СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

С324.2
С-918

1/8-77

Р2 - 10537

2889/2-77

У.С.Суяров, Л.Ш.Ходжаев

СУПЕРПРОПАГАТОРЫ ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С МИНИМАЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ НА СВЕТОВОМ КОНУСЕ

1977

P2 - 10537

У.С.Суяров, Л.Ш.Ходжаев

СУПЕРПРОПАГАТОРЫ ДЛЯ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С МИНИМАЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТЬЮ НА СВЕТОВОМ КОНУСЕ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Суяров У.С., Ходжаев Л.Ш.

Р2 - 10537

Суперпропагаторы для экспоненциальных взаимодействий с минимальной сингулярностью на световом конусе

Для модели экспоненциальных взаимодействий построены запаздывающие, опережающие и причинные суперпропагаторы. В основу построения этих величин положен метод аналитической регуляризации в вайтмановском подходе и условие минимальной сингулярности Лемана-Полмайера. Получены точные аналитические представления для этих суперпропагаторов и показано, что они удовлетворяют всем требованиям локализуемой квантовой теории поля.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ и ИЯФ АН УзССР.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Suyarov U.S., Khodzhaev L.Sh.

P2 - 10537

Superpropagators for Exponential Interactions with Minimal Singularities on the Light Cone

Retarded, advanced and causal superpropagators were constructed for the model of exponential interactions basing on the method of analytical regularization in Wightman approach and at the condition of minimal singularities of Leeman-Polmeyer. Exact analytical representations were obtained for these superpropagators, it was shown that these meet all the requirements of localizable quantum field theory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

© 1977 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

I. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы появился интерес к построению и применению суперпропагаторов в неперенормируемых теориях.

Хорошо известно, что построение суперпропагатора в данной теории связано с определением ряда неоднозначностей, так как необходимо фиксировать бесконечное число констант, или, другими словами, некоторую целую функцию.

Таким образом, одной из главных задач построения теории является фиксирование этих неоднозначностей, которое позволило бы сравнить их с хорошо известными физическими константами. Леман и Полмайер /I-3/ разработали определенные способы вышеуказанного фиксирования в случае экспоненциального суперпропагатора.

Если порядок роста суперпропагатора равен $\frac{1}{3}$, то он соответствует экспоненциальному типу. Тогда имеется один свободный параметр. Экспоненциальные суперпропагаторы играют важную роль в приложениях суперпропагаторного метода к физике элементарных частиц. Например, рассматривая регуляризующие свойства суперпропагаторов при различных взаимодействиях, можно прийти к выводу о том, что наиболее благополучная ситуация имеет место при взаимодействиях именно с экспоненциальной зависимостью.

В случае экспоненциального лагранжиана возникающие суперпропагаторы в состоянии ликвидировать любую степенную расходимость. М.К.Волков /4/ использовал суперпропагаторный метод для получения конечных результатов в неперенормируемых теориях. Он применил его, в частности, к хорошо известной модели нейтральной псевдоскалярной мезодинамики. Похожим методом пользовался также в своих исследованиях Окубо /5/.

Впервые корректные результаты с использованием этого метода были получены Волковым. Арбузов и Филиппов /6,7/ применили несколько иной подход к подобным задачам. Салам с сотрудниками /8,9/ использовал суперпропагаторный метод для построения конечной электродинамики с учетом нелинейного взаимодействия с гравитационным полем.

В 1972 году появилась серия работ Лемана /2/, использовавшего суперпропагаторный метод, и наметилась весьма перспективная тенденция перехода от исследования абстрактных моделей с неполиномиальными лагранжианами к описанию реальных физических явлений. Наиболее интересными являются попытки описания взаимодействия квантовых полей, соответствующих кирально-симметричным лагранжианам. В последние годы вышел ряд работ Волкова и других по киральным лагранжианам с использованием суперпропагаторов /4/.

В данной работе в основу построения суперпропагаторов будут положены функции Вайтмана и их свойства для экспоненциальных взаимодействий

$$\mathcal{L}_{int}(x) = G : e^{g\phi(x)} - 1 : = G \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n!} :\phi^n(x):, \tag{I.I}$$

где G - "большая", а g - "малая" константы связи, $\phi(x)$ - вещественное скалярное поле соответствующей частицы нулевой массы.

П. СУПЕРВАЙТМАНОВСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Супервайтмановские функции для экспоненциальных взаимодействий (I) на световом конусе формально определяются согласно

$$W(x_1,x_2) = \langle 0| : e^{g\phi(x_1)} - 1 :: e^{g\phi(x_2)} - 1 : |0\rangle = -iE^{(-)}(x_1-x_2), \tag{2.I}$$

где

$$-iE^{(-)}(x) \hat{=} e^{-\frac{\lambda}{x^2 - i0x_0}} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \frac{1}{(x^2 - i0x_0)^n}, \tag{2.2}$$

$$\lambda = \frac{g^2}{4\pi^2}, \quad x^2 = (x_0)^2 - (\vec{x})^2. \tag{2.3}$$

Символ $\hat{=}$ означает равенство в окрестности светового конуса $x^2 = 0$.

Аналогично имеем

$$W(x_2,x_1) = \langle 0| : e^{g\phi(x_2)} - 1 :: e^{g\phi(x_1)} - 1 : |0\rangle = -iE^{(+)}(x_1-x_2), \tag{2.4}$$

где

$$-iE^{(+)}(x) \hat{=} e^{-\frac{\lambda}{x^2 + i0x_0}} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \frac{1}{(x^2 + i0x_0)^n}. \tag{2.5}$$

В формулах (2.2) и (2.5) общие члены разложения

$$\frac{1}{(x^2 \pm i0x_0)^n} = \mathcal{P}\frac{1}{(x^2)^n} \mp \pi i \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \varepsilon(x_0)\, \delta^{(n-1)}(x^2) \tag{2,6}$$

есть обобщенная функция умеренного роста из пространства Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ и имеют следующие спектральные представления:

$$\left[\frac{1}{4\pi^2 i}\,\frac{1}{(x^2 \pm i0x_0)}\right]^n = \left(\frac{i}{16\pi^2}\right)^{n-1} \frac{1}{\Gamma(n-1)\,\Gamma(n)} \int_0^\infty d\sigma^2 \sigma^{2n-4} D^{(\pm)}_{\sigma^2}(x), \tag{2.7}$$

где $D^{(\pm)}_{\sigma^2}(x)$ -лоренц-инвариантное решение уравнения Клейна-Гордона

$$(\Box - \sigma^2) D^{(\pm)}_{\sigma^2}(x) = 0, \quad D^{(\pm)}_{\sigma^2}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3 i} \int d^4p\, e^{-ipx}\, \theta(\mp p_0)\, \delta(p^2 - \sigma^2) \tag{2.8}$$

Существование супервайтмановских функций $E^{(\pm)}(x)$, определяемых, согласно (2.2) и (2.5), в классе строго локализуемых обобщенных функций в смысле Джаффе $\mathcal{E}'_{\frac{1}{3}}(\mathbb{R}^4)$, может быть доказано методом аналитической регуляризации. Пользуясь преобразованием Зоммерфельда-Ватсона, мы дадим супервайтмановским функциям $E^{(\pm)}(x)$ интегральные представления:

$$E^{(\pm)}(x) = -\frac{1}{2} \int_L dz \frac{(-\lambda)^z}{\Gamma(z+1)\, \operatorname{tg}\pi z} (x^2 \pm i0x_0)^{-z}, \tag{2.9}$$

где L - контур, окружающий полюса, возникающие в нулях $\operatorname{tg}\pi z$, один раз по часовой стрелке. Параметризованные обобщенные функции $(x^2 \pm i0x_0)^{-z} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ определяются при помощи соотношений

$$(x^2 \pm i0x_0)^{-z} = \lim_{\eta \to 0} [(x \pm i\eta)]^{-z}, \tag{2.10}$$

где η -времениподобный вектор, $\eta^2 > 0$.

