ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10467

С.П.Кулешов, М.А.Смондырев

КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ И СТРУКТУРА ЧАСТИЦ

1977

P2 - 10467

С.П.Кулешов, М.А.Смондырев

КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ И СТРУКТУРА ЧАСТИЦ

Направлено в ТМФ

Кулешов С.П., Смондырев М.А.

P2 - 10467

Квантовые флуктуации и структура частиц

Изучается модель нерелятивистской частицы в потенциальном поле, учитывающая квантовые флуктуации координаты частицы, обусловленные ее взаимодействием с облаком виртуальных квантов. Вычисляется основной энергетический уровень в этой модели и рассматриваются вопросы рассеяния. Проводимое исследование не предполагает малости взаимодействия.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Kuleshov S.P., Smondyrev M.A.

P2 - 10467

QUANTUM FLUCTUATIONS AND STRUCTURE OF PARTICLES

The model of a nonrelativistic particle in a potential field taking into account quantum fluctuations of its coordinate due to the interaction with the cloud of virtual quanta is studied.

In that model the ground-state level is calculated and some aspects of scattering processes are considered.

The investigation does not assume the smallness of the interaction.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Идея сложной структуры адронов, обладающих множеством внутренних степеней свободы, лежит в основе современных работ по физике высоких энергий.

Результаты изучения асимптотического поведения амплитуды рассеяния двух адронов на малые углы /при $s \to \infty$ и фиксированном t / в рамках суммирования обобщенных лестничных графов с радиационными поправками [1] находят простую и естественную интерпретацию в терминах модели когерентных состояний [2]. В этой модели состояния адронов, участвующих в процессе дифракционного рассеяния при высоких энергиях, моделируются векторами когерентной структуры, которые учитывают сопутствующее адронам поле излучения /мягких пионов и т.д./.

Исходным элементом модели когерентных состояний является переопределение координаты взаимодействующего адрона

$$x_\mu \to x_\mu + \rho D_\mu ,$$

где D_μ - флуктуирующая часть координаты, моделируемая 4-мерным релятивистским осциллятором

$$D_\mu = a_\mu + a_\mu^+ , \qquad [a_\nu , a_\mu^+] = -g_{\mu\nu} .$$

Вектор состояния частицы, переходящий при снятии взаимодействия в плоскую волну, принимает в этой модели форму вектора когерентного состояния

$$\exp[-ip(x+\rho D)]|0> = e^{-ipx} |\psi_p> .$$

Подобная конструкция возникает, например, при рассмотрении задачи об электроне, движущемся в ионном кристалле /т.н. полярон/ в приближении сильной /адиабатической/ связи Н.Н.Боголюбова /3/.

В аналогичных терминах может быть сформулирована задача о радиационных эффектах, индуцированных взаимодействием электрона с нулевыми вакуумными флуктуациями электромагнитного поля /см., напр., /4/ /. Подобные модели используются в дуально-резонансных теориях для получения венециановских амплитуд /5/. Установлена также их связь с кварковыми моделями /6/ . Анализ этих проблем приводит к типовой задаче об отыскании функции Грина частицы во внешнем поле с учетом квантового "дрожания" когерентного типа

$$[\Box + m^2 + g\phi(x + \rho D)]G = 1 .$$

В настоящей работе мы развиваем метод решения задачи, положив в основу представление функции Грина в форме интегралов по траекториям. Рассмотрим простейшую модель нерелятивистской частицы во внешнем потенциале с учетом квантового "дрожания". Эта модель относится к типу использованных Вельтоном /4/ для описания лэмбовского сдвига и других эффектов взаимодействия с флуктуациями вакуума. В этой модели мы вычисляем основной энергетический уровень, не предполагая при этом малости взаимодействия. В конце работы рассматриваются вопросы рассеяния частиц на потенциале с дрожанием.

§1. КОНТИНУАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Итак, рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = -\frac{\vec{\Delta}}{2\mu} + \omega \sum_{i=1}^{3} a_i^+ a_i + V(\vec{r} + \rho\vec{D}),$$

$$\vec{D} = \{D_i\}, \quad D_i = a_i^+ + a_i, \quad [a_i^+, a_j] = -\delta_{ij} . \qquad /1.1/$$

Сосредоточим свое внимание в этом разделе на получении континуального представления для величины $\exp(-\tau H)$, с помощью которой уже нетрудно будет получить выражения для функции Грина, амплитуды рассеяния и т.п. величин. Искомое представление находим после линеаризации выражения вида $\exp(-\int_0^\tau ds \vec{A}_s^2)$ с помощью функционального интеграла

$$\exp\left(-\int_0^\tau ds\, \vec{A}_s^2\right) = \int [\delta\vec{\nu}]_0^\tau \exp\left[2i\int_0^\tau ds\, \vec{\nu}(s)\vec{A}_s\right], \qquad /1.2/$$

$$[\delta\vec{\nu}]_0^\tau = \delta\vec{\nu}\exp\left(-\int_0^\tau ds\, \vec{\nu}^2\right) \Big/ \int\delta\vec{\nu}\exp\left(-\int_0^\tau ds\, \vec{\nu}^2\right).$$

Используя /1.2/ и вводя упорядочивающий индекс s /см. [7] /, имеем после линеаризации лапласиана

$$\exp(-\tau H) = T\exp\left(-\int_0^\tau ds H_s\right) = \int [\delta\vec{\nu}]_0^\tau g(\tau;\vec{\nu}),$$

$$g(\tau;\vec{\nu}) = T\exp\left[-\sqrt{\frac{2}{\mu}}\int_0^\tau ds\, \vec{\nu}(s)\vec{\nabla}_s - \omega\sum_{i=1}^3\int_0^\tau ds(a_i^+a_i)_s - \right.$$

$$\left. -\int_0^\tau ds\, V(\vec{r}_s + \rho\vec{D}_s)\right]. \qquad /1.3/$$

Величина $g(\tau;\vec{\nu})$ подчиняется, как легко видеть из /1.3/, уравнению

$$\frac{\partial g(\tau;\vec{\nu})}{\partial\tau} = -\left[\sqrt{\frac{2}{\mu}}\vec{\nu}(\tau)\vec{\nabla} + \omega\sum_{i=1}^3 a_i^+a_i + V(\vec{r}+\rho\vec{D})\right]g(\tau;\vec{\nu}),$$

$$g(0;\vec{\nu}) = 1,$$

решение которого можно записать в виде

$$g(\tau;\vec{\nu}) = \exp\left[-\tau\omega\sum_{i=1}^{3} a_i^+ a_i - \sqrt{\frac{2}{\mu}}\,\vec{\nabla}\int_0^{\tau} ds\,\vec{\nu}(s)\right]\times$$

$$\times\, T\exp\left\{-\int_0^{\tau} ds\, V\left[\vec{r} + \sqrt{\frac{2}{\mu}}\int_0^{s} d\eta\,\vec{\nu}(\eta) + \rho\,\vec{D}(s)\right]\right\}, \qquad /1.4/$$

