

С323  
Б-742

1965 / 2-74

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



30/1-74

P2 - 10473

И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков, А.Б.Швачка

ДИНАМИКА СТОЛКНОВЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ПУЛЬСОНОВ  
В РАМКАХ  $\varphi^4$  ТЕОРИИ ПОЛЯ

6

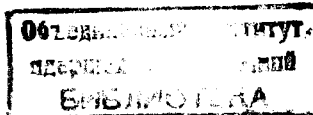
**1977**

P2 - 10473

И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков, А.Б.Швачка

ДИНАМИКА СТОЛКНОВЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ПУЛЬСОНОВ  
В РАМКАХ  $\varphi^4$  ТЕОРИИ ПОЛЯ

*Направлено на конференцию молодых ученых по физике  
атомного ядра, элементарных частиц и конденсированного  
состояния /Гатчина, апрель 1977 года/*



Боголюбовский И.Л., Маханьков В.Г., Швачка А.Б.

P2 - 10473

Динамика столкновения двумерных пульсонов в рамках  $\phi^4$  теории поля

Изложены результаты, относящиеся к столкновению плоских одномерных пульсонов. Обсуждаются свойства неподвижных цилиндрически-симметричных пульсонов. Исследованы лобовые столкновения двумерных пульсонов. В результате столкновения двух одинаковых пульсонов с малыми скоростями ( $v \leq 0,3$ ) они сливаются в один, впоследствии коллапсирующий.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Bogolubsky I.L., Makhankov V.G.,  
Shvachka A.P.

P2 - 10473

Dynamics of Pulson Collisions in  $\phi^4$  Field Theory

The results on collisions of plane (one-dimensional) pulsons are presented. The properties of the resting cylindrically symmetric pulsons are discussed. Head-on collisions of two-dimensional pulsons are investigated. As a result of collision of two identical pulsons moving with small velocities ( $v \leq 0.3$ ) they merge into one pulson collapsing afterwards.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Солитоны релятивистски-инвариантных (РИ) уравнений вызывают сейчас большой интерес как классические модели протяженных частиц. Вслед за изучением свойств неподвижных солитонов - квазичастиц - возникает вопрос о характере их взаимодействия между собой при столкновениях. В данной работе мы исследуем, с использованием ЭВМ, встречные столкновения осциллирующих солитонов ("пульсонов") рассматривая уравнение

$$u_{tt} - \Delta u + u - u^3 = 0. \quad (1)$$

Свойства таких солитонов существенно зависят от размерности пространства. В § 1 изложены результаты, относящиеся к столкновению плоских одномерных пульсонов. В § 2 обсуждаются свойства неподвижных цилиндрически-симметричных пульсонов. Динамика их в лобовых столкновениях рассматривается в § 3.

§1. Слабонепругие взаимодействия одномерных пульсонов

С помощью метода Боголюбова<sup>/1/</sup> в работах<sup>/2/</sup> исследовались асимптотические разложения решений нелинейных волновых уравнений в частных производных. В частности, в случае  $(x, t)$  были найдены решения, описывающие солитоны уравнения (1) малой амплитуды. Учитывая только первый член разложения, запишем эти решения в виде:

$$u(x, t) = A \cdot \text{sech} \left( A \sqrt{\frac{3}{8}} x \right) \cos \left( \sqrt{1 - \frac{3}{8} A^2} t \right) \quad (2)$$

Выражение (2) дает хорошее описание неподвижных пульсонов при малых амплитудах,  $A^2 \ll 1$ . Такие одномерные пульсоны являются формирующимися слабоизлучающими объектами<sup>/3/</sup>. Интенсивность излучения стремится к нулю при  $A \rightarrow 0$ . Поэтому можно говорить, что одномерные пульсоны уравнения (1) являются асимптотически устойчивыми.

