СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 10547

В.Г.Маханьков, Ю.В.Катышев

О СУЩЕСТВОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОМЕРНЫХ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1977

P2 - 10547

В.Г.Маханьков, Ю.В.Катышев

О СУЩЕСТВОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕОДНОМЕРНЫХ СОЛИТОНОПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Маханьков В.Г., Катышев Ю.В. Р2 - 10547

О существовании и устойчивости неодномерных солитоноподобных решений в некоторых моделях теории поля

Обсуждаются некоторые общие условия существования D-мерных сферически симметричных солитонов. Приведен пример устойчивых Q- солитонов в ($\phi^4 - a\phi^6$) - теории поля.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Makhankov V.G., Katyshev Yu.V. P2 - 10547

On the Existence and Stability of Many-Dimensional Soliton-Like Solutions in Some Field Theory Models

Some general conditions of the existence of D dimensional spherically symmetric solitons are discussed. An example of stable Q-solitons in the $\phi^4 - a\phi^6$ field theory is given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

§ I. Введение

В последнее время в связи с исследованиями по квантовой теории солитонов всё чаще приходится сталкиваться с нелинейными уравнениями как в евклидовом, так и псевдоевклидовом пространстве. Большой интерес представляют сферически симметричные решения. Ниже в § 2 мы обсудим необходимые условия существования подобных решений для некоторого нелинейного уравнения общего вида, а в § 3 приведём пример устойчивых Q -солитонов в $(\varphi^4 - \alpha\varphi^6)$ - теории поля.

§ 2. Условия существования солитоноподобных решений (СПР)

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{1}{r^{D-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{D-1}\frac{d}{dr}\varphi\right) - \varkappa^2\varphi + g^2\varphi^{p-1} - a\varphi^{q-1} = 0, \qquad (I)$$

в котором $\varkappa^2 \geq 0$, g^2 и a - некоторые постоянные, а D характеризует размерность пространства - времени. К этому уравнению сводится большой круг задач теории поля. В частности, в евклидовом пространстве-времени величина D совпадает с полной размерностью пространства. В псевдоевклидовом - на единицу меньше как для стационарных решений, так и для решений с конечной величиной заряда Q. В последнем случае перенормируется постоянная $\varkappa^2$.

Ниже мы исследуем условия существования солитоноподобных решений уравнения (I). Будем называть солитоноподобными решения, обладающие следующими свойствами:

(I) конечной энергией

$$E = \int \mathcal{H}\, d^D r \quad (\mathcal{H} \text{ - гамильтониан}), \qquad (2)$$

(2) конечным зарядом (он может равняться и нулю)

$$Q = -i\int(\Psi_t^*\Psi - \Psi^*\Psi_t)\,d^D r,$$

$$\Psi(r,t) = \varphi(r)\exp\left[-i(\omega t+\theta_0)\right],\ \varphi=\varphi^*,\ 0<\omega^2<m^2, \quad (3)$$

откуда следует условие $\varkappa^2 \geqslant 0$ и асимптотическое поведение решения

$$\varphi|_{r\to\infty} \to 0 . \qquad (4)$$

Кроме того, $\varphi(0) = const$, $\varphi_r(0) = 0$.

Уравнение (I) осуществляет экстремум действия с лагранжианом

$$L = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \left[(\varphi_r)^2 + \varkappa^2\varphi^2 - \frac{2g^2}{p}\varphi^p + \frac{2a}{q}\varphi^q\right] r^{D-1}\,dr .$$