Следуя Волкову /4/, введем в рассмотрение регуляризованные по γ функции $E^{(\pm)}_\gamma(x)$ согласно формуле

$$E^{(\pm)}_\gamma(x) = -\frac{1}{2} \int_L dz \frac{(-\lambda)^z \cos\pi z}{\Gamma(z+1) \sin\pi\gamma z} (x^2 \pm i0x_0)^{-z}, \tag{2.11}$$

где $Re\gamma \geq 1$.

Предполагая теперь, что для достаточно большого γ контур L может быть выпрямлен, формулу (2.11) можно представить в виде

$$E^{(\pm)}_\gamma(x) = -\frac{1}{2} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} dz \frac{(-\lambda)^z \cos\pi z}{\Gamma(z+1) \sin\gamma\pi z} (x^2 \pm i0x_0)^{-z}$$
$$\left(0 < \alpha < \frac{1}{\gamma},\ Re\gamma \geq 1\right). \tag{2.12}$$

Теперь можем перейти к преобразованию фурье в равенстве (2,12), пользуясь формулой

$$\mathcal{F}(x^2 \pm i0x_0)^{-z} = \frac{2\pi^3}{\Gamma(z)\Gamma(z-1)}\, \theta(\mp p_0)\, \theta(p^2) \left(-\frac{p^2}{4}\right)^{z-2}. \tag{2.13}$$

Тогда получим

$$\tilde{E}^{(\pm)}_\gamma(p) = \pi^2 \lambda^2 \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} dz \frac{e^{i\pi z} \cos\pi z \sin\pi z\, \Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\, \Gamma(z)\Gamma(z+1)}\, \theta(\mp p_0)\, \theta(p^2) \left(-\frac{1}{4}p^2\right)^{z-2}. \tag{2.14}$$

Отметим важнейшие свойства $\tilde{E}^{(\pm)}_\gamma(p)$ - функции.

I. Интегрируемость, т.е. величины

$$\tilde{E}^{(\pm)}_\gamma(f) = \int d^4p\, \tilde{f}(p)\, \tilde{E}^{(\pm)}_\gamma(p) =$$

$$= \pi^2\lambda^2 \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{e^{i\pi z} \cos\pi z \, \sin\pi z \, \Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z \, \Gamma(z)\Gamma(z+1)} \int d^4p \, \theta(\mp p_0)\theta(p^2)\tilde{f}(p)\left(-\frac{\lambda}{4}p^2\right)^{z-2}. \tag{2.15}$$

для $\forall \tilde{f}(p) \in m_{1/3}(R^4)$ являются линейными непрерывными функционалами в пространстве $m_{1/3}(R^4)$, т.е. строго локализуемыми обобщенными функциями:

$$\hat{E}_\gamma^{(\pm)}(p) \in m'_{1/3}(R^4). \tag{2.16}$$

2. $$\hat{E}_\gamma^{(\pm)}(p) = 0 \quad \text{при} \quad p^2 < 0. \tag{2.17}$$

3. Существование предела

$$\lim_{\gamma\to 1} \hat{E}_\gamma^{(\pm)}(p) = \hat{E}^{(\pm)}(p), \quad Re\,\gamma \geq 1, \tag{2.18}$$

где

$$\hat{E}^{(\pm)}(p) = \pi^2\lambda^2 \int\limits_L dz \frac{e^{i\pi z}\cos\pi z \, \Gamma(2-z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)} \theta(\mp p_0)\theta(p^2)\left(-\frac{\lambda}{4}p^2\right)^{z-2}. \tag{2.19}$$

Здесь контур L окружает полюса гамма-функции один раз по часовой стрелке.

Непосредственным вычислением получим следующее представление для супервайтмановских функций:

$$\hat{E}^{(\pm)}(p) = (2\pi)^3 i\lambda\theta(\mp p_0)\left[\delta(p^2) + \theta(p^2)\rho(p^2)\right], \tag{2.20}$$

где

$$\rho(p^2) = \frac{\lambda}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(n+3)} \left(\frac{\lambda}{4}p^2\right)^n - \tag{2.21}$$

– спектральная функция из класса Джаффе $m'_{1/3}(R^4)$, так как

$$\rho(p^2) \sim e^{(p^2)^{1/3}} \quad \text{при} \quad p^2 \to +\infty \tag{2.22}$$

(при $p^2 > 0$ и $p^2 \to +\infty$).

Это означает, что $\hat{E}^{(\pm)}(p) \in m'_{1/3}(R^4)$. Так как

$$\hat{W}(p_1,p_2) = (2\pi)^4\delta(p_1+p_2)\hat{E}^{(-)}\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right) \tag{2.23}$$

и

$$\hat{W}(p_2,p_1) = (2\pi)^4\delta(p_1+p_2)\hat{E}^{(+)}\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right), \tag{2.24}$$

то и $\hat{W}(p_1,p_2)$, $\hat{W}(p_2,p_1) \in m'_{1/3}(R^8)$, т.е. супервайтмановские функции являются строго локализуемыми обобщенными функциями. Здесь через $\hat{W}$ обозначено преобразование Фурье W, т.е.

$$W(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^8}\iint d^4p_1 d^4p_2 \, e^{-i(p_1x_1+p_2x_2)} \hat{W}(p_1,p_2). \tag{2.25}$$

Так как

$$\hat{E}^{(+)}(p) = \hat{E}^{(-)}(p) \quad \text{при} \quad p^2 < 0, \tag{2.26}$$

то из (2.23) и (2.24) следует, что

$$\hat{W}(p_1,p_2) = \hat{W}(p_2,p_1) \quad \text{при} \ (p_1-p_2)^2 < 0. \tag{2.27}$$

III. КОММУТАТОРНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

3.I. Теперь вычислим вакуумные средние от коммутатора для экспоненциальных взаимодействий согласно

$$K(x_1,x_2)=\langle 0|[:e^{g\phi(x_1)}-1:,:e^{g\phi(x_2)}-1:]|0\rangle=$$

$$=W(x_1,x_2)-W(x_2,x_1)=iE(x_1-x_2), \tag{3.I}$$

где

$$E(x)=E^{(+)}(x)-E^{(-)}(x)=$$

$$=-2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}\,\varepsilon(x_0)\,\delta^{(n-1)}(x^2), \tag{3.2}$$

$$E(x)=0 \quad \text{для } x^2<0, \tag{3.3}$$

$$E(-x)=-E(x). \tag{3.4}$$

Существование $E(x)$ - функции в классе $\mathcal{C}'_{1/3}(R^4)$ также может быть доказано методом аналитической регуляризации.