Совершая в формуле (2) преобразование Лоренца, получаем приближенное выражение для движущихся со скоростью  $V$  пульсонов:

$$u(x, t) = A \cdot \text{sech} \left[ \sqrt{\frac{3}{8}} A \cdot \gamma \cdot (x - vt) \right] \times \\ \times \cos \left[ \sqrt{1 - \frac{3}{8} A^2} \cdot \gamma \cdot (t - vx) \right], \quad (3) \\ \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

Встречные столкновения солитонов (3), движущихся навстречу друг другу со скоростями  $V$  и  $-V$ , были рассмотрены в численных экспериментах. Была выбрана амплитуда  $A = 0,4$ , скорость  $V$  варьировалась от 0,2 до 0,5. Взаимодействие пульсонов не приводит к заметному росту интенсивности излучения, не изменяет существенно их скорости и амплитуды. Этот результат вполне естествен. Действительно, известно, что взаимодействие произвольного числа солитонов и "бионов" (связанных состояний двух солитонов) в рамках синус-уравнения Гордона является абсолютно упругим <sup>4,5/</sup>. Разлагая в этом уравнении  $\sin u$  в ряд и ограничиваясь при  $A^2 \ll 1$  кубическим членом, получаем уравнение (I) ( $u^3 \rightarrow \frac{1}{6} u^3$ ). Такая "близость" при  $A^2 \ll 1$  уравнения (I) к вполне интегрируемому синус-уравнению Гордона и объясняет слабую неупругость столкновения двух бионов (3). Картина взаимодействия может качественно измениться лишь при весьма малых скоростях пульсонов (3), когда излученная за время их взаимодействия энергия будет порядка кинетической энергии их движения как целого.

Регулярные аналитические методы исследования столкновений неоднородных солитонов пока отсутствуют. Единственным надежным способом исследования здесь является численный эксперимент, который мы проведем в двумерном  $(x, y)$  пространстве с цилиндрически-симметричными  $(CS)$  в собственной системе координат пульсонами.

## § 2. Цилиндрически-симметричные пульсоны малой амплитуды

Рассмотрим уравнение (I), в котором  $\Delta_{rr} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ . Будем, как и в <sup>2,3/</sup>, искать его решение при  $u^2 \ll 1$  в виде  $u(r, t) = c(r) \cdot \cos \omega t + d(r) \cdot \cos 3\omega t + \dots$  (4)

Подставляя (4) в (I), получаем граничную задачу

$$c_{rr} + \frac{1}{r} c_r + \frac{3}{4} c^3 = \lambda c, \quad \lambda = 1 - \omega^2, \quad c_r(0) = 0, \quad c(\infty) = 0. \quad (5)$$

Пусть  $C(r)$  - решение уравнения

$$C_{rr} + \frac{1}{r} C_r - C + C^3 = 0. \quad (6)$$

Тогда  $C(r) = \sqrt{\frac{4}{3}} \lambda^{1/2} \cdot c(\lambda^{1/2} \cdot r)$  - решение (5).

Уравнение (6) при граничных условиях  $C_r(0) = 0, C(\infty) = 0$  имеет,

как и аналогичное уравнение в сферически-симметричной  $(SS)$  геометрии <sup>6/</sup>, счетное множество решений  $C_i(r), i = 1, 2, \dots$ . Значения  $C_i(0)$  образуют монотонно возрастающую последовательность;  $i$ -ое решение ( $i-1$ ) раз пересекает ось абсцисс  $r$ .

Эти результаты становятся понятными, если рассмотреть механическую аналогию уравнения (6) - движение материальной точки в потенциальном рельефе при наличии диссипации энергии <sup>7/</sup>. Действительно, из (6) получим

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{2} C_r^2 + U(C) \right] = -\frac{1}{r} (C_r)^2, \quad U(C) \equiv \frac{1}{2} C^2 + \frac{1}{4} C^4. \quad (7)$$

Уравнение (7) описывает движение материальной точки, координата  $C$  которой изменяется в зависимости от времени  $r$ . Скорость этой точки  $C_r$ , кинетическая энергия  $\frac{1}{2} C_r^2$ , потенциальная энергия  $U(C)$ . В начальный момент (т.е. при  $r=0$ ) диссипативный член  $\frac{1}{r} \cdot (C_r)^2$  в силу  $C_r(0) = 0$  равен нулю.