Для дальнейшего удобно ввести функционалы

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\varphi_r)^2 r^{D-1}\,dr$$

$$U_2 = \frac{\varkappa^2}{2}\int_0^\infty \varphi^2 r^{D-1}\,dr$$

$$U_p = \frac{g^2}{p}\int_0^\infty \varphi^p r^{D-1}\,dr \qquad (5)$$

$$U_q = \frac{a}{q}\int_0^\infty \varphi^q r^{D-1}\,dr.$$

Тогда

$$L = -\left(T + U_2 - U_p + U_q\right) . \qquad (6)$$

Между функционалами (5) существуют две связи. Одну из них мы получим с помощью масштабного преобразования

$$r \to \lambda r , \quad \varphi^{(\lambda)} = \varphi(\lambda r) ,$$

при котором

$$T^{(\lambda)} = \lambda^{2-D}T , \quad U_K^{(\lambda)} = \lambda^{-D}U_K ,$$

где $K = 2, p, q$, и вариационного принципа

$$dL^{(\lambda)}/d\lambda\Big|_{\lambda=1} = 0 ,$$

в результате имеем теорему вириала

$$(2-D)\,T - D\,(U_2 - U_p + U_q) = 0 . \qquad (7)$$

Домножая (I) на $r^{D-1}\varphi$ и интегрируя по r в пределах от нуля до бесконечности, получим второе соотношение

$$2(T + U_2) - pU_p + qU_q = 0. \qquad (8)$$

Исключим из (7), (8) функционал T, тогда

$$U_2 = \frac{1}{2}\left(D - p\frac{D-2}{2}\right)U_p + \frac{1}{2}\left(q\frac{D-2}{2} - D\right)U_q . \qquad (9)$$

В силу положительности U_2 имеем

$$\left(1 - p\frac{D-2}{2D}\right)U_p > \left(1 - q\frac{D-2}{2D}\right)U_q , \qquad (10)$$

а положительность функционала T даёт

$$(p-2)\,U_p > (q-2)\,U_q . \qquad (11)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

I. Положим $a = 0$, $\varkappa^2 = 0$ (безмассовое поле). Тогда уравнение (I) сводится к

$$\frac{1}{r^{D-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{D-1}\frac{d}{dr}\varphi\right) + g^2\varphi^{p-1} = 0 . \qquad (12)$$

Уравнение вида (I2) встречается в теории псевдочастиц (инстантонов) /I/ (см. также работу /I0/ и цитированную в ней литературу). В этом случае система (7), (8) сводится к однородной системе $(U_2 = U_q = 0)$

$$(2-D)T + DU_p = 0 ,$$

$$2T - pU_p = 0 ,$$

поэтому

$$P = \frac{2D}{D-2} \equiv P_{\ell}. \qquad (13)$$

Это соотношение является условием существования солитоноподобных (инстантонных) решений. Оно удивительным образом совпадает с известным условием ренормируемости теории (см., например, работу Липатова /1/). Из (9) следует, что (13) является верхней границей для p, если $a \neq 0$.

Из формулы (9) (при $U_q = 0$) также следует, что переход через кривую $p(D)$ (формула (13)) запрещён не из-за нормируемости теории, а в силу условия существования классических решений. Поэтому даже метод, не использующий теорию возмущений, а именно метод функционального интегрирования, по-видимому, является бесполезным в области выше кривой (13). Для скалярных инстантонов в четырёхмерном евклидовом мире имеем $p=4$ и решение

$$\varphi = \frac{\sqrt{2}}{g} \frac{2\Delta}{r^2+\Delta^2}$$

в виде лоренцовой кривой /1/.

2. Пусть $a = 0$. Уравнение вида

$$\frac{1}{r^{D-1}} \frac{d}{dr}\left(r^{D-1}\frac{d}{dr}\varphi\right) - \varphi + g^2\varphi^{p-1} = 0 \qquad (14)$$

при $D=3$ уже давно привлекало к себе внимание исследователей-физиков и математиков /2/. В частности, в работах Жидкова, Ширикова и Пузынина /2/ было показано, что решения уравнения (14) не существуют при $p>6$ и $p<2$. Из формулы (10)

$$\left(1 - p\frac{D-2}{2D}\right)U_p > 0 \qquad (15)$$

и $D=3$ получаем упомянутый результат. Отметим здесь, что при нечётных $p=2k+1$ условие $[1-p(D-2)/(2D)]U_p>0$ не является необходимым для существования знакопеременных решений. При $D=1,2$ неравенство (15) становится тривиальным, а p – произвольным. В случае $D=4$ получаем $p<4$.