где

$$\vec{D}(s) = \exp\left(\omega s\sum_{i=1}^{3} a_i^+ a_i\right)\vec{D}\,\exp\left(-\omega s\sum_{i=1}^{3} a_i^+ a_i\right) =$$

$$= \vec{a}\,e^{-\omega s} + \vec{a}^{\,+} e^{\omega s}, \qquad \vec{a} = \{a_i\}, \qquad /1.5/$$

а T - экспонента в /1.4/ относится теперь лишь к операторам рождения и уничтожения. Для распутывания этой экспоненты введем аналог δ -функции в функциональном пространстве [7]. Имеем тогда из /1.4/

$$g(\tau;\vec{\nu}) = \exp\left[-\tau\omega\sum_{i=1}^{3} a_i^+ a_i - \sqrt{\frac{2}{\mu}}\,\vec{\nabla}\int_0^{\tau} ds\,\vec{\nu}(s)\right]\times$$

$$\times\int\frac{\delta\vec{\mu}_1\,\delta\vec{\mu}_2}{\mathrm{const}}\exp\left\{-\int_0^{\tau} ds\, V\left[\vec{r} + \sqrt{\frac{2}{\mu}}\int_0^{s}\vec{\nu} + \rho\,\vec{\mu}_2(s)\right]\right\}\times$$

$$\times\, T\exp\left\{i\int_0^{\tau} ds\,\vec{\mu}_1(s)\left[\vec{\mu}_2(s) - \vec{D}(s)\right]\right\}, \qquad /1.6/$$

где ведется интегрирование по функциям $\vec{\mu}_1$ и $\vec{\mu}_2$, заданным на интервале $[0,\tau]$. Появившаяся в /1.6/ T - экспонента легко распутывается, и мы получаем

$$g(\tau;\vec{\nu}) = \exp\left[-\tau\omega\sum_{i=1}^{3} a_i^+ a_i - \sqrt{\frac{2}{\mu}}\,\vec{\nabla}\int_0^{\tau} ds\,\vec{\nu}(s)\right]\int\frac{\delta\vec{\mu}_1\delta\vec{\mu}_2}{\mathrm{const}}\times$$

$$\times \exp\{ i \int_0^\tau ds\, \vec{\mu}_1(s)\vec{\mu}_2(s) - \int_0^\tau ds\, V[\vec{r} + \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^s d\eta\, \vec{\nu}(\eta) + \rho \vec{\mu}_2(s)] -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^\tau ds_1 ds_2 \vec{\mu}_1(s_1)\vec{\mu}_1(s_2) e^{-\omega |s_1 - s_2|} \}\times \qquad /1.7/$$

$$\times \exp[-i\, \vec{a}^+ \int_0^\tau ds \vec{\mu}_1(s) e^{\omega s}] \exp[-i \vec{a} \int_0^\tau ds\, \vec{\mu}_1(s) e^{-\omega s}].$$

Подставив /1.7/ в /1.3/, получаем представление для $\exp(-\tau H)$ в виде тройного континуального интеграла. При дальнейшем упрощении формул заметим, что для исследования процессов, когда в начальном и конечном состояниях не имеется свободных квантов, достаточно пользоваться вакуумным средним $<0|\exp(-\tau H)|0>$. Более того, для нахождения связанного состояния достаточно вычислить величину

$$G = \int d\vec{r} < 0 | \exp(-\tau H) | 0 > \delta(\vec{r}), \qquad /1.8/$$

которая в пределе больших τ примет вид $G \simeq \exp(-\tau E_0)$, где E_0 - энергия основного уровня.

Учитывая формулы /1.3/, /1.7/ и /1.8/, получаем

$$G = \int [\delta\vec{\nu}]_0^\tau \frac{\delta\vec{\mu}_1 \delta\vec{\mu}_2}{\text{const}} \exp\{ i \int_0^\tau ds\, \vec{\mu}_1(s)\vec{\mu}_2(s) -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^\tau ds_1 ds_2 \vec{\mu}_1(s_1)\vec{\mu}_1(s_2) e^{-\omega |s_1 - s_2|} -$$

$$- \int_0^\tau ds\, V [\sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^s d\eta\, \vec{\nu}(\eta) + \rho\, \vec{\mu}_2(s)]\}. \qquad /1.9/$$

С помощью замен переменных тройной функциональный интеграл в /1.9/ можно свести к однократному. Именно, совершим вначале замену

$$\vec{\mu}_2(s) \to \vec{\mu}_2(s)/\sqrt{2\mu\rho^2} - \frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{2}{\mu}}\int_0^s d\eta\, \vec{\nu}(\eta),$$

$$\vec{\mu}_1(s) \to \vec{\mu}_1(s)\sqrt{2\mu\rho^2}\ .$$

После этого берется интеграл по $\vec{\nu}$ и мы получаем вместо /1.9/ выражение

$$G = \int \frac{\delta\vec{\mu}_1\,\delta\vec{\mu}_2}{\mathrm{const}} \exp\{ i \int_0^\tau ds\, \vec{\mu}_1(s)\,\vec{\mu}_2(s) -$$

$$- \int_0^\tau ds_1 ds_2 K(s_1;s_2)\vec{\mu}_1(s_1)\vec{\mu}_1(s_2) -$$

$$- \int_0^\tau ds\, V[\vec{\mu}_2(s)/\sqrt{2\mu}\,]\}, \qquad /1.1O/$$

где

$$K(s_1;s_2) = \mu\rho^2 e^{-\omega|s_1-s_2|} + \min(s_1,s_2). \qquad /1.11/$$

Следующим нашим шагом будет введение вместо $\vec{\mu}_2(s)$ функциональной переменной $\vec{a}(s)$

$$\vec{\mu}_2(s) = 2\int_0^\tau d\eta\, K(s;\eta)\vec{a}(\eta),$$

после чего /1.1O/ принимает вид

$$G = \int \frac{\delta\vec{\mu}_1\,\delta\vec{a}}{\mathrm{const}} \exp\{2i \int_0^\tau ds_1 ds_2 K(s_1;s_2)\vec{\mu}_1(s_1)\vec{a}(s_2) -$$

$$- \int_0^\tau ds_1 ds_2 K(s_1;s_2)\vec{\mu}_1(s_1)\vec{\mu}_1(s_2) - \int_0^\tau ds\, V[\sqrt{\frac{2}{\mu}}\int_0^\tau d\eta\, K(s;\eta)\vec{a}(\eta)]\}.$$

И, наконец, после замены

$$\vec{\mu}_1(s) \to \vec{\mu}_1(s) + i\vec{\alpha}(s)$$

интеграл по $\vec{\mu}_1$ факторизуется, и мы получаем окончательное выражение

$$G = \int \{\delta\vec{\alpha}\}_0^{\tau} \exp\{-\int_0^{\tau} ds\, V[\sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^{\tau} d\eta\, K(s;\eta)\vec{\alpha}(\eta)]\}, \qquad /1.12/$$