Конкретные значения  $C_i(0)$  находятся методом стрельбы. В частности,  $C_1(0) = 2,206$ .

Окончательно, неподвижные  $CS$  - пульсоны описываются при  $u^2 \ll 1$  формулой:

$$u(r, t) = \sqrt{\frac{4}{3}} u_0 \cdot c_i(u_0 r) \cdot \cos \omega t = A \cdot \frac{C_i(u_0 r)}{C_i(0)} \cdot \cos \omega t, \quad (8)$$

$$\omega = \sqrt{1 - u_0^2}, \quad A = \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot u_0 \cdot C_i(0).$$

Важно заметить, что  $CS$  - пульсоны (8), как показывают расчеты на ЭВМ, проведенные нами в  $(x, y, t)$  - случае, устойчивы относительно угловых возмущений  $\delta u(\varphi)$ . Этим же свойством обладают формирующиеся долгоживущие пульсоны большой амплитуды, обнаруженные <sup>8/</sup> в рамках уравнений, имеющих более чем одно вакуумное решение:

$$u_{tt} - \Delta_{rr} u - u + u^3 = 0, \quad (9)$$

$$u_{tt} - \Delta_{rr} u + \sin u = 0. \quad (10)$$

Очевидная энергетическая интерпретация этих результатов: отсутствие зависимости решения  $u(r, \varphi, t)$  от угла  $\varphi$  минимизирует член  $(\nabla u)^2$