3. Безмассовое поле и $a, g^2 \neq 0$

Такое уравнение может возникать в ренормируемых теориях с более высокой, чем $U(1)$, симметрией. Условие существования инстантонных решений

$$\left(1 - p\frac{D-2}{2D}\right)U_p = \left(1 - q\frac{D-2}{2D}\right)U_q$$

или для положительных U_p и U_q:

$$\infty > \frac{1-p\frac{D-2}{2D}}{1-q\frac{D-2}{2D}} > 0. \qquad (16)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что при $D=3,4$ решений с $p=4$, $q=6$ не существует. Решения же в одномерном и двумерном мирах могут существовать при любых p и q.

Легко показать, что формулы, подобные (10) и (11), можно получить и в случае так называемых "ежей" (векторных полей)/3/, когда к оператору $(1/r^{D-1})[r^{D-1}(d/dr)]$ добавляется член $(1-D)/r^2$. Для этого достаточно переопределить функционал T следующим образом:

$$T \to T' = \int_0^\infty \left[(\varphi_r)^2 + \frac{D-1}{r^2}\varphi^2\right] r^{D-1}\,dr.$$

4. Перейдём к случаю $\varkappa^2, g^2, a \neq 0$, $D=3, p=4, q=6$.

Уравнение (1) принимает вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\varphi\right) - \varkappa^2\varphi + \varphi^3 - \alpha\varphi^5 = 0. \qquad (17)$$

Здесь мы положили $\varkappa^2 = m^2 - \omega^2$, $g^2=1$, $a=\alpha>0$ – некоторая константа. В этом случае имеем

$$U_2 = \frac{1}{2}U_4. \qquad (18)$$

Учитывая также (11), получим

$$U_4 > 2U_6 > 0,$$

где теперь

$$U_4 = \frac{1}{4}\int \varphi^4 r^2 dr \quad , \quad U_6 = \frac{\alpha}{6}\int \varphi^6 r^2 dr. \qquad (18')$$

Уравнение вида (I7) исследовалось ранее Андерсоном [4] для скалярного поля в рамках $U(I)$-симметрии. Его теория была неперенормируемой и, видимо, поэтому эта работа осталась незамеченной специалистами по квантовой теории поля.

В недавних работах Фридберга, Ли и Сирлина [5-7] были изучены трёхмерные (сферически симметричные) модели с солитоноподобными нетопологическими решениями для системы двух взаимодействующих полей, одно из которых является калибровочным, другое – нарушающим симметрию лагранжиана. Переход от $U(I)$-симметрии [5] к $SU(2)$-симметрии [6] для калибровочного поля в рамках ренормируемой теории может приводить к уравнению вида (I7) для некоторой полевой функции v

$$v''(r) + \frac{2}{r} v' = \eta^2 v - 4v^3 + 3v^5.$$

Заменой $4v^2 = \varphi^2$ приходим к уравнению (I7), в котором $\alpha = 3/4$.

В связи с этим повышается интерес к исследованию солитоноподобных решений уравнения (I7).

К сожалению, нет пока строгого доказательства существования таких решений, однако есть весьма сильные аргументы в пользу последнего, вытекающие, например, из механической аналогии [6] и численных экспериментов [4,6]. Поэтому мы будем предполагать, что искомые решения существуют.

Перечислим их основные свойства.

I) Солитоноподобные решения (I7) не существуют [4] при

$$\frac{16}{3}\alpha \varkappa^2 \equiv \bar{\alpha}\varkappa^2 > 1.$$

2) При $\omega = 0$ существует счётный набор СПР φ_k ($k=0,1,2\ldots$), где k показывает число узлов полевой функции [6]. Отметим, что в отличие от случая $\alpha = 0$ [2], где увеличение числа узлов было связано с ростом амплитуды солитона в центре, при $r = 0$ ("квантование"амплитуды), в нашем случае происходит "квантование" радиуса солитона R, так что $R \to \infty$ при $k \to \infty$.

