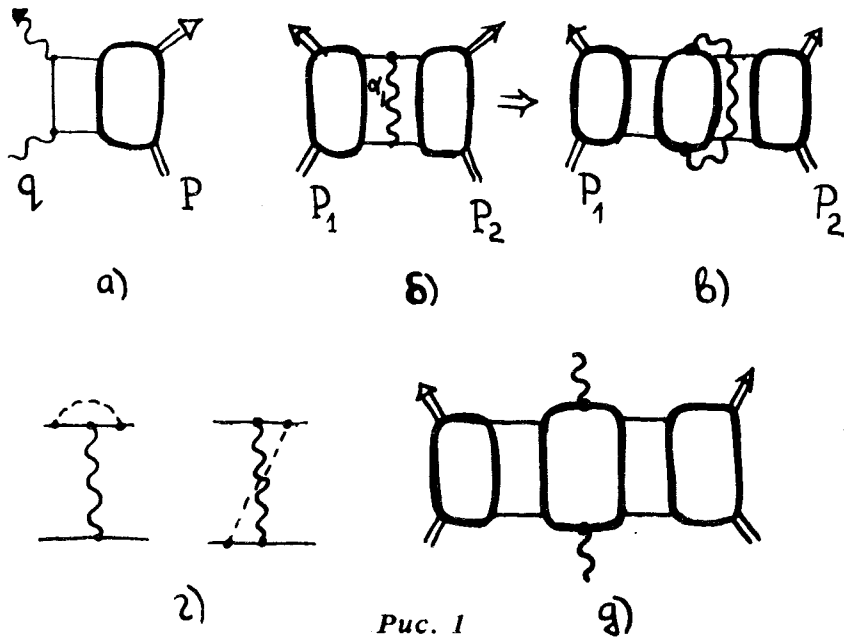


Рис. 1

люсов  $\epsilon^{-n}$  является  $\mu$ -схемой, характеризующейся параметром нормировки  $\mu$ , который не является ни пространственно-, ни времени-подобным, а есть вещественное положительное число. Когда используется  $\mu$ -схема, то имеет смысл говорить, что операторы нормированы "с помощью параметра  $\mu^2$ ", а не "в точке, соответствующей импульсу  $\mu^2$ ". Поскольку не имеется никакой априорной информации ни о  $E(q^2/\mu^2, g(\mu^2), \tau/xy)$ , ни о  $f(x, \mu^2)$  при некотором  $\mu$ , то обычно используется  $\mu$ -схема.

Чтобы исследовать распределение  $\mu$ -пар по поперечному импульсу при больших значениях последнего, необходимо рассмотреть  $\alpha$ -представление диаграмм типа изображенной на рис. 1d:

$$W_{\mu}^{\mu}(P_1, P_2, Q) = \sum_{\text{диагр. 1d.}} N(g) \int_0^{\infty} \frac{\prod da_{\sigma}}{D(a)} G_{\mu}^{\mu}(a, P_1, P_2, Q) e^{i\ell(a, m^2)}$$

$$\times \exp i\left\{ \frac{s}{D(a)} [\lambda \rho A_{-}(a) - \lambda A_{u}(a) - \rho A_{t}(a) + A_{q_2}(a)] - \frac{Q_{\perp}^2 A_{q_2}(a)}{D} \right\}, \quad /8/$$

где  $Q = \lambda P_1 + \rho P_2 + Q_{\perp}$ . Снова мы имеем две больших переменных,  $Q_{\perp}^2$ ,  $s \rightarrow \infty$ , но таких, что отношение  $\tau_{\perp} = Q_{\perp}^2/s$  фиксировано. Результат дается выражением /5/, но функции /5/ даются диаграммами, изображенными на рис. 2.

Важность таких механизмов для понимания распределения по  $Q_{\perp}$  подчеркивалась А.В.Ефремовым /15/, а также Когутом /2/. Вычисляя вклады диаграмм рис. 2 и используя равенство  $\delta((x-\lambda)(y-\rho) - \tau_{\perp}) d^4 Q = \frac{s}{4} dQ^2 d\tau_{\perp} d\phi \frac{d\phi}{K} \Delta$

/где  $\Delta = \delta(\rho - \rho_1) + \delta(\rho - \rho_2)$ ,  $\rho_{1,2} = (\tau + xy \pm K)/2$ , а  $K = \sqrt{(xy - \tau)^2 - 4xy\tau_{\perp}}$  /, получаем окончательный результат:

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma}{dQ^2 d\tau_{\perp}} \Big|_{AB \rightarrow \mu^+ \mu^- X} = \\ & = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^4} \tau \frac{\bar{g}^2(Q_{\perp}^2)}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \frac{1}{K} \theta(\sqrt{xy} - \sqrt{\tau_{\perp}} - \sqrt{\tau + \tau_{\perp}}) \times \\ & \cdot \sum_a \lambda_a^2 \left\{ \frac{4C_2(R)}{N} \rho_1^a(x, y, Q_{\perp}^2) \left[ \frac{(\tau + xy)^2}{\tau_{\perp} xy} - 2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{T(R)}{N} \rho_2^a(x, y, Q_{\perp}^2) \left[ 1 + \frac{3\tau}{xy} + \frac{2}{\tau_{\perp}} (x - \tau(1 - \frac{\tau}{xy}))^2 \right] \right\}, \quad /9/ \end{aligned}$$