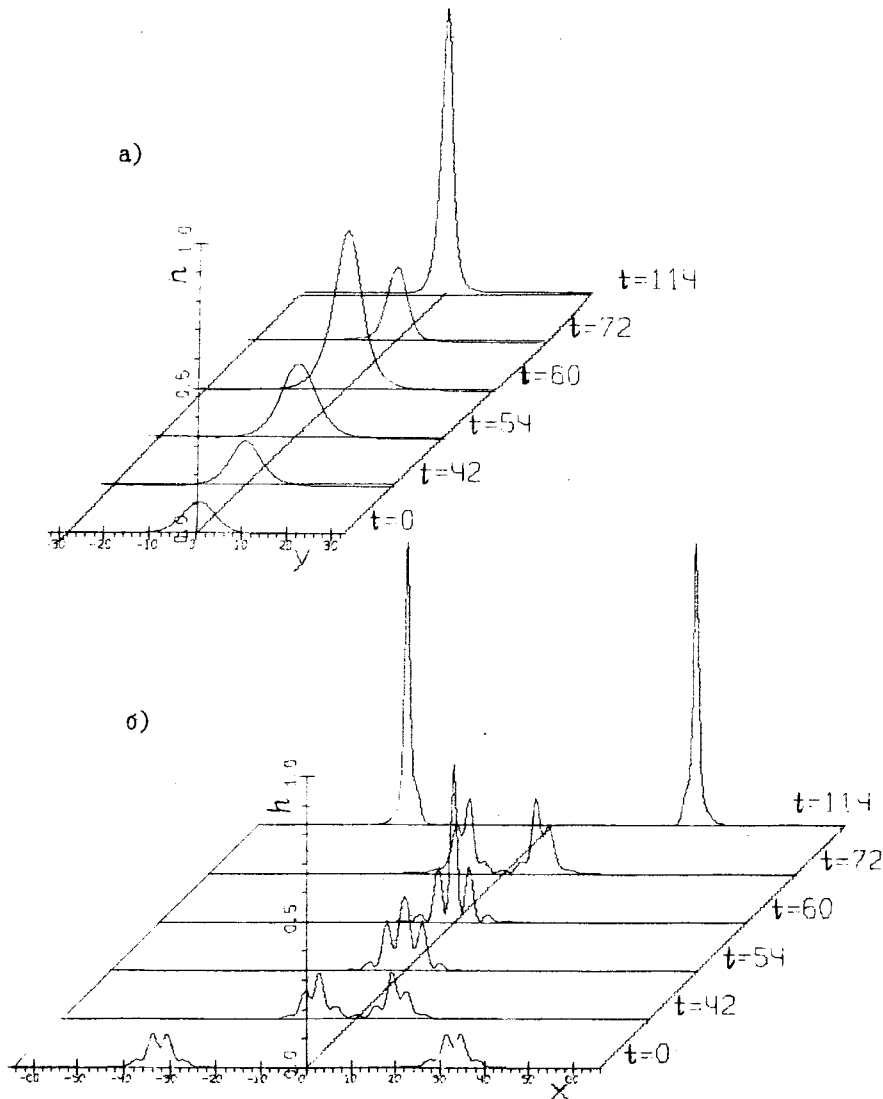


Рис. 1. "Коллапс" квазипульсонов, вышедших из столкновения пульсонов (II) при  $v = 0,6$  ( $h = H/H_{max}$ ,  $H_{max} = 1,11 = H(t = 114)$ ). а) - сечение по оси  $x$ , проведенное в точках  $x$ , где  $H(x, y=0)$  максимально. б) - сечение по оси  $x$ .

в гамильтониане. Этот же факт указывает на устойчивость  $ss$  - пульсонов  $/3, 8 /$  и, вообще,  $SS$  - солитонов в рамках РИ скалярных уравнений относительно угловых возмущений.

Отметим, что  $ss$  - и  $CS$  - пульсоны уравнения (I) не формируются из близких полевых сгустков  $/3 /$ , т.е. не являются (во всяком случае, асимптотически) устойчивыми. Однако их время жизни  $\tau \rightarrow \infty$ , когда амплитуда  $A \rightarrow 0$ . Поэтому при не слишком малых скоростях  $V$  они успевают пройти за время жизни расстояние, значительно превышающее их характерный размер.

### §3. Встречные столкновения двумерных пульсонов

Совершая в (5) преобразование Лоренца, получаем движущийся вдоль оси  $x$  со скоростью  $V$  пульсон:

$$u(x, y, t) = \frac{A}{c_1(t)} \cdot C_1 \left( c_0 \sqrt{1 - v^2} \sqrt{(x - vt)^2 + y^2} \right) \cdot \cos[\gamma \sqrt{1 - v^2} \cdot \delta(t - vx)]. \quad (II)$$

Наиболее сильного взаимного воздействия (II) следует ожидать при лобовых столкновениях солитонов, т.к. при этом возмущение полевой функции  $u(x, y, t)$  пульсона максимально. Такие столкновения были исследованы нами при  $A = 0,4$  и скоростях солитонов  $V_1 = V = -V_2 = 0,2, 0,3, 0,4, 0,6$ . Картина взаимодействия при малых и больших скоростях различна. Динамика взаимодействия пульсонов при  $V = 0,6$  изображена на рис.1. Первоначально удаленные солитоны ( $t = 0$ ) к моменту  $t = 54$  перекрываются так, что в "центре тяжести" системы (при  $x = y = 0$ ) наблюдается максимум плотности энергии

$$H = \frac{1}{2} [u_x^2 + (vu)^2 + u^2 - u^4/2]. \quad (I2)$$

Лобовое столкновение генерирует сильные возмущения полевой функции в  $y$  - направлении ( $t = 60$ ). При  $t = 72$  вновь видны два локализованные осциллирующие сгустка, разбегающиеся в противоположных направлениях. Их размеры  $d_x$  и  $d_y$  по осям  $x$  и  $y$  лишь немного меньше размеров начальных пульсонов. При дальнейшем разбегании  $d_x$  и  $d_y$  уменьшаются и к моменту  $t = 114$  эволюция каждого сгустка заканчивается образованием особенности поля (коллапс).