где

$$\{\delta\vec{\alpha}\}_0^{\tau} = \frac{\delta\vec{\alpha} \exp\{-\int_0^{\tau} ds_1 ds_2 K(s_1;s_2)\vec{\alpha}(s_1)\vec{\alpha}(s_2)\}}{\int \delta\vec{\alpha} \exp\{-\int_0^{\tau} ds_1 ds_2 K(s_1;s_2)\vec{\alpha}(s_1)\vec{\alpha}(s_2)\}}. \qquad /1.13/$$

Нормировочная постоянная в /1.13/ определена из условия

$$G = 1 \quad \text{при} \quad V(\vec{r}) \quad 0. \qquad /1.14/$$

Формулу /1.12/ можно переписать в виде

$$G = \int \frac{\delta\vec{\alpha}}{\text{const}} \exp\{S[\vec{\alpha}]\},$$

$$S[\vec{\alpha}] = -\int_0^{\tau} ds_1 ds_2 K(s_1;s_2)\vec{\alpha}(s_1)\vec{\alpha}(s_2) -$$

$$-\int_0^{\tau} ds\, V[\sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^{\tau} d\eta\, K(s;\eta)\vec{\alpha}(\eta)], \qquad /1.15/$$

а const в /1.15/ определена тем же условием /1.14/.

§2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Для вычисления энергии основного уровня с помощью представления /1.15/ используем аналог вариационного метода, предложенного Фейнманом в работе /8/.

Именно, будем опираться на приближенную формулу

$$G = \int \frac{\delta\vec{a}}{\text{const}} e^{S'} e^{S-S'} = \int \frac{\delta\vec{a}}{\text{const}} e^{S'} < e^{S-S'} > \approx$$

$$\approx \int \frac{\delta\vec{a}}{\text{const}} e^{S'} \exp < S - S' > , \qquad /2.1/$$

где

$$< S - S' > = \int \delta\vec{a}\, e^{S'[\vec{a}]} \{ S[\vec{a}] - S'[\vec{a}] \} / \int \delta\vec{a}\, e^{S'[\vec{a}]} .$$

В /2.1/ величина $S'[\vec{a}]$ - некоторое аппроксимационное действие, от выбора которого зависит качество оценки энергии основного уровня. Выбираем S' в виде

$$S'[\vec{a}] = -\int_0^T ds_1 ds_2 K(s_1; s_2) \vec{a}(s_1)\vec{a}(s_2) -$$

$$- C \int_0^T ds \left[\int_0^T d\eta\, K(s;\eta)\vec{a}(\eta) \right]^2 = -\int_0^T ds_1 ds_2\, \vec{a}(s_1)\vec{a}(s_2) \times$$

$$\times \left[K(s_1; s_2) + C \int_0^T ds\, K(s; s_1) K(s; s_2) \right] . \qquad /2.2/$$

Иными словами, в аппроксимационном действии /2.2/ вместо потенциала V взят трехмерный осциллятор; константа C при этом рассматривается как вариационный параметр.

Все необходимые для усреднения формулы получим, вычислив среднее

$$Y(s;\vec{q}) = < \exp \left[i\vec{q} \int_0^T d\eta\, K(s;\eta)\vec{a}(\eta) \right] > =$$

$$= \int \frac{\delta\vec{a}}{\text{const}} \exp\left\{ S'[\vec{a}] + i\vec{q} \int_0^T d\eta\, K(s;\eta)\vec{a}(\eta) \right\} . \qquad /2.3/$$

Нормировка в /2.3/ такова, что $Y(s;\vec{q}=0)=1$. Рецепт вычисления /2.3/ в принципе несложен. Преобразованием сдвига добьемся исчезновения в показателе экспоненты под интегралом членов, линейных по $\vec{a}(s)$. Тогда интеграл по $\vec{a}$ факторизуется и вследствие выбранной нормировки сокращается с const. В результате получается выражение вида

$$Y(s;\vec{q}) = \exp[-\frac{\vec{q}^{\,2}}{4}\phi_s(s)], \qquad /2.4/$$

где функция $\phi_s(\eta)$ является решением интегрального уравнения

$$\phi_s(\eta) + C\int_0^{\tau} d\xi\,\phi_s(\xi)K(\eta;\xi) = K(s;\eta). \qquad /2.5/$$

Интегральное уравнение /2.5/ и есть условие исчезновения линейных по $\vec{a}(s)$ членов в показателе подынтегральной экспоненты. Его решением мы займемся несколько ниже, а пока будем считать, что функция $\phi_s(\eta)$ нам известна. Тогда мы можем получить необходимые нам средние. Во-первых, разлагая $Y(s;\vec{q})$ по $\vec{q}$ до членов второго порядка, получаем

$$<[\int_0^{\tau} d\eta\,K(s;\eta)\,\vec{a}(\eta)]^2> = \frac{3}{2}\phi_s(s). \qquad /2.6/$$

Далее нам необходимо найти величину

$$I = \int \frac{\delta\vec{a}}{\text{const}}\, e^{S'[\vec{a}]}, \qquad I(C=0)=1.$$

Учитывая выражение /2.2/ для действия S', имеем

$$\frac{1}{I}\frac{dI}{dC} = -\int_0^{\tau} ds<[\int_0^{\tau} d\eta\,K(s;\eta)\vec{a}(\eta)]^2> = -\frac{3}{2}\int_0^{\tau} ds\,\phi_s(s),$$

откуда

$$I = \exp[-\frac{3}{2}\int_0^{\tau} ds\int_0^{C} dC\,\phi_s(s)]. \qquad /2.7/$$

Напомним, что $\phi_s(\eta)$ как решение интегрального уравнения /2.5/ зависит от вариационного параметра С. И, наконец, используя фурье-представление для потенциала

$$V(\vec{r}) = \int d\vec{q}\,\tilde{V}(\vec{q})\,e^{i\vec{q}\vec{r}},$$

получаем среднее

$$\langle V[\sqrt{\frac{2}{\mu}}\int_0^{\tau} d\eta\, K(s;\eta)\vec{a}(\eta)]\rangle = \int d\vec{q}\,\tilde{V}(\vec{q})\,e^{-\frac{\vec{q}^2}{2\mu}\phi_s(s)}. \qquad /2.8/$$

Используя /2.6 - 2.8/ и вспоминая приближенную формулу /2.1/, находим

$$G = \exp\{-\frac{3}{2}\int_0^{\tau} ds\int_0^{C} dC\,\phi_s(s) - \int_0^{\tau} ds\int d\vec{q}\,\tilde{V}(\vec{q})\,\times$$

$$\times\exp[-\frac{\vec{q}^2}{2\mu}\phi_s(s)] + \frac{3}{2}C\int_0^{\tau} ds\,\phi_s(s)\}. \qquad /2.9/$$