где, как и раньше,  $f(x, Q_{\perp}^2)$  - функции распределения по продольному импульсу, нормированные в данном случае с помощью параметра  $Q_{\perp}^2$ ;

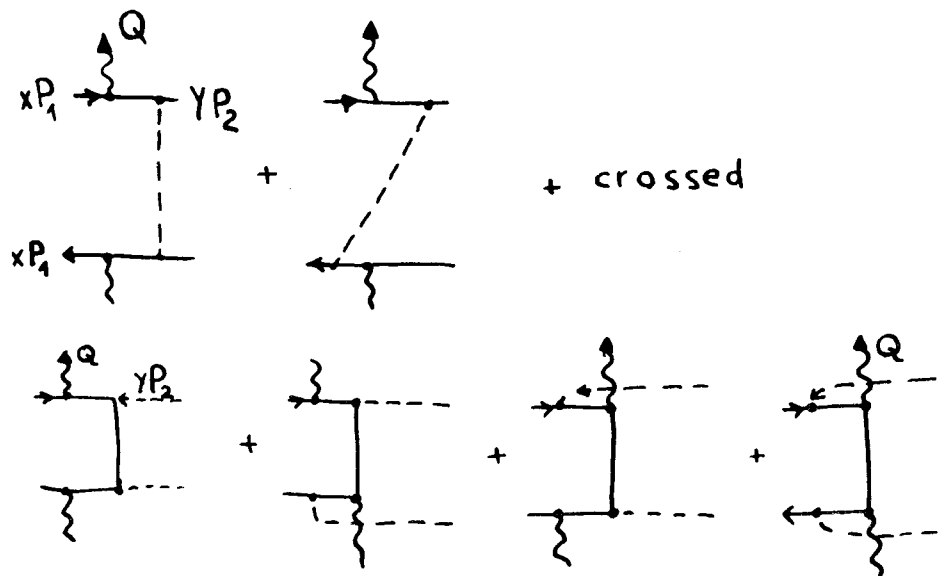


Рис. 2

$$\rho_1^a(x, y, Q_\perp^2) = \{ f_{a/A}(x, Q_\perp^2) f_{a/B}(y, Q_\perp^2) + A \leftrightarrow B \};$$

$$\rho_1^a(x, y, Q_\perp^2) = \{ f_{g/A}(y, Q_\perp^2) [f_{a/B}(x, Q_\perp^2) + f_{a/B}(x, Q_\perp^2)] + A \leftrightarrow B \}.$$

Мы опустили в /9/ глюон-глюонный вклад, пропорциональный  $E_{gg}(1, g(Q^2), \frac{xy}{\tau}) = O(g^4(Q^2))$ . Детали вычислений будут опубликованы позднее.

Рождение  $\mu$ -пар с большим поперечным импульсом  $Q_\perp$  может быть рассчитано и с помощью операторных разложений. Представляется также возможным получить модификацию выражения /9/ в духе  $\xi$ -скейлинга, т.е. вывести формулу, которая справедлива вплоть до  $Q_\perp = m_p$ , где  $m_p$  - масса протона. Но кажется очень трудной задача вычисления зависимости от  $Q_t$  в области  $Q_t < m_p$  в связи с необходимостью учесть поправки на массу мишени в области, где константа связи велика.

В заключение хотелось бы еще раз подчеркнуть, что асимптотически свободные теории /в той форме, в которой они используются сейчас, т.е. в пренебрежении поправками на удержание кварков/, будучи применены к инклюзивным процессам в области больших поперечных импульсов  $P_\perp^2 \gg m_p^2$ , эквивалентны партонной модели с зависящими от  $P_\perp^2$  функциями распределения партонов /5/.

Я признателен А.В.Ефремову за многочисленные полезные обсуждения и советы.

#### Литература

1. Politzer H.D. Phys.Reports, 1974, 14C, 129 and refs. therein.
2. Kogut J.B. Phys.Letters, 1976, 65B, 377.
3. Polkinghorne J.C. Nucl.Phys., 1976, B116, 347.
4. Efremov A.V., Ginzburg I.F. Fortschr. der Phys., 1974, 22, 575.
5. Efremov A.V., Radyushkin A.V. JINR, E2-10307, Dubna, 1976.
6. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей, Наука, М., 1976.
7. Efremov A.V., Radyushkin A.V., Phys.Lett., 1976, 63B, 449.
8. Ефремов А.В., Радюшкин А.В. Труды XVIII Международной конференции по физике высоких энергий, Тбилиси, 1976. ОИЯИ, Д1,2-10400, Дубна, 1977, т. 2, стр. В68; препринт ОИЯИ, P2-9906, Дубна, 1976.
9. Drell S.D., Yan T.-M. Ann.Phys., (NY), 1971, 66, 578.
10. Kogut J.B., Susskind L. Phys.Rev., 1974, D9, 697, 3391.
11. Georgi H., Politzer H.D. Phys.Rev., 1976, D14, 1829.
12. Parisi G., Petronzio R. Roma University preprint 617, 1975.
13. Владимиров А.А. ТМФ, 1975, 25, 335.
14. 't Hooft G. Nucl.Phys., 1973, B61, p.455.
15. Ефремов А.В., Райчаудхури П. ЯФ, 1977, 25, 374; Ефремов А.В. Труды V Международного симпозиума по физике высоких энергий и элементарных частиц, Варшава, 1975. ОИЯИ, Д1,2-9342, Дубна, 1975, стр. 9.

Рукопись поступила в издательский отдел  
5 апреля 1977 года.