При начальной скорости  $V = 0,4$  пульсоны после взаимного перекрытия также разделяются на два разбегающихся сгустка. Но в этом случае в дальнейшем происходит "расплывание" движущихся квазипульсонов. При этом амплитуда осцилляций поля и плотность энергии  $H$  уменьшаются вплоть до 0 при  $t \rightarrow \infty$  (рис.2).

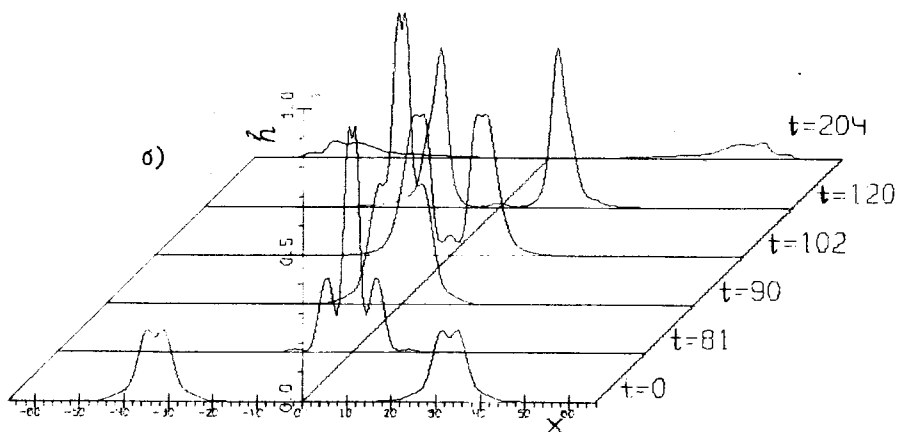
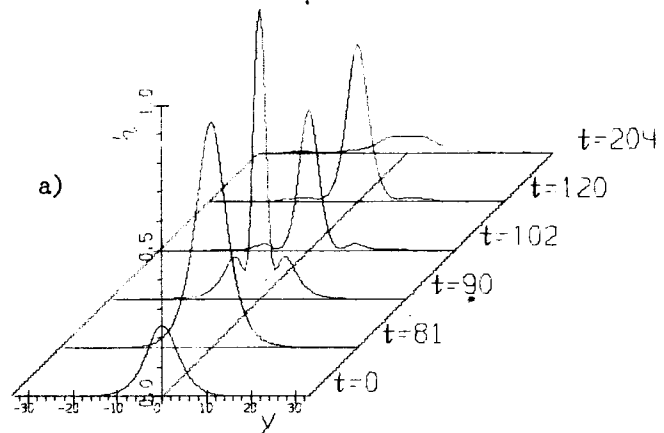


Рис. 2. Столкновение пульсонов (II) при  $V = 0,4$  (расплывание разбегающихся квазипульсонов).  $H_{max} = 0,34 = H(t=90)$