Нам надо сделать последний шаг: перейти в /2.9/ к пределу $\tau\to\infty$, чтобы получить G в виде $\exp(-\tau E)$. Получив $\phi_s(\eta)$ в явном виде, убедимся, что существует $\lim\limits_{s,\tau\to\infty}\phi_s(s)$, который мы обозначим $\Phi(C)$, выделяя явно зависимость от вариационного параметра С. Тогда /2.9/ в пределе $\tau\to\infty$ принимает вид

$$G \simeq \exp\{-\frac{3}{2}\tau\int_0^{C} dC\,\Phi(C) - \tau\int d\vec{q}\,\tilde{V}(\vec{q})\exp[-\frac{\vec{q}^2}{2\mu}\Phi(C)] +$$

$$+\frac{3}{2}C\tau\,\Phi(C)\},$$

откуда находим выражение для энергии системы

$$E(C) = \frac{3}{2}\int_0^{C} dC\,\Phi(C) + \int d\vec{q}\,\tilde{V}(\vec{q})\exp[-\frac{\vec{q}^2}{2\mu}\Phi(C)] -$$

$$-\frac{3}{2}C\,\Phi(C). \qquad /2.10/$$

Минимизируя $E(C)$ по параметру C, получим оценку сверху для энергии E_0 основного уровня. Для кулоновского потенциала $V(\vec{r}) = -\beta / r$, с которым мы будем работать в дальнейшем, /2.10/ принимает вид

$$E(C) = \frac{3}{2} \int_0^C dC\, \Phi(C) - \frac{3}{2} C\, \Phi(C) - \frac{2\beta\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\Phi(C)}} . \qquad /2.11/$$

Нам осталось вычислить $\Phi(C)$ и подставить результат в /2.11/. Для этого вернемся назад к интегральному уравнению /2.5/.

§3. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Перепишем уравнение /2.5/, взяв вместо правой части произвольную функцию $f(\eta)$

$$x(\eta) + C \int_0^\tau d\xi\, x(\xi) K(\xi, \eta) = f(\eta) , \qquad /3.1/$$

где ядро $K(\xi, \eta)$ определено соотношением /1.11/. Введем

$$y(\eta) = x(\eta) - f(\eta) . \qquad /3.2/$$

Подставляя /3.2/ в /3.1/, получаем уравнение

$$y(\eta) + C \int_0^\tau d\xi\, y(\xi)\, K(\xi, \eta) = -C \int_0^\tau d\xi\, f(\xi) K(\xi, \eta). \qquad /3.3/$$

Дифференцируя /3.3/ два раза по η, получаем

$$\ddot{y}(\eta) - C(1 + 2\omega\mu\rho^2) y(\eta) + \omega^2 C\mu\rho^2 \int_0^\tau d\xi\, y(\xi) e^{-\omega|\eta-\xi|} =$$

$$= C(1 + 2\omega\mu\rho^2) f(\eta) - \omega^2 C\mu\rho^2 \int_0^\tau d\xi\, f(\xi) e^{-\omega|\eta-\xi|} . \qquad /3.4/$$

Дифференцируя /3.4/ два раза по η, приходим к уравнению

$$\overset{....}{y}(\eta)-C(1+2\omega\mu\rho^2)\ddot{y}(\eta)-2\omega^3C\mu\rho^2y(\eta)+$$

$$+\omega^4C\mu\rho^2\int_0^\tau d\xi\, y(\xi)e^{-\omega|\eta-\xi|}=C(1+2\omega\mu\rho^2)\ddot{f}(\eta)+$$

$$+2\omega^3C\mu\rho^2f(\eta)-\omega^4C\mu\rho^2\int_0^\tau d\xi\, f(\xi)e^{-\omega|\eta-\xi|}. \qquad /3.5/$$

Вычитая из /3.5/ уравнение /3.4/, умноженное на ω^2, получаем дифференциальное уравнение для y

$$\overset{....}{y}(\eta)-[\omega^2+C(1+2\omega\mu\rho^2)]\ddot{y}(\eta)+\omega^2Cy(\eta)=$$

$$=C(1+2\omega\mu\rho^2)\ddot{f}(\eta)-\omega^2C\,f(\eta). \qquad /3.6/$$

Обозначим α_1 и α_2 корни квадратного уравнения

$$\alpha^2-\alpha[\omega^2+C(1+2\omega\mu\rho^2)]+\omega^2C=0. \qquad /3.7/$$

Тогда

$$\alpha_1+\alpha_2=\omega^2+C(1+2\omega\mu\rho^2),$$
$$\alpha_1\alpha_2=\omega^2C, \qquad /3.8/$$

и уравнение /3.6/ можно переписать в виде

$$\overset{....}{y}-(\alpha_1+\alpha_2)\ddot{y}+\alpha_1\alpha_2y=(\alpha_1+\alpha_2-\omega^2)\ddot{f}-\alpha_1\alpha_2f. \qquad /3.9/$$

Уравнение /3.9/ нетрудно решить. Легко убедиться, что его частное решение задается выражением

$$y_1(\eta) = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{2}\,\frac{\omega^2-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}\int_0^{\tau} d\xi\, e^{-\sqrt{\alpha_1}|\eta-\xi|} f(\xi) +$$

$$+\frac{\sqrt{\alpha_2}}{2}\,\frac{\omega^2-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\int_0^{\tau} d\xi\, e^{-\sqrt{\alpha_2}|\eta-\xi|} f(\xi), \qquad /3.10/$$

в то время как общее решение однородного уравнения

$$y_0(\eta) = c_1 e^{\sqrt{\alpha_1}\eta} + d_1 e^{-\sqrt{\alpha_1}\eta} + c_2 e^{\sqrt{\alpha_2}\eta} + d_2 e^{-\sqrt{\alpha_2}\eta}, \qquad /3.11/$$

т.е. решение уравнения /3.9/ записывается в виде

$y(\eta) = y_1(\eta) + y_0(\eta)$.

Положим теперь $f(\eta) = -\frac{1}{C}\delta(\eta - s)$. При этом уравнение /3.3/ переходит в /2.5/, т.е. функцию $\phi_s(\eta)$ получим, подставив выбранное значение $f(\eta)$ в /3.10/ и /3.11/. Таким образом, находим

$$\phi_s(\eta) = -\frac{1}{C}\Big\{\frac{\sqrt{\alpha_1}}{2}\,\frac{\omega^2-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}\, e^{-\sqrt{\alpha_1}|\eta-s|} +$$

$$+\frac{\sqrt{\alpha_2}}{2}\,\frac{\omega^2-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\, e^{-\sqrt{\alpha_2}|\eta-s|}\Big\} + c_1 e^{\sqrt{\alpha_1}\eta} + d_1 e^{-\sqrt{\alpha_1}\eta} +$$

$$+ c_2 e^{\sqrt{\alpha_2}\eta} + d_2 e^{-\sqrt{\alpha_2}\eta}. \qquad /3.12/$$

Коэффициенты c_i, d_i могут зависеть от s и τ, но не от η. Они должны определяться либо из граничных условий уравнения /3.9/, либо непосредственно из интегрального уравнения /2.5/ путем подстановки в него /3.12/ и вычисления коэффициентов c_i и d_i.