Рассмотрим обобщенную функцию $\Theta(x^2)(x^2)^z\in\mathcal{S}'(R^4)$, которая имеет простые полюса в $z=-n$, $n=1,2,\dots$ и

$$\underset{z=-n}{\text{Выч.}}\ \Theta(x^2)(x^2)^z=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}\,\delta^{(n-1)}(x^2) \tag{3.5}$$

Кроме того, заметим, что гамма-функция $\Gamma(z+1)$ также имеет простые полюса в точке $z=-n$, где $n=1,2,\dots$, с вычетом

$$\underset{z=-n}{\text{Выч.}}\ \Gamma(z+1)=\frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)}. \tag{3.6}$$

Пользуясь этими соотношениями, получим

$$\left.\frac{\Theta(x^2)(x^2)^z}{\Gamma(z+1)}\right|_{z=-n}=\frac{\underset{z=-n}{\text{Выч.}}\ \Theta(x^2)(x^2)^z}{\underset{z=-n}{\text{Выч.}}\ \Gamma(z+1)}=\delta^{(n-1)}(x^2). \tag{3.7}$$

Заменяя производные δ - функции в (3.2) их выражением (3.7), получим

$$E(x)=-2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}\,\varepsilon(x_0)\,\frac{\Theta(x^2)(x^2)^{-n}}{\Gamma(1-n)}. \tag{3.8}$$

Для регуляризации выражения (3.8) используем преобразование Зоммерфельда-Ватсона:

$$E(x)=-\pi i\int_L dz\,\frac{\lambda^z\,\varepsilon(x_0)\,\Theta(x^2)(x^2)^{-z}}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)\Gamma(1-z)\,tg\,\pi z}, \tag{3.9}$$

где подынтегральное выражение имеет полюса только в нулях $tg\,\pi z$, $z=1,2,\dots$. Для достаточно большого γ, выпрямляя контур L, получим:

$$\widehat{E}_\gamma(p)=-\pi i\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}dz\,\frac{\lambda^z\cos\pi z\,\varepsilon(x_0)\,\Theta(x^2)(x^2)^{-z}}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)\Gamma(1-z)}, \tag{3.I0}$$

где $0<\alpha<\frac{1}{\gamma}$ и $Re\,\gamma\geq 1$.

Этот интеграл существует и представляет собой линейный непрерывный функционал в $\mathcal{C}_{1/3}(R^4)$. Теперь, переходя к преобразованию Фурье в (3.I0) и пользуясь формулой

$$\mathcal{F}\,\varepsilon(x_0)\,\Theta(x^2)(x^2)^{-z}=$$

$$=\pi i\,\Gamma(1-z)\Gamma(2-z)\,e^{i\pi z}\sin\pi z\,\Theta(p^2)\left(-\frac{p^2}{4}\right)^{z-2}, \tag{3.II}$$

из равенства /3.10/ получим:

$$\widetilde{E}_\gamma(P)=\pi^2\lambda^2\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}dz\,\frac{\cos\pi z\,\sin\pi z\,e^{i\pi z}}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\,\varepsilon(P_0)\theta(P^2)\left(-\frac{\lambda}{4}P^2\right)^{z-2}, \tag{3.12}$$

где $0<\alpha<\frac{1}{\gamma}$, $Re\,\gamma\geq 1$.

Коммутаторная функция $\widehat{E}_\gamma(P)$ удовлетворяет следующим свойствам:

I. $\widehat{E}_\gamma(P)\in m'_{1/3}(R^4)$ при $Re\,\gamma\geq 1$,

2. $\widehat{E}_\gamma(P)=0$ при $P^2<0$,

3. $\theta(P_0)\widehat{E}_\gamma(P)=\widehat{E}^{(-)}_\gamma(P)$, $\theta(-P_0)\widehat{E}_\gamma(P)=-\widehat{E}^{(+)}_\gamma(P)$

$$\widehat{E}_\gamma(P)=\widehat{E}^{(+)}_\gamma(P)-\widehat{E}^{(-)}_\gamma(P).$$

4.

$$\lim_{\gamma\to 1}\widehat{E}_\gamma(P)=\widehat{E}(P), \tag{3.13}$$

$$\widehat{E}(P)=\pi^2\lambda^2\int_L dz\,\frac{\cos\pi z\,e^{i\pi z}\,\Gamma(2-z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\,\varepsilon(P_0)\theta(P^2)\left(-\frac{\lambda}{4}P^2\right)^{z-2}, \tag{3.14}$$

где L - контур, окружающий нули гамма-функции один раз по часовой стрелке. Из (3.14) непосредственным вычислением получим

$$\widehat{E}(P)=-(2\pi)^3 i\lambda\,\varepsilon(P_0)\left[\delta(P^2)+\theta(P^2)\rho(P^2)\right], \tag{3.15}$$

где $\rho(P^2)$ - спектральная функция, определяемая по формуле /2.21/.

3.2. Введем в рассмотрение вакуумные средние от антикоммутатора для экспоненциальных взаимодействий согласно

$$K^{(1)}(x_1,x_2)=\langle 0|[:e^{g\phi(x_1)}-1:,:e^{g\phi(x_2)}-1:]_+|0\rangle= \tag{3.16}$$

$$=W(x_1,x_2)+W(x_2,x_1)=iE^{(+)}(x_1-x_2),$$

где $E^{(1)}(x)=-i\left[E^{(+)}(x)+E^{(-)}(x)\right]$.

Нам необходимо будет аналитически регулированное выражение также и для антикоммутатора

$$E^{(1)}(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\,\mathcal{P}\frac{1}{(x^2)^n} \tag{3.17}$$

$$E^{(1)}(x)=i\int_L dz\,\frac{(-\lambda)^z}{\Gamma(z+1)\,tg\,\pi z}\,(x^2)^{-z} \tag{3.18}$$

Пользуясь предыдущими результатами, получим

$$\widetilde{E}^{(1)}_\gamma(P)=-\pi^2\lambda^2 i\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}dz\,\frac{e^{i\pi z}\cos\pi z\,\Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z-1)}\,\theta(P^2)\left(-\frac{1}{4}P^2\right)^{z-2}. \tag{3.19}$$

Регуляризованный антикоммутатор $\widehat{E}^{(1)}_\gamma(P)$ удовлетворяет условиям:

I. $\widehat{E}^{(1)}_\gamma(P)\in m'_{1/3}(R^4)$. (3.20)

2.

$$\lim_{\gamma\to 1}\widehat{E}^{(1)}_\gamma(P)=\widehat{E}^{(1)}(P)\in m'_{1/3}(R^4), \tag{3.21}$$

где антикоммутатор $\widehat{E}^{(1)}(P)$ определяется по формуле

$$\widehat{E}^{(1)}(P)=(2\pi)^3\lambda\,\delta(P^2)+$$

$$+(2\pi)^3\frac{\lambda^2}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(n+3)}\,\theta(P^2)\left(\frac{\lambda}{4}P^2\right)^n \tag{3.22}$$

или

$$\tilde{E}^{(1)}(p)=(2\pi)^3\lambda\left[\delta(p^2)+\theta(p^2)\rho(p^2)\right],\tag{3.23}$$

где $\rho(p^2)$ – спектральная функция, определяемая по формуле (2.21).