3) Сохраняется в случае $U(I)$-симметрии величина заряда

$$Q = 4\pi\omega \int \varphi_s^2 r^2 dr,$$

а в случае $SU(2)$-симметрии – вектор изоспина $\vec{T}$.

При данном значении заряда Q_0 (модуля изоспина T_0) радиус солитона не может превышать некоторого значения R_0, поэтому из счётного набора решений φ_k остаётся ограниченное число решений. При этом, чем меньше $Q_0(T_0)$, тем меньше k, так что при некотором значении Q_0 величина k обращается в нуль (безузловой солитон).

4) При $\bar{\alpha}\varkappa^2 \to 1$ радиус солитона R стремится к бесконечности.

§ 3. Пример устойчивых Q-солитонов в $(\varphi^4 - \alpha\varphi^6)$-теории поля

В качестве примера рассмотрим сферически симметричные решения классической $(\varphi^4 - \alpha\varphi^6)$-теории поля с лагранжианом

$$L = -\frac{1}{2}\int\left[(\varphi_r)^2 + \varkappa^2\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi^4 + \frac{\alpha}{3}\varphi^6\right] r^2 dr.$$

Возьмём пробную функцию в виде

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_m & r \le R \\ \varphi_m \exp[-(r-R)/\ell] & r \ge R, \end{cases} \qquad (I9)$$

где $R \gg 1$, а $\ell \ll R$. Это означает, что

$$0 < \varepsilon = 1 - \bar{\alpha}\varkappa^2 \ll 1. \qquad (I9')$$

Именно при этом условии имеются солитонные решения типа (I9).

Подставляя пробную функцию (I9) в точное соотношение (I8) и пренебрегая интегралами

$$\int_R^\infty \varphi_m^2 e^{-\frac{2(r-R)}{\ell}} r^2 dr \qquad \int_R^\infty \varphi_m^4 e^{-\frac{4(r-R)}{\ell}} r^2 dr,$$

имеем приближённое равенство для амплитуды солитона φ_m

$$\varphi_m^2 = 4\varkappa^2.$$

Аналогично из (I8') получим

$$U_4 = \frac{3\,U_6}{8\,\alpha\,\varkappa^2}, \qquad (20)$$

а из

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi_r^2\, r^2 dr$$

соотношение

$$T = \frac{\varkappa^2 R^2}{\ell}. \qquad (21)$$

Кроме того, из равенства

$$T = -3\,(U_2 - U_p + U_q)$$

и формул (I8), (20) следует, что

$$T = \frac{3\,\varepsilon}{\alpha\,\varkappa^2}\, U_6 .$$

Подставляя

$$U_6 = \frac{\alpha}{6}\,\varphi_m^6 R^3$$

в это выражение, найдём, что

$$T = 6\,\varepsilon\,\varkappa^4 R^3. \qquad (22)$$

Приравнивая (2I) и (22), получим связь

$$\ell \sim \frac{1}{\varepsilon\,\varkappa^2 R} \qquad (23)$$

Величину ℓ можно найти с помощью рассмотрения малых колебаний пробной механической частицы в яме связанного с уравнением (I7) потенциального рельефа около минимума φ_{min}, определяемого из уравнения

$$\alpha\,\varphi_{min}^4 - \varphi_{min}^2 + \varkappa^2 = 0.$$

При этом

$$\ell^{-2} = \frac{d}{d\varphi}\left(\varkappa^2\varphi - \varphi^3 + \alpha\,\varphi^5\right)\Big|_{\varphi=\varphi_{min}} = \frac{4}{3}\,\varkappa^2,$$

$$\ell \sim 1/\varkappa \qquad (24)$$

Приравнивая (23) и (24), имеем

$$R \sim 1/(\varepsilon\,\varkappa). \qquad (25)$$

Решая задачу на отыскание условного (при $Q = const$) минимума функционала энергии /9,5,8/

$$E = \frac{Q^2}{8\pi\int_0^\infty \varphi^2 r^2 dr} + 2\pi\int\left(\varphi^2 + \varphi_r^2 - \frac{1}{2}\varphi^4 + \frac{\alpha}{3}\varphi^6\right) r^2 dr,$$