Напомним, что нам надо знать $\phi_s(\eta)$ лишь в пределе больших r, s, η. В этом случае можно показать, что $c_i = d_i = 0$. Тогда из /3.12/ следует существование предела $\lim_{s,r\to\infty} \phi_s(s)$, который мы выше обозначили $\Phi(C)$

$$\Phi(C) = \frac{a_1 + a_2 + \sqrt{a_1 a_2} - \omega^2}{2C(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})} = \frac{a_1 + a_2 + \sqrt{a_1 a_2} - \omega^2}{2C\sqrt{a_1 + a_2 + 2\sqrt{a_1 a_2}}}. \quad /3.13/$$

Подставляя в /3.13/ выражения /3.8/, находим окончательный результат для $\Phi(C)$

$$\Phi(C) = \frac{C(1+2\omega\mu\rho^2) + \omega\sqrt{C}}{2C\sqrt{\omega^2 + 2\omega\sqrt{C} + C(1+2\omega\mu\rho^2)}}, \quad /3.14/$$

необходимый для вычисления энергии по формуле /2.11/.

§4. ЭНЕРГИЯ ОСНОВНОГО УРОВНЯ

Подстановка /3.14/ в /2.11/ приводит к выражению

$$E(C) = \frac{3}{2}\left[\sqrt{\omega^2 + 2\omega\sqrt{C} + C(1+2\omega\mu\rho^2)} - \omega\right] -$$

$$- \frac{3}{4}\,\frac{C(1+2\omega\mu\rho^2) + \omega\sqrt{C}}{\sqrt{\omega^2 + 2\omega\sqrt{C} + C(1+2\omega\mu\rho^2)}} -$$

$$- \frac{2\beta\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{C}\,\sqrt[4]{\omega^2 + 2\omega\sqrt{C} + C(1+2\omega\mu\rho^2)}}{\sqrt{C(1+2\omega\mu\rho^2) + \omega\sqrt{C}}}. \quad /4.1/$$

Оценка основного уровня будет найдена после вычисления минимума этого выражения по параметру C. Выполним это в различных предельных случаях.

А. *Слабое "дрожание"*

В случае полного отсутствия квантового дрожания $(\rho=0)$ /4.1/ переходит в

$$E(C) \to E^{(0)}(C) = \frac{3}{4}\sqrt{C} - \frac{2\beta\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}}\sqrt[4]{C} .$$

Минимум этого выражения достигается при

$$C = \left(\frac{4}{3}\beta\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}}\right)^4 \qquad /4.2/$$

и равен

$$\min E^{(0)}(C) = E_0^{(0)} = -\frac{4}{3\pi}\mu\beta^2 . \qquad /4.3/$$

Точный ответ в этом случае, как известно, есть $E_0^{(0)} = -\frac{1}{2}\mu\beta^2$, что довольно близко к полученному результату. Появление вместо 1/2 множителя $4/3\pi$ связано с аппроксимацией кулоновского потенциала взаимодействием осцилляторного типа /2.2/. Отметим, что такой же результат появлялся при вычислении энергии полярона в кулоновском поле /9/.

Обратимся теперь к случаю малых, но не равных нулю ρ. Разлагая /4.1/ в ряд по ρ, получим

$$E(C) = E^{(0)}(C) + \delta E,$$

$$\delta E = \frac{\omega\mu\rho^2}{(\omega+\sqrt{C})^2}\left[\frac{3}{4}C^{3/2} + \beta\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}}\sqrt[4]{C}\,(2\omega\sqrt{C}+C)\right]$$

и, подставляя сюда значение C /4.2/,

$$E_0 = E_0^{(0)} + \delta E = -\frac{4}{3\pi}\mu\beta^2 \left[1 - \frac{2\omega\mu\rho^2}{1 + 9\omega\pi/16\mu\beta^2}\right]. \qquad /4.4/$$

Если β велико, выражение /4.4/ переходит в

$$E_0 = -\frac{4}{3\pi}\mu\beta^2 (1 - 2\omega\mu\rho^2). \qquad /4.5/$$

Если же β мало /слабый кулоновский потенциал/, то из /4.4/ следует

$$E_0 = -\frac{4}{3\pi}\mu\beta^2 \left(1 - \frac{32\mu^2\rho^2\beta^2}{9\pi}\right). \qquad /4.6/$$

Напомним, что /4.4/ получено при малых $\rho (\omega\mu\rho^2 \ll 1)$, а формулы /4.5/, /4.6/ являются ее частными случаями. При получении выражения /4.4/ мы не требовали малости β, так как не использовали теории возмущений по кулоновскому взаимодействию. С помощью теории возмущений можно проверить формулу /4.6/. В случае слабого дрожания и слабой связи мы можем разложить гамильтониан /1.1/ по ρ :

$$H = H_0 + \delta V,$$

$$H_0 = -\frac{\vec{\Delta}}{2\mu} + \omega \sum_{i=1}^{3} a_i^+ a_i + V(\vec{r}),$$

$$\delta V = \rho \vec{D}\,\vec{\nabla}\, V(\vec{r}) + \frac{1}{2}\rho^2 (\vec{D}\,\vec{\nabla})^2\, V(\vec{r}).$$

Для потенциала $V(\vec{r}) = -\beta/r$ решение уравнения Шредингера с гамильтонианом H_0 хорошо известно. Именно, для основного уровня энергии и волнового вектора имеем

$$E_0^{(0)} = -\frac{1}{2}\mu\beta^2 \quad , \qquad |\psi_0 \rangle = \psi_0(\vec{r})\,|\,0\rangle ,$$

где

$$\psi_0(\vec{r}) = \frac{(\mu\beta)^{3/2}}{\pi}\, e^{-r\mu\beta}$$

- кулоновская волновая функция основного состояния. Поправка к энергии при этом в первом порядке теории возмущений равна

$$\delta E = \langle\psi_0\,|\,\delta V\,|\,\psi_0\rangle = -\frac{\beta}{2}\rho^2 \int d\vec{r}\,|\psi_0(\vec{r})|^2\, \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} =$$

$$= 2\pi\beta\rho^2\,|\psi_0(0)|^2 = 2\rho^2\mu^3\beta^4 .$$

Получаем в итоге вместо /4.6/ выражение /4/

$$E_0 = E_0^{(0)} + \delta E = -\frac{1}{2}\mu\beta^2\,(1 - 4\mu^2\rho^2\beta^2).$$

Мы видим, что /4.6/ дает не только заниженное значение для главного члена в энергии, но и меньшее значение для первой поправки к основному уровню. Как уже отмечалось выше, это является следствием применения вариационного метода,позволяющего зато продвинуться в область, где теория возмущений неприменима.