IУ. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ И ОПЕРЕЖАЮЩИЕ СУПЕРПРОПАГАТОРЫ

IУ.I. Постановка задачи

Следуя аксиоматическому подходу Боголюбова /II-I3/, определим двухточечную запаздывающую функцию Грина экспоненциальных взаимодействий, т.е.

$$\tau(x_1;x_2)=\langle 0|R(:e^{g\phi(x_1)}-1::e^{g\phi(x_2)}-1:)|0\rangle\tag{4.I}$$

в классе строго локализуемых обобщенных функций $\mathcal{C}'_{1/3}(R^4)$, требуя выполнения условий от вакуумных средних запаздывающего произведения:

I. Релятивистской инвариантности

$$\tau(\Lambda^{-1}(x_1-a);\Lambda^{-1}(x_2-a))=\tau(x_1;x_2),\ \forall(a,\Lambda)\in\mathcal{P}_+^{\uparrow},\tag{4.2}$$

где a – четырех-вектор трансляции, Λ – преобразование собственной группы Лоренца $L_+^{\uparrow}$, $\mathcal{P}_+^{\uparrow}$ – собственная группа Пуанкаре.

Из трансляционной инвариантности следует, что

$$\tau(x_1;x_2)=E^{\tau}(x_1-x_2)=E^{\tau}(x),\ x=x_1-x_2\tag{4.3}$$

и

$$E^{\tau}(\Lambda x)=E^{\tau}(x),\ \forall\Lambda\in L_+^{\uparrow}.\tag{4.4}$$

2. Вещественности

$$\tau(x_1;x_2)=\tau^*(x_1;x_2)\tag{4.5}$$

или

$$E^{\bar{\tau}}(x)=E^{\tau}(x),\ \text{где}\ E^{\bar{\tau}}(x)=[E^{\tau}(x)]^*.\tag{4.6}$$

3. Разрешимости

$$\tau(x_1;x_2)-\tau(x_2;x_1)=i\left[W(x_1,x_2)-W(x_2,x_1)\right]=$$

$$=-2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}\varepsilon(x_1^0-x_2^0)\,\delta^{(n-1)}((x_1-x_2)^2)\tag{4.6'}$$

4. Запаздывания

$$\tau(x_1;x_2)=0\ \text{при}\quad x_2\le x_1\tag{4.7}$$

или

$$E^{\tau}(\Lambda x)=0\ \text{при}\quad x\le 0.\tag{4.8}$$

Полагая

$$\tau(x_2;x_1)=E^{\tau}(x_2-x_1)=E^{a}(x_1-x_2)=E^{a}(x),\ x=x_1-x_2,\tag{4.9}$$

где

$$E^{a}(x)=0\quad\text{при}\quad x\ge 0,\tag{4.10}$$

$$E^{a}(\Lambda x)=E^{a}(x),\ \Lambda\in L_+^{\uparrow},\tag{4.11}$$

$$E^{\bar{a}}(x)=E^{a}(x),\ E^{\bar{a}}(x)=[E^{a}(x)]^*,\tag{4.12}$$

мы можем записать условие разрешимости (4.6) в виде

$$E^{\tau}(x)-E^{a}(x)=E(x),\tag{4.13}$$

где

$$E(x)=E^{(+)}(x)-E^{(-)}(x)=-2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}\varepsilon(x_0)\,\delta^{(n-1)}(x^2)\tag{4.14}$$

и

$$E(-x)=-E(x).\tag{4.15}$$

Как было доказано в разделе П, величина $E(x)$, определяемая через разности двух супервайтмановских функций (4.I4), является строго локализуемой обобщенной функцией из пространства $\mathcal{C}'_{1/3}(R^4)$.

Теперь мы можем дать определение запаздывающих и опережающих суперпропагаторов, исходя из аксиоматического подхода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величины $E^{r}(x)$ и $E^{a}(x)$ будем называть запаздывающими и опережающими суперпропагаторами, если они обладают следующими свойствами:

I. Лоренц-инвариантности

$$E^{\binom{r}{a}}(\Lambda x) = E^{\binom{r}{a}}(x), \quad \Lambda \in L_+^{\uparrow} \tag{4.I6}$$

2. Вещественности

$$E^{\binom{\bar r}{\bar a}}(x) = E^{\binom{r}{a}}(x), \quad E^{\binom{\bar r}{\bar a}}(x) = \left[E^{\binom{r}{a}}(x)\right]^{*} \tag{4.I7}$$

3. Разрешимости

$$E^{r}(x) - E^{a}(x) = E(x), \tag{4.I8}$$

где

$$E(x) = E^{(+)}(x) - E^{(-)}(x) = -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)} \varepsilon(x_0)\delta^{(n-1)}(x^2) \in \mathcal{C}'_{1/3}(R^4) \tag{4.I9}$$

и

$$E(-x) = E(x). \tag{4.20}$$

4. Локальности

$$E^{r}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \leq 0 \quad (\text{условие запаздывания}),$$
$$E^{a}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \geq 0 \quad (\text{условие опережения}) \tag{4.20$'$}$$

5. Минимальной сингулярности Лемана-Полмайера

(дополнительное динамическое условие)

Это означает, что запаздывающие и опережающие суперпропагаторы $E^{r}(x)$ и $E^{a}(x)$ свободны от δ-образной сингулярного вида $\sum_{n=0}^{\infty} C_n \Box_x^n \delta(x)$ в координатном пространстве.

В импульсном пространстве условие минимальной сингулярности Лемана-Полмайера /I-3/ означает, что

$$\widetilde{E}^{\binom{r}{a}}(p) \to 0 \qquad \text{при} \quad p^2 \to +\infty \tag{4.2I}$$

(см. предыдущий раздел).