приходим к условию устойчивости Q -солитонов

$$dQ/d\omega < 0.$$

Рассмотрим с этой точки зрения устойчивость Q -солитонов уравнения φ^4-теории ($\alpha = 0$, $D = 3$, $\varkappa^2 = m^2 - \omega^2$). Это уравнение допускает масштабное преобразование $\varphi(r,\varkappa) = \varkappa\,\phi(\varkappa r)$. Используя его, получаем

$$Q \sim \omega/\varkappa.$$

Отсюда сразу следует, что $dQ/d\omega$ всегда положительна, что означает отсутствие устойчивых сферически симметричных Q -солитонов в φ^4-теории (см. также работу /II/, где было показано отсутствие несимметричных решений). Перейдём к уравнению (I7).

Используя (25), находим, что заряд рассматриваемого солитона

$$Q = 16\pi\,\omega\,\varkappa^2 R^3 \sim \omega/(\varkappa\,\varepsilon^3). \qquad (26)$$

Фиксируя значение $\bar{\alpha}$, находим область существования решения вида (I9)

$$\omega_{min}^2 = 1 - \frac{1}{\bar{\alpha}} < \omega^2 \leqslant 1 - \frac{1}{\bar{\alpha}} + \frac{\varepsilon}{\bar{\alpha}} = \omega_{max}^2 .$$

При $\omega \to \omega_{min}$ имеем $\varepsilon \to 0$ и $Q \to \infty$, в точке $\omega = \omega_{max}$ имеем $\varepsilon = \varepsilon_0 \ll 1$ и $Q \sim \omega_{max}/[\varkappa(\omega_{max})\varepsilon_0^3]$, поэтому в интервале ($\omega_{min}, \omega_{max}$) производная $dQ < d\omega < 0$. Это может быть проверено непосредственным дифференцированием (26), откуда, кроме того, следует, что наше рассмотрение справедливо при $\bar{\alpha} > 24/49$.

Авторы выражают свою признательность Д.В.Ширкову, Е.П.Жидкову и С.С.Заутбекову за плодотворные обсуждения.

Л И Т Е Р А Т У Р А :

1. A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwartz and Yu.S.Tyupkin, Phys. Lett. 59B, 85 (1975);
   V.de Alfaro, S.Fubini and G.Furlan, Phys. Lett. 65B, 163(1976);
   S.Fubini, Nuovo Cimento 34A, 521 (1976);
   Л.Н.Липатов. ЖЭТФ, 72, 4II, I977.
2. R.Finkelstein, R.LeLevier and M.Ruderman, Phys. Rev. 83, 326 (1951);
   N.Rosen and H.B.Rosenstock, Phys. Rev. 85, 257(1952);
   Z.Nehari, Proc. R.Irish Acad. A62, 118(1963);

   Е.П.Жидков, В.П.Шириков, И.В.Пузынин. В сб. ОИЯИ, 2005, Дубна, I965, стр. I3;
   G.H.Ryder, Pacific J. Math. 22, 477(1967).
3. А.М.Поляков. ЖЭТФ, 68, I975, I975;
   G't Hooft, Nucl. Phys. B79, 276 (1974).
4. D.L.T.Anderson, J.Math.Phys. 12, 945 (1971).
5. R.Friedberg, T.D.Lee and A.Sirlin, Phys. Rev. D13, 2739(1976).
6. R.Friedberg, T.D.Lee and A.Sirlin, Nucl. Phys. B115, 1 (1976).
7. R.Friedberg, T.D.Lee and A.Sirlin, Nucl. Phys. B115, 32 (1976).
8. В.Г.Маханьков. ОИЯИ, Р2-I0362, Дубна, I977.
9. Л.Г.Заставенко. ПММ, 29, 430, I965.
10. G.Rosen, J.Math. Phys. 6, 1269 (1965).
11. D.L.T.Anderson and G.H.Derrick, J.Math. Phys. 11, 1336 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
31 марта I977 года