В. Слабая связь /т.е. малые β /

Ниже мы убедимся, что этому случаю соответствует следующее условие на параметр C :

$$\sqrt{C} \ll \omega \,/\, \sqrt{1 + 2\omega\mu\rho^2} \; . \qquad /4.7/$$

Разлагая /4.1/ с учетом /4.7/, получаем

$$E(C) = \frac{3}{4}\sqrt{C} - \frac{2\beta\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\sqrt{C}}{1 + (1 + 2\omega\mu\rho^2)\sqrt{C}/\omega}} \; .$$

Вводя обозначение $\sqrt{C} = x \dfrac{\omega}{1+2\omega\mu\rho^2}$, записываем E(C) в виде функции от нового вариационного параметра x

$$E(x) = \frac{3}{4}\,\frac{\omega}{1+2\omega\mu\rho^2}\,\left(x - \frac{8}{3\sqrt{\pi}}\,\beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}}\,\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}\,\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right). \qquad /4.8/$$

Минимум выражения /4.8/ достигается при $x = x_0$, где x_0 - решение уравнения

$$\sqrt{x_0}\,(1+x_0)^{3/2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\,\beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}}\,\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}\,. \qquad /4.9/$$

Имея в виду, что для нахождения основного уровня энергии необходимо заменить в /4.8/ x на x_0, учитывая уравнение /4.9/, получаем в результате

$$E_0 = -\frac{3}{4}\,\frac{\omega}{1+2\omega\mu\rho^2}\,x_0\,(1+2x_0). \qquad /4.10/$$

Напомним, что x_0 есть функция параметра $\beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}}\,\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}$.

В терминах x_0 условие /4.7/ применимости решения /4.10/ принимает вид

$$x_0 \ll \sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}\,. \qquad /4.11/$$

В случае слабого $(\omega\mu\rho^2 \ll 1)$ и умеренного $(\omega\mu\rho^2 \simeq 1)$ дрожания /4.11/ требует малости x_0, что эквивалентно малости параметра $\beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}}$. В этом случае из /4.9/ следует решение

$$x_0 = \frac{16}{9\pi}\,\mu\beta^2\,\frac{1+2\omega\mu\rho^2}{\omega},$$

подставляя которое в /4.10/, получаем

$$E_0 = -\frac{4}{3\pi}\mu\beta^2, \quad \omega\mu\rho^2 \le 1, \quad \beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}} \ll 1. \qquad /4.12/$$

Получая /4.12/, мы пренебрегли членом x_0^2, так как отброшенные в /4.10/ малые поправки имеют тот же порядок. Заметим, однако, что из самого метода получения /4.12/ следует совпадение выражений для слабого и умеренного дрожания, а случай слабого дрожания и слабой связи был рассмотрен выше. Таким образом, мы приходим снова к формуле /4.6/, показав ее справедливость в более широкой области $\omega\mu\rho^2 \lesssim 1, \beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}} \ll 1$.

Рассмотрим теперь случай сильного дрожания $\omega\mu\rho^2 \gg 1$. Условие /4.11/ заведомо выполняется при малых и конечных x_0, т.е. при $\mu\beta\rho \lesssim 1$. В случае $\mu\beta\rho \ll 1$ мы опять приходим к малым x_0, т.е. к решению /4.6/. Если же $\mu\beta\rho \simeq 1$, то x_0 конечно, и решение дается общей формулой /4.10/. Если же параметр $\mu\beta\rho$ велик ($\mu\beta\rho \gg 1$), то из /4.10/ следует решение

$$x_0 = \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\beta\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}\sqrt{\frac{\mu}{\omega}}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\mu\beta\rho\right)^{1/2},$$

подставляя которое в /4.10/, находим ведущий член в виде

$$E_0 \simeq -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\beta}{\rho}. \qquad /4.13/$$

Подставляя значение x_0 в условие /4.11/, находим критерий справедливости /4.13/

$$\omega\mu\rho^2 \gg 1, \quad \frac{1}{\mu\rho} \ll \beta \ll \omega\rho. \qquad /4.14/$$

Мы видим, что в случае сильного "дрожания" формула /4.13/, являющаяся частным случаем /4.10/, справедлива и в области умеренной $\left(\beta \simeq \sqrt{\frac{\omega}{\mu}}\right)$ связи.

С. *Сильная связь /т.е. большие β /*

Рассмотрим следующую область значений вариационного параметра С

$$\sqrt{C}\omega \ll \omega^2 + C(1+2\omega\mu\rho^2). \qquad /4.15/$$

С учетом /4.15/ получаем вместо /4.1/

$$E(C)=\frac{3}{2}\omega\left(\sqrt{1+C\frac{1+2\mu\omega\rho^2}{\omega^2}}-1\right)-$$

$$-\frac{3}{4}\frac{C(1+2\omega\mu\rho^2)}{\sqrt{\omega^2+C(1+2\omega\mu\rho^2)}}-\frac{2\beta\sqrt{\mu\omega}}{\sqrt{\pi}}\times$$

$$\times\frac{\sqrt[4]{1+C\dfrac{1+2\mu\omega\rho^2}{\omega^2}}}{\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}}.$$

Вводя обозначение $y=\sqrt{1+C\dfrac{1+2\omega\mu\rho^2}{\omega^2}}$, записываем $E(C)$ в виде функции от нового вариационного параметра y

$$E(y)=-\frac{3}{2}\omega+\frac{3}{4}\omega\left(y+\frac{1}{y}-\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}}\frac{1}{\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}}\sqrt{y}\right). \qquad /4.16/$$

Минимум выражения /4.16/ достигается при $y=y_0$, где y_0 - решение уравнения

$$y_0^2-\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}}\frac{1}{\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}}y_0^{3/2}=1,$$

$$y_0\geq 1. \qquad /4.17/$$

Для нахождения основного уровня необходимо подставить y_0 в /4.16/ вместо y. С учетом /4.17/ это даст выражение

$$E_0 = -\frac{3}{2}\omega - \frac{3}{4}\omega\left(y_0 - \frac{3}{y_0}\right). \qquad /4.18/$$

Напомним, что y_0 - функция безразмерного параметра $\beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}}\,\frac{1}{\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}}$. В терминах y_0 критерий /4.15/ справедливости полученного решения /4.18/ принимает вид

$$\sqrt{y_0^2 - 1} \ll y_0^2\,\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}\,. \qquad /4.19/$$

В случае слабого и умеренного дрожания ($\omega\mu\rho^2 \lesssim 1$) из /4.19/ следует условие $y_0 \gg 1$. Решение /4.17/, удовлетворяющее этому условию, получаем при

$$\beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}}\,\frac{1}{\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}} \sim \beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}} \gg 1\,.$$

Главный член этого решения имеет тогда вид

$$y_0 = \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\,\beta\sqrt{\frac{\mu}{\omega}}\,\frac{1}{\sqrt{1+2\omega\mu\rho^2}}\right)^2,$$

что приводит после подстановки в /4.18/ к ответу

$$E_0 = -\frac{4}{3\pi}\,\mu\beta^2\,\frac{1}{1+2\omega\mu\rho^2}\,, \qquad /4.20/$$

$$\omega\mu\rho^2 \lesssim 1\,, \qquad \beta \gg \sqrt{\frac{\omega}{\mu}}\,.$$

В случае слабого дрожания ($\omega\mu\rho^2 \ll 1$) мы можем разложить знаменатель в /4.20/, получив в результате формулу /4.5/.