Теперь решение уравнения (4.I8) и (4.I9), удовлетворяющее условиям (4.20)$'$, формально можно представить в виде

$$E^{r}(x) = \Theta(x_0)E(x) = -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)} \Theta(x_0)\delta^{(n-1)}(x^2), \tag{4.22}$$

$$E^{a}(x) = -\Theta(-x_0)E(x) = -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)} \Theta(-x_0)\delta^{(n-1)}(x^2). \tag{4.23}$$

Мы попытаемся доказать, что разложения (4.22) и (4.23) для величин $E^{r}(x)$ и $E^{a}(x)$ на световом конусе существуют в классе строго локализуемых обобщенных функций $\mathcal{C}'_{1/3}(R^4)$ и удовлетворяют условиям лоренц-инвариантности (4.I6), вещественности (4.I7) и разрешимости (4.I8). Таким образом, задача, поставленная двухточечной запаздывающей функцией $r(x_1; x_2)$ в классе $\mathcal{C}'_{1/3}(R^8)$ определенная формально согласно (4.I) и удовлетворяющая условиям (4.2)-(4.7), сводится к задаче построения запаздывающих и опережающих суперпропагаторов $E^{r}(x)$ и $E^{a}(x)$ в классе $\mathcal{C}'_{1/3}(R^4)$ /I4/.

IУ.2. Построение запаздывающих и опережающих суперпропагаторов и их свойства

Пользуясь выражением (3.2) для коммутаторной функции $E(x)$, мы можем представить запаздывающие и опережающие суперпропагаторы $E^{(a)}_{(x)}^{(z)}$ в виде

$$E^{\binom{z}{a}}(x) = -2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n \theta(\pm x_0)}{\Gamma(n)\Gamma(n+1)} \cdot \frac{\theta(x^2)(x^2)^{-n}}{\Gamma(1-n)}. \quad (4.24)$$

Для регуляризации разложения (4.24) используем преобразование Зоммерфельда–Ватсона:

$$E^{\binom{z}{a}}(x) = -\pi i \int_L dz \frac{\lambda^z \theta(\pm x_0)\theta(x^2)(x^2)^{-z}}{\Gamma(z)\Gamma(z+1)\Gamma(1-z)\, tg\pi z}. \quad (4.25)$$

Подынтегральное выражение в (4.25) имеют полюсы только в нулях $tg\pi z$, $z=1,2,\dots$, где L – контур, окружающий положительную вещественную ось один раз по часовой стрелке.

Следуя Волкову /4/, вводим в рассмотрение регуляризованную запаздывающих и опережающих суперпропагаторов $E^{\binom{z}{a}}(x)$ по формуле

$$E_\gamma^{\binom{z}{a}}(x) = -\pi i \int_L dz \frac{\cos\pi z\, \lambda^z \theta(\pm x_0)\theta(x^2)(x^2)^{-z}}{\sin\gamma\pi z\, \Gamma(z)\Gamma(z+1)\Gamma(1-z)}, \quad Re\gamma \geq 1. \quad (4.26)$$

Предположим теперь, что для достаточно большого γ контур L может быть выпрямлен:

$$E_\gamma^{\binom{z}{a}}(x) = -\pi i \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{\lambda^z \cos\pi z\, \theta(\pm x_0)\theta(x^2)(x^2)^{-z}}{\sin\gamma\pi z\, \Gamma(z)\Gamma(z+1)\Gamma(1-z)}, \quad 0<\alpha<\frac{1}{\gamma}. \quad (4.27)$$

Теперь перейдем к преобразованию Фурье в (4.27), пользуясь формулой

$$\mathcal{F}\left[\theta(\pm x_0)\theta(x^2)(x^2)^{-z}\right] = \frac{\pi}{2}\Gamma(1-z)\Gamma(2-z)\left[-\frac{1}{4}(p^2 \mp i0p_0)\right]^{z-2}$$

$$(z \neq 2,3,\dots). \quad (4.28)$$

Получим

$$\widehat{E}_\gamma^{\binom{z}{a}}(p) = \frac{\pi^2\lambda^2}{2i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{\cos\pi z\, \Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\, \Gamma(z)\Gamma(z+1)} \left[-\frac{\lambda}{4}(p^2 \mp i0p_0)\right]^{z-2}. \quad (4.29)$$

Легко видеть, что величина

$$\widehat{E}_\gamma^{\binom{z}{a}}(\hat{f}) = \int d^4p\, \hat{f}(p)\, \widehat{E}_\gamma^{\binom{z}{a}}(p) =$$

$$= -\pi i \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{\cos\pi z\, \Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\, \Gamma(z)\Gamma(z+1)} \int d^4p\, \hat{f}(p)\left[-\frac{\lambda}{4}(p^2 \mp i0p_0)\right]^{z-2} \quad (4.30)$$

для $\forall\, \hat{f}(p) \in M_{1/3}(R^4)$ есть линейный непрерывный функционал в $M_{1/3}(R^4)$.

Отметим важнейшие свойства параметризованных запаздывающих и опережающих суперпропагаторов $\widehat{E}_\gamma^{z}(p)$ и $\widehat{E}_\gamma^{a}(p)$ для $Re\gamma \geq 1$:

I. Интегрируемости

$$\widehat{E}_\gamma^{\binom{z}{a}}(p) \in M'_{1/3}(R^4) \quad \forall\, Re\gamma \geq 1,$$

т.е. величины

$$\widehat{E}_\gamma^{\binom{z}{a}}(\hat{f}) = \int d^4p\, \hat{f}(p)\, \widehat{E}_\gamma^{\binom{z}{a}}(p) =$$

$$= -\pi i \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz \frac{\cos\pi z\, \Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\, \Gamma(z)\Gamma(z+1)} \int d^4p\, \hat{f}(p)\left[-\frac{\lambda}{4}(p^2 \mp i0p_0)\right]^{z-2}, \quad (4.31)$$

для $\forall\, \hat{f}(p) \in M_{1/3}(R^4)$ являются линейными непрерывными функционалами в $M_{1/3}(R^4)$ и $0<\alpha<\frac{1}{\gamma}$.

2. Разрешимости

$$\widehat{E}^{r}_{\gamma}(P)-\widehat{E}^{a}_{\gamma}(P)=$$

$$=\frac{\pi^2\lambda^2}{2i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}dz\,\frac{\cos\pi z\,\Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\left\{\left[-\frac{\lambda}{4}(p^2-i0P_0)\right]^{z-2}-\left[-\frac{\lambda}{4}(p^2+i0P_0)\right]^{z-2}\right\}.$$

(4.32)

Пользуясь формулой

$$(p^2-i0P_0)^{\tau}-(p^2+i0P_0)^{\tau}=\frac{2\pi i\,e^{i\pi\tau}}{\Gamma(-\tau)\Gamma(\tau+1)}\,\varepsilon(P_0)\,\theta(p^2)(p^2)^{\tau},$$

(4.33)

из(4.33) получим

$$\widehat{E}^{r}_{\gamma}(P)-\widehat{E}^{a}_{\gamma}(P)=$$

$$=\pi^2\lambda^2\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}dz\,\frac{e^{i\pi z}\cos\pi z\,\sin\pi z\,\Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\,\varepsilon(P_0)\,\theta(p^2)\left(-\frac{\lambda}{4}p^2\right)^{z-2}=\widehat{E}(P)\in m'_{1/3}(\mathbb{R}^4),$$

(4.34)

где $0<\alpha<\frac{1}{\gamma}$ и $Re\,\gamma\geq 1$.