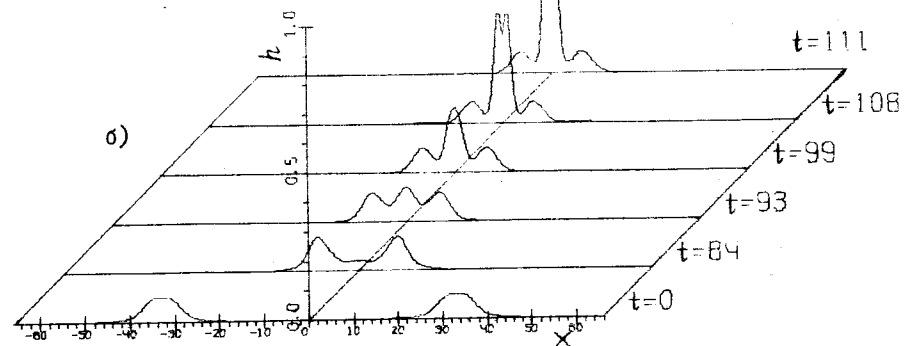
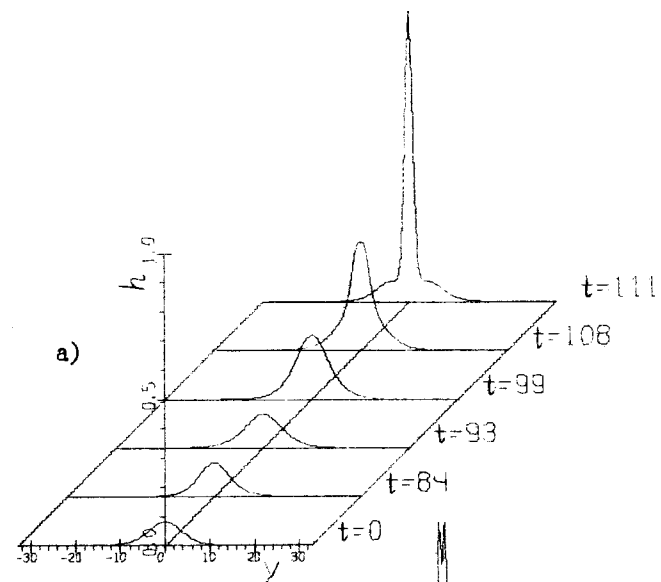


Рис. 3. Образование особенности поля в центре тяжести системы двух пульсонов ( $x = y = 0$ ) при их столкновении со скоростью  $V = 0,3$ .  $H_{max} = 0,88 = H(t = III)$ .

При меньших скоростях ( $V = 0.3, 0.2$ ) разделения на два ступка после перекрытия пульсонов уже не наблюдается (см. рис.3,  $V = 0.3$ ). После образования максимума  $N$  в точке  $x = 0, y = 0$  ( $t = 93$ ) его величина возрастает, характерные размеры  $D_x$  и  $D_y$  составного ступка уменьшаются и происходит образование особенности поля (коллапс в центре тяжести системы,  $t = 111$ ).

#### § 4. Обсуждение результатов.

В результате столкновения двух одинаковых пульсонов с малыми скоростями ( $V < V_{cr} = 0.3$ ) они сливаются в один квазипульсон, впоследствии коллапсирующий. При  $V > V_{cr}$  число квазипульсонов при столкновении сохраняется. Их разрушение в дальнейшем объясняется отмеченной ранее неустойчивостью (столкновение пульсонов приводит к существенному возмущению каждого из них). Время их жизни оказывается больше или порядка обратного инкремента неустойчивости соответствующего заряженного солитона.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., "Наука", 1974.
2. В.М.Елеонский, В.П.Силин. ЖЭТФ, 56, 574, 1969; 57, 478, 1969; А.М.Косевич, А.С.Ковалев. ЖЭТФ, 67, 1793, 1974.
3. И.Л.Боголюбский. Письма в ЖЭТФ, 24, 579, 1976. JINR, E2-10129, Dubna, 1976.
4. В.Е.Захаров, Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев. ДАН СССР, 219, 1334, 1974.
5. P.I.Caudrey, I.C.Bilbeek, I.D.Gibbon. Nuovo Cim., B25, 497, 1975.
6. В.Б.Гласко, Ф.Лерюст, Я.П.Терлецкий, С.Ф.Щушурин. ЖЭТФ, 35, 452, 1958.  
Е.П.Жидков, В.П.Ширяков. ЖМ и МФ, 4, 804, 1964.
7. R.Friedberg, T.D.Lee, A.Sirlin. Phys.Rev., D13, 2739, 1976.
8. И.Л.Боголюбский, В.Г.Маханьков. Письма в ЖЭТФ, 24, 15, 1976; 25, 120, 1977. JINR, E2-9695, E2-10223, Dubna, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел  
1 марта 1977 года.