Рассмотрим теперь случай очень сильного дрожания. Условие /4.19/ заведомо выполняется ($y_0 \gg 1$)при любых значениях y_0, т.е. при любых значениях параметра $\beta/\omega\rho$. Если $\beta/\omega\rho$ конечно, то решение дается общей формулой /4.18/. В случае $\beta/\omega\rho \gg 1$ мы опять приходим к большим y_0, т.е. к решению /4.20/, в знаменателе которого можно теперь пренебречь единицей. Если же, наконец, $\beta \ll \omega\rho$, то решение /4.17/ получается в виде:

$$y_0 = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\beta}{\omega\rho},$$

что приводит после подстановки в /4.18/ к ответу, уже знакомому нам по формуле /4.13/. Таким образом, мы разобрали все предельные случаи больших и малых значений β и ρ, оставив в стороне трудно изучаемый случай конечности дрожания и взаимодействия. Заметим также, что из полученных формул следует, что наличие дрожания приводит к повышению энергетического уровня по сравнению с кулоновским. Иными словами, флуктуации координаты частиц приводят к уменьшению влияния потенциальной энергии, что находит свое отражение, например, в знаке лэмбовского сдвига.

§5. РАССЕЯНИЕ И ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Амплитуду рассеяния частицы в рассматриваемой модели строим, исходя из вакуумного среднего функции Грина

$$(H-E)\,G(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \qquad /5.1/$$

в виде

$$<0|\,G(\vec{r},\vec{r}\,')\,|0> = \int_0^\infty d\tau\, e^{\tau E} <0|\,e^{-\tau H}|0>\delta(\vec{r}-\vec{r}\,'). \qquad /5.2/$$

С учетом формул /1.3/ и /1.7/ получаем возможность привести выражение /5.2/ к виду

$$< 0 | G(\vec{r},\vec{r}\,')| 0 > = \int_0^\infty d\tau\, e^{\tau E} \int [\delta\vec{\nu}]_0^\tau \frac{\delta\vec{\mu}_1\,\delta\vec{\mu}_2}{\text{const}} \times$$

$$\times \exp\{ i \int_0^\tau ds\, \vec{\mu}_1(s)\vec{\mu}_2(s) - \frac{1}{2}\int_0^\tau ds_1\, ds_2\, \vec{\mu}_1(s_1)\vec{\mu}_1(s_2)\, e^{-\omega|s_1 - s_2|} -$$

$$-\int_0^\tau ds\, V\, [\vec{r}\,' + \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^s \vec{\nu} + \rho\vec{\mu}_2(s)]\} \times$$

$$\times \delta(\vec{r} - \vec{r}\,' - \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^\tau \vec{\nu}\ ). \qquad /5.3/$$

Для получения амплитуды рассеяния нам понадобится фурье-образ вакуумного среднего функции Грина

$$G(\vec{p},\vec{q}) = \int d\vec{r}\, d\vec{r}\,'\, e^{i\vec{p}\vec{r} - p\vec{q}\vec{r}\,'} < 0 | G(\vec{r},\vec{r}\,')| 0 > .$$

Вычитая не связанную с взаимодействием часть функции Грина /т.е. $G(\vec{p},\vec{q})$ при V 0 / и используя /5.3/, получаем

$$G_{\text{вз.}}(\vec{p},\vec{q}) = -\int_0^\infty d\tau\, e^{\tau E} \int_0^\tau d\sigma \int d\vec{r}\, e^{i\vec{r}(\vec{p} - \vec{q})} \int [\delta\vec{\nu}]_0^\tau \times$$

$$\times \frac{\delta\vec{\mu}_1\,\delta\vec{\mu}_2}{\text{const}} \int_0^1 d\lambda\, V\, [\vec{r} + \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^\sigma \vec{\nu} + \rho\vec{\mu}_2(\sigma)] \exp\ \{ i\sqrt{\frac{2}{\mu}}\, \vec{p} \int_0^\tau \vec{\nu} +$$

$$\times i \int_0^\tau \vec{\mu}_1\vec{\mu}_2 - \frac{1}{2}\int_0^\tau ds_1 ds_2\, \vec{\mu}_1(s_1)\vec{\mu}_1(s_2)\, e^{-\omega|s_1 - s_2|} -$$

$$-\lambda \int_0^\tau ds\, V\, [\vec{r} + \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^s \vec{\nu} + \rho\vec{\mu}_2(s)]\} . \qquad /5.4/$$

Совершая в /5.4/ последовательно следующие замены переменных интегрирования

$$\vec{r} \to \vec{r} - \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^\sigma \vec{\nu}\ - \rho\vec{\mu}_2(\sigma),$$

$$\vec{\nu}(\eta) \to \vec{\nu}(\eta) + \frac{i}{\sqrt{2\mu}} \vec{a}(\eta-\sigma), \; \vec{a}(\eta) = \vec{p}\,\theta(\eta) + \vec{q}\,\theta(-\eta),$$

$$\vec{\mu}_1(\eta) \to \vec{\mu}_1(\eta) + \rho(\vec{p}-\vec{q})\delta(\eta-\sigma),$$

$$\vec{\mu}_2(\eta) \to \vec{\mu}_2(\eta) - i\rho(\vec{p}-\vec{q})e^{-\omega|\eta-\sigma|},$$

$$\tau \to \tau + \sigma,$$

$$\vec{\nu}(\sigma+\eta) \to \vec{\nu}(\eta), \quad \vec{\mu}_i(\sigma+\eta) \to \vec{\mu}_i(\eta),$$