3.Запаздывания

$$E^{r}_{\gamma}(x)=0 \quad \text{при} \quad x\lesssim 0,$$
$$E^{a}_{\gamma}(x)=0 \quad \text{при} \quad x\gtrsim 0.$$

(4.35)

4.Вещественности

$$\left[E^{(\overset{r}{a})}_{\gamma}(x)\right]^{*}=E^{(\overset{r}{a})}_{\gamma}(x).$$

(4.36)

5.Существования предела

$$\lim_{\gamma\to 1}\widetilde{E}^{(\overset{r}{a})}_{\gamma}(P)=\widehat{E}^{(\overset{r}{a})}(P).$$

(4.37)

Кроме того, при вычислении n - точечных коэффициентных функций обобщенного гамильтониана будем использовать регуляризованные запаздывающие и опережающие суперпропагаторы вида (4.39). Теперь,возвращаясь к контуру L и переходя к пределу при $\gamma\to 1$, получим

$$\widetilde{E}^{(\overset{r}{a})}(P)=\frac{\pi^2\lambda^2}{2i}\int_{L'}dz\,\frac{\cos\pi z}{\sin^2\pi z\,\Gamma(z+1)\Gamma(z+2)\Gamma(z+3)}\left[-\frac{\lambda}{4}(p^2\mp i0P_0)\right]^{z},$$

(4.38)

где контур L' начинается и кончается в $+\infty$ и окружает полюса - $1,0,+1$,...

Непосредственным вычислением этого интеграла по соответствующим полюсам окончательно получаем

$$\widehat{E}^{(\overset{r}{a})}(P)=-4\pi^2\lambda\,\frac{1}{p^2\mp i0P_0}-\pi^2\lambda^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(-\frac{\lambda}{4}p^2\right)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(n+3)}\times$$

$$\times\left\{\ln\left[-\frac{\lambda}{4}(p^2\mp i0P_0)\right]-\psi(n+1)-\psi(n+2)-\psi(n+3)\right\},$$

(4.39)

где $\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ - функция Эйлера. Выражение (4.39) представляет G - функцию Меера. Она обладает хорошо известными свойствами. Эти свойства могут быть выведены также непосредственно из (4.39). Особый интерес представляют следующие три свойства запаздывающих и опережающих суперпропагаторов:

I. $\widehat{E}^{r}(P)$- и $\widehat{E}^{a}(P)$- функции удовлетворяют условию разрешимости, т.е.

$$\hat{E}^{r}(p)-\hat{E}^{a}(p)=\hat{E}(p),$$

где (4.40)

$$E(p)=(2\pi)^{3}\lambda i\varepsilon(p_0)\left[\delta(p^2)+\theta(p^2)\rho(p^2)\right]\in m'_{1/3}(R^4).$$

(4.41)

Это означает, что

$$\hat{E}^{r}(p)-\hat{E}^{a}(p)=\hat{E}(p)\sim e^{(p^2)^{1/3}} \quad \text{при } p^2\to+\infty.$$

(4.42)

2. $\hat{E}^{r}(p)$ - и $\hat{E}^{a}(p)$ - функции удовлетворяют условию минимальной сингулярности, т.е.

$$\hat{E}^{\binom{r}{a}}(p)\to 0 \quad \text{при } p^2\to+\infty.$$

(4.43)

3. $\hat{E}^{\binom{r}{a}}(p)$ - функции имеют разрез по λ в точке $\lambda=0$. Заметим, что свойство I следует непосредственно из (4.39), где использованы формулы

$$\frac{1}{p^2\pm i0p_0}=\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\mp i\pi\varepsilon(p_0)\delta(p^2),$$

(4.44)

$$\ln(-p^2\pm i0p_0)=\ln\varepsilon(p)p^2\pm\pi i\varepsilon(p_0)\theta(p^2).$$

(4.45)

Что касается оценки (4.43), то она получается на основе формулы Стирлинга. Для доказательства свойства 2 заметим, что при $p^2>0$

$$\hat{E}^{\binom{r}{a}}(p)=\frac{\pi^3\lambda^2}{2i}\int_{L'}dz\frac{\cos\pi z}{\sin^2\pi z\,\Gamma(z+1)\Gamma(z+2)\Gamma(z+3)}\left(-\frac{\lambda}{4}p^2\right)^{z}.$$

(4.46)

Контур L' может быть выпрямлен параллельно мнимой оси, сохраняя при этом сходимость интеграла. Действительно, пользуясь лежащей на контуре в области $C=\{z:\operatorname{Re}z<0\}$ оценкой $|\Gamma(x+iy)|\sim e^{-\frac{\pi}{2}|y|}$ при $|y|\to+\infty$, получим

$$\int_{C}dz\frac{1}{\Gamma(z+1)\Gamma(z+2)\Gamma(z+3)}\left(-\frac{\lambda}{4}p^2\right)^{z}\sim|p^2|^{x}\int_0^{\infty}dy\,e^{-\frac{\pi}{2}|y|}.$$

(4.47)

Следовательно,

$$\hat{E}^{\binom{r}{a}}(p)\to 0 \quad \text{при } p^2\to+\infty, \qquad (4.48)$$

так как $(-1<x<0)$.

Последнее соотношение (4.48) обеспечивает выполнение условия минимальной сингулярности Лемана-Полмайера в импульсном пространстве /I-3/, т.е. указывает на отсутствие сингулярности типа δ - функции вначале координат $x=0$ в координатном пространстве. Наконец, свойство 3 следует непосредственно из представления (4.39).

V. ПРИЧИННЫЕ СУПЕРПРОПАГАТОРЫ

V.I. Постановка задачи

Следуя аксиоматическому подходу Боголюбова /II-I3/, можно определить двухточечную причинную функцию Грина экспоненциальных взаимодействий

$$\tau(x_1;x_2)=\langle 0|T(:e^{g\phi(x_1)}-1::e^{g\phi(x_2)}-1:)|0\rangle \qquad (5.I)$$

в классе строго локализуемых обобщенных функций, требуя выполнения следующих условий:

I. Релятивистской инвариантности

$$\tau(\Lambda x_1+a;\Lambda x_2+a)=\tau(x_1;x_2)\quad\forall(a,\Lambda)\in\mathcal{P}_+^{\uparrow} \qquad (5.2)$$

Из-за трансляционной инвариантности следует, что

$$\tau(x_1;x_2) = -iE^{c}(x_1-x_2), \tag{5.3}$$

при этом

$$E^{c}(\Lambda\xi) = E^{c}(\xi), \quad \Lambda \in L_{+}^{\uparrow}. \tag{5.4}$$

2. Симметрии

$$\tau(x_1;x_2) = \tau(x_2,x_1). \tag{5.5}$$

3. Унитарности

$$\tau(x_1;x_2) + \overset{*}{\tau}(x_1,x_2) = W(x_1,x_2) + W(x_2,x_1) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\,g\,\frac{1}{[(x_1-x_2)^2]^n}, \tag{5.6}$$

где

$$\overset{*}{\tau}(x_1;x_2) = iE^{\bar{c}}(x_1-x_2), \quad E^{\bar{c}}(x) = [E^{c}(x)]^{*}. \tag{5.7}$$

4. Причинности

$$\tau(x_1;x_2) = \begin{cases} W(x_1,x_2) \text{ при } & x_2 \lesssim x_1, \\ W(x_2,x_1) \text{ при } & x_1 \lesssim x_2. \end{cases} \tag{5.8}$$

Преобразование Фурье причинной функции Грина $\tau(x_1,x_2)$ определяется по формуле

$$\hat{\tau}(p_1,p_2) = (2\pi)^4\,\delta(p_1+p_2)\,\hat{E}^{c}\left(\frac{p_1-p_2}{2}\right), \tag{5.9}$$

где

$$\tau(x_1,x_2) = \frac{1}{(2\pi)^8}\iint d^4p_1\,d^4p_2\,e^{-i(p_1x_1+p_2x_2)}\,\hat{\tau}(p_1,p_2) \tag{5.10}$$

и

$$E^{c}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{-ipx}\,\hat{E}^{c}(p). \tag{5.11}$$

Теперь мы можем дать определение причинного суперпропагатора $E^{c}(x)$ в аксиоматическом подходе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величину $E^{c}(x)$ будем называть причинным суперпропагатором для экспоненциального взаимодействия, если она обладает следующими свойствами:

1. Лоренц-инвариантности

$$E^{c}(\Lambda x) = E^{c}(x), \quad \Lambda \in L_{+}^{\uparrow}. \tag{5.12}$$

2. Симметрии

$$E^{c}(-x) = E^{c}(x). \tag{5.13}$$

3. Унитарности

$$E^{c}(x) - E^{\bar{c}}(x) = iE^{(1)}(x), \tag{5.14}$$

где

$$E^{(1)}(x) = -i[E^{(+)}(x) + E^{(-)}(x)] = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{1}{(x^2)^n} \in \mathcal{C}'_{1/3}(R^4). \tag{5.15}$$

4. Причинности

$$E^{c}(x) = \begin{cases} E^{(-)}(x) \text{ при } & x \geq 0, \\ E^{(+)}(x) \text{ при } & x \leq 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

5. Условием минимальной сингулярности Лемана-Полмайера (дополнительное динамическое условие)

$$\operatorname{Re} i\,\hat{E}^{c}(p) \to 0 \text{ при } p^2 \to +\infty. \tag{5.17}$$

V.2. ПОСТРОЕНИЕ ПРИЧИННОГО СУПЕРПРОПАГАТОРА

Введем в рассмотрение параметризованный причинный суперпропагатор $\widehat{E}^{c}_{\gamma}(P)$ для $Re\,\gamma \geq 1$ при помощи соотношения

$$\widehat{E}^{c}_{\gamma}(P) = \widehat{E}^{(+)}_{\gamma}(P) - \widehat{E}^{r}_{\gamma}(P), \tag{5.18}$$

$$\widehat{E}^{c}_{\gamma}(P) = \widetilde{E}^{(-)}_{\gamma}(P) - \widehat{E}^{a}_{\gamma}(P), \tag{5.19}$$

где

$$\widehat{E}^{(\pm)}_{\gamma}(P) = \pi^2\lambda^2 \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz\, \frac{e^{i\pi z}\cos\pi z\,\sin\pi z\,\Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\,\theta(\mp P_0)\,\theta(P^2)\left(-\frac{\lambda}{4}P^2\right)^{z-2}, \tag{5.20}$$

$$\widehat{E}^{(r,a)}_{\gamma}(P) = \frac{\pi^2\lambda^2}{2i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz\, \frac{\cos\pi z\,\Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\left[-\frac{\lambda}{4}(P^2 \mp i0P_0)\right]^{z-2}, \tag{5.21}$$

где $0 < \alpha < \frac{1}{\gamma}$.

Из (5.18) и (5.21) следует, что при малых импульсах $P^2 < 0$ Фурье-образы всех трех функций $\widetilde{E}^{c}_{\gamma}(P)$, $\widehat{E}^{r}_{\gamma}(P)$ и $\widetilde{E}^{a}_{\gamma}(P)$ совпадают:

$$\widehat{E}^{c}_{\gamma}(P) = \widehat{E}^{r}_{\gamma}(P) = \widehat{E}^{a}_{\gamma}(P) \quad \text{при} \quad P^2 < 0. \tag{5.22}$$

Подставляя (5.20) и (5.21) в (5,18) и (5.19), будем иметь

$$\widehat{E}^{c}_{\gamma}(P) = \frac{\pi^2\lambda^2 i}{2}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz\, \frac{\cos\pi z\,\Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\left[-\frac{\lambda}{4}(P^2+i0)\right]^{z-2}, \tag{5.23}$$

где

$$(P^2+i0)^{\tau} = (P^2 \pm i0P_0)^{\tau} - 2i\,e^{i\pi\tau}\sin\pi\tau\,\theta(\pm P_0)\,\theta(P^2)\,(P^2)^{\tau}$$

$$(-1 < Re\,\tau < 0). \tag{5.24}$$

Приведем важнейшие свойства параметризованного причинного суперпропагатора $\widehat{E}^{c}_{\gamma}(P)$, определяемого согласно (5.23). Для $Re\,\gamma \geq 1$ причинный суперпропагатор $\widehat{E}^{c}_{\gamma}(P)$ удовлетворяет следующим условиям:

I. Строгой локализуемости

$$\widehat{E}^{c}_{\gamma}(P) \in \mathcal{M}'_{1/3}(R^4). \tag{5.25}$$

2. Аналитичности по γ

Для формулировки условия унитарности определяем комплексно-сопряженный суперпропагатор по формуле

$$\widehat{E}^{\bar c}_{\gamma}(P) = \left[\widehat{E}^{c}_{\gamma}(P)\right]^{*} = \frac{\pi^2\lambda^2}{2i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz\, \frac{\cos\pi z\,\Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\left[-\frac{\lambda}{4}(P^2-i0)\right]^{z-2}. \tag{5.26}$$

3. Унитарности

$$\widehat{E}^{c}_{\gamma}(P) - \widetilde{E}^{\bar c}_{\gamma}(P) = \frac{\pi^2\lambda^2}{2i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} dz\, \frac{\cos\pi z\,\Gamma(2-z)}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\left\{\left[-\frac{\lambda}{4}(P^2+i0)\right]^{z-2} - \left[-\frac{\lambda}{4}(P^2-i0)\right]^{z-2}\right\}. \tag{5.27}$$

Пользуясь формулой

$$(P^2+i0)^{z-2} - (P^2-i0)^{z-2} = -2i\,e^{i\pi z}\sin\pi z\,\theta(P^2)\,(P^2)^{z-2}, \tag{5.28}$$

получим:

$$\tilde{E}^{c}_{\gamma}(p)-\tilde{E}^{\bar{c}}_{\gamma}(p)=-\pi^3\lambda^2\int\limits_{L'_\gamma}dz\frac{\cos\pi z\,\Theta(p^2)}{\sin\gamma\pi z\,\Gamma(z-1)\Gamma(z)\Gamma(z+1)}\left(\frac{\lambda}{4}p^2\right)^{z-2},$$

(5.29)

где L'_γ - контур, окружающий полюса $z=-1$, $z=-2+\frac{n+1}{\gamma}$, $n=1,2,\ldots$ один раз по часовой стрелке. Поэтому условие унитарности может быть представлено в виде

$$\tilde{E}^{c}_{\gamma}(p)-\tilde{E}^{\bar{c}}_{\gamma}(p)=(2\pi)^3\frac{\lambda i}{\gamma}\delta(p^2)+$$
$$+(2\pi)^3\frac{\lambda^2 i}{\gamma}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(e^{i\pi})^{\frac{n+2}{\gamma}}\Theta(p^2)\left(\frac{\lambda}{4}p^2\right)^{\frac{n+2}{\gamma}-2}}{\Gamma\left(\frac{n+2}{\gamma}-1\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{\gamma}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{\gamma}+1\right)}.$$

(5.30)

4. Существования предела

$$\lim_{\gamma\to 1}\tilde{E}^{c(\bar{c})}_{\gamma}(p)=\tilde{E}^{c(\bar{c})}(p)\in m'_{1/3}(R^4),$$

(5.31)

где

$$\tilde{E}^{c(\bar{c})}(p)=\frac{\pi^2\lambda^2}{2i}\int\limits_{L}dz\frac{\cos\pi z\,\Gamma(-z)}{\sin\pi z\,\Gamma(z+2)(z+3)}\left[-\frac{\lambda}{4}(p^2\pm i0)\right]^{z},$$

(5.32)

где L -контур, окружающий полюса функции $\sin\pi z$, один раз по часовой стрелке.

Вычисляя вычеты этих двойных полюсов, мы можем представить причинные суперпропагаторы $\tilde{E}^{c}(p)$ и $\tilde{E}^{\bar{c}}(p)$ при помощи бесконечных рядов вида

$$\tilde{E}^{c(\bar{c})}(p)=4\pi^2\lambda\frac{1}{p^2\pm i0}-\pi^2\lambda^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(n+3)}\left[-\frac{\lambda}{4}(p^2\pm i0)\right]^n\times$$
$$\times\left\{\ln\left[-\frac{\lambda}{4}(p^2\pm i0)\right]-\psi(n+1)-\psi(n+2)-\psi(n+3)\right\}.$$

(5.33)

Фурье-образы причинных суперпропагаторов $\tilde{E}^{c}(p)$ и $\tilde{E}^{\bar{c}}(p)$ имеют следующие представления:

$$E^{c(\bar{c})}(x)=i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\frac{1}{(x^2\mp i0)^n}=i\left(e^{-\frac{\lambda}{x^2\mp i0}}-1\right).$$

(5.34)

При выводе этого представления мы воспользовались преобразованием Фурье обобщенных функций $(x^2\mp i0)^{\tau}\in\mathcal{G}'(R^4)$

$$\mathcal{F}(x^2\mp i0)^{-\tau}=-\frac{\pi^2 i\,\Gamma(2-\tau)}{\Gamma(\tau)}\left[\frac{1}{4}(p^2\pm i0)\right]^{\tau-2}.$$

(5.35)

Отметим следующие важные свойства причинных суперпропагаторов.

I. Строгая локализуемость

$$\tilde{E}^{c}(p)\in m'_{1/3}(R^4).$$

(5.36)

2. Унитарность

$$\tilde{E}^{c}(p)-\tilde{E}^{\bar{c}}(p)=i\tilde{E}^{(1)}(p).$$

(5.37)

Действительно, непосредственно из представления (5.33) получим

$$\operatorname{Im} i\tilde{E}^{c}(p)=4\pi^3\lambda\,\delta(p^2)+$$
$$+\pi^3\lambda\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+2)\Gamma(n+3)}\Theta(p^2)\left(\frac{\lambda}{4}p^2\right)^n=\frac{i}{2}\tilde{E}^{(1)}(p).$$

(5.38)

Из равенства (5.38) мы видим, что условие унитарности фиксирует мнимую часть суперпропагатора $\tilde{E}^{c}(p)$, т.е.

$$\operatorname{Im} i\,\widehat{E}^{c}(p)=\frac{1}{2}\widehat{E}^{(1)}(p)\in m'_{1/3}(R^{4}).$$

(5.39)

Пользуясь формулой Стирлинга ,можно установить оценку

$$\operatorname{Im} i\,\widehat{E}^{c}(p)\sim e^{(p^2)^{1/3}} \quad \text{при} \quad p^2\to+\infty. \qquad (5.40)$$

3. Минимальная сингулярность

$$\operatorname{Re} i\,\widehat{E}^{c}(p)\to 0 \quad \text{при} \quad p^2\to+\infty. \qquad (5.41)$$

Доказательство в точности совпадает с доказательствами условию минимальной сингулярности для $\widehat{E}^{7}(p)$ и $\widehat{E}^{a}(p)$ суперпропагаторов.

4. Аналитичность

Причинный суперпропагатор $\widehat{E}^{c}(p)$ имеет разрез по λ в точке $\lambda=0$, что видно непосредственно из равенства (5.33).

Авторы выражают благодарность М.К.Волкову за стимулирующие обсуждения и ценные замечания.

Литература

1. H.Lehmann, K.Pohlmeyer, Presented at the Coral Conference of Fundamential Interactions, January 1971; Comm.Math.Phys., 1971, 20, 101.
2. H.Lehmann. Phys.Lett., 1972, 41, 529.
3. K.Pohlmeyer. Comm.Math.Phys., 1972, 26, 130.
4. М.К.Волков, Препринт ОИЯИ, Р2-5569, Дубна, 1971; Comm.Math.Phys., 1968, 7, 289; Ann.Phys., 1968, 49, 202. ОИЯИ, Р2-6393, 1972; ЭЧАЯ, 2, В.I.,1971; ТМФ, II, 273, 1972; ТМФ, 2, 197, 1970.

5. Okubo. Progr.Theor.Phys., 1954, 11, 80.
6. Б.А.Арбузов, А.Т.Филиппов. ЯФ, 8, 365, 1968.
7. Б.А.Арбузов, Н.М.Атакишиев, А.Т.Филиппов. ОИЯИ, Е2-3610, 1967.
8. A.Salam, J.Strathdee. Trieste Preprint, 1969, IC/69/120.
9. A.Salam. Preprint, 1971, IC, IP, IC/71/3.
10. Р.Ф.Стритер, А.С.Вайтман. РСТ-спин,статистика и все такое. М.,"Наука",1966.
11. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей,"Наука", М., 1973.
12. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов и И.Т.Тодоров. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, "Наука", М., 1969.
13. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев и М.К.Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений,М., "Физматгиз",1958.
14. A.Jaffe. Phys.Rev., 1967, 158, 1454.
15. У.С.Суяров, Л.Ш.Ходжаев. ОИЯИ 2-6844,Дубна,1972; Известия АН УзССР серия физмат наук, № 3, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 мая 1977 года.