получаем вместо /5.4/ выражение

$$G_{\text{вз.}}(\vec{p},\vec{q}) = -\int_0^\infty d\tau\, d\sigma \exp[-\tau(\frac{\vec{p}^2}{2\mu} - E) - \sigma(\frac{\vec{q}^2}{2\mu} - E)] \times$$

$$\times \exp[-\frac{\rho^2}{2}(\vec{p}-\vec{q})^2] \int_0^1 d\lambda \int d\vec{r}\, e^{i\vec{r}(\vec{p}-\vec{q})} \; V(\vec{r}) \times$$

$$\times \int [\delta\vec{\nu}]_{-\sigma}^{\tau} \frac{\delta\vec{\mu}_1 \delta\vec{\mu}_2}{\text{const}} \exp\{ i \int_{-\sigma}^{\tau} \vec{\mu}_1 \vec{\mu}_2 - \frac{1}{2}\int_{-\sigma}^{\tau} ds_1 ds_2 \times \qquad /5.5/$$

$$\times \vec{\mu}_1(s_1)\vec{\mu}_1(s_2) e^{-\omega|s_1-s_2|} - \lambda \int_{-\sigma}^{\tau} ds\, V[\vec{r} + \frac{i}{\mu}\vec{a}(s)s +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\mu}} \int_0^s \vec{\nu} + \rho(\vec{\mu}_2(s) - \vec{\mu}_2(0)) + i\rho^2 (\vec{p}-\vec{q})(e^{-\omega|s|} - 1)]\}.$$

Для нахождения амплитуды рассеяния необходимо выделить полюса, соответствующие свободным асимптотическим состояниям, т.е. перейти в /5.5/ к пределу $\tau, \sigma \to \infty$.

Имеем тогда

$$f(\vec{p},\vec{q}) = \lim_{E \to \frac{\vec{p}^2}{2\mu} = \frac{\vec{q}^2}{2\mu}} (\frac{\vec{p}^2}{2\mu} - E)(\frac{\vec{q}^2}{2\mu} - E) G_{\text{вз.}}(\vec{p},\vec{q}) \frac{\mu}{2\pi} =$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi}\exp[-\frac{\rho^2}{2}(\vec{p}-\vec{q})^2\ ]\int d\vec{r}\, e^{i\vec{r}(\vec{p}-\vec{q})}\ V(\vec{r})\int [\delta\vec{\nu}\,]_{-\infty}^{\infty}\times$$

$$\times\frac{\delta\vec{\mu}_1\,\delta\vec{\mu}_2}{\text{const}}\int_0^1 d\lambda\,\exp\{i\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\mu}_1\vec{\mu}_2-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{\mu}_1(s_1)\vec{\mu}_1(s_2)e^{-\omega|s_1-s_2|}\times$$

$$\times ds_1\,ds_2-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}ds\,V[\vec{r}+\frac{i}{\mu}\vec{a}(s)s+\sqrt{\frac{2}{\mu}}\int_0^s\vec{\nu}+$$

$$+\rho(\vec{\mu}_2(s)-\vec{\mu}_2(0))-i\rho^2(\vec{p}-\vec{q})(e^{-\omega|s|}-1)]\}. \qquad /5.6/$$

Формула /5.6/ является аналогом /1.9/. Интегрирование ведется по функциям $\vec{\nu}$, $\vec{\mu}_1$ и $\vec{\mu}_2$, заданным на интервале $(-\infty,\infty)$. Совершая замены функциональных переменных, подобные подробно описанным в первом параграфе, сведем трехкратный функциональный интеграл к однократному

$$f(\vec{p},\vec{q})=-\frac{\mu}{2\pi}\exp[-\frac{\rho^2}{2}(\vec{p}-\vec{q})^2]\int d\vec{r}\,e^{i\vec{r}(\vec{p}-\vec{q})}\ V(\vec{r})\times$$

$$\times\int\{\delta\vec{a}\,\}_{-\infty}^{\infty}\int_0^1 d\lambda\,\exp\{-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}ds\,V[\vec{r}+\frac{i}{\mu}\vec{a}(s)s-i\rho^2(\vec{p}-\vec{q})\times$$

$$\times(e^{-\omega|s|}-1)+\sqrt{\frac{2}{\mu}}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta\,\vec{a}(\eta)(K^*(s,\eta)-K^*(0,\eta))]\}. \qquad /5.7/$$

В формуле /5.7/ интегрирование ведется по функциям $\vec{a}$ с мерой, определенной /1.13/, в которой, во-первых, интегрирование распространено с интервала $[0,\tau]$ на интервал $(-\infty,\infty)$, и, во-вторых, ядро $K(s_1,s_2)$ заменено на $K^*(s_1,s_2)$, где

$$K^*(s_1,s_2)=\mu\rho^2 e^{-\omega|s_1-s_2|}+\theta(s_1\cdot s_2)\min(|s_1|,|s_2|). \qquad /5.8/$$

Ядро K^* является обобщением ядра /1.11/ на бесконечный интервал изменения s_1 и s_2 и совпадает с K при $s_i > 0$.

Из /5.7/ следует, что в борновском приближении амплитуду $f(\vec{p},\vec{q})$ можно представить как борновский член амплитуды рассеяния на некотором эффективном потенциале $V_{эфф}(\vec{r})$

$$f_1(\vec{p},\vec{q}) = -\frac{\mu}{2\pi}\int d\vec{r}\, e^{i\vec{r}(\vec{p}-\vec{q})}\, V_{эфф}(\vec{r}),$$

где

$$V_{эфф}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\rho^2)^{3/2}}\int d\vec{r}\,'\, V(\vec{r}\,')\exp\left[-\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2}{2\rho^2}\right]. \qquad /5.9/$$

Выражение /5.9/ является следствием соотношения между фурье-образами потенциалов

$$\tilde{V}_{эфф}(\vec{\Lambda}) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\vec{\Lambda}^2\right)\tilde{V}(\vec{\Lambda}). \qquad /5.10/$$

Иначе эффективный потенциал /5.9/ представим в виде

$$V_{эфф}(\vec{r}) = \langle 0 \,|\, V(\vec{r} + \rho\vec{D}) \,|\, 0 \rangle .$$

Таким образом, в борновском приближении наличие дрожания приводит к сглаживанию взаимодействия на малых расстояниях. Эффективный потенциал /5.9/ был ранее получен в работе /4/. В целом же эффективное взаимодействие имеет более сложный вид.

Мы будем интересоваться в дальнейшем лишь случаем высоких энергий рассеивающейся частицы. Хорошо известно /см., например, /10/ /, что в высокоэнергетическом пределе главная асимптотика амплитуды рассеяния описывается приближенным значением функционального интеграла, полученным переносом интегрирования в экспоненту. Разновидностью этой аппроксимации является приравнивание нулю функциональной переменной в подынтегральном выражении.

Получаем тогда из /5.7/ в пределе больших импульсов p и фиксированных передач $\vec{\Lambda}_{\perp}$ приближенное выражение

$$f(\vec{p},\vec{q}) \simeq -\frac{\mu}{2\pi}\exp\left[-\frac{\rho^2}{2}(\vec{p}-\vec{q})^2\right]\int d\vec{r}\, e^{i\vec{r}(\vec{p}-\vec{q})}\, V(\vec{r})\times$$

$$\times\int_0^1 d\lambda \exp\{-\lambda\int_{-\infty}^{\infty} ds\, V[\vec{r}+\frac{i}{\mu}\vec{a}(s)s - i\rho^2(\vec{p}-\vec{q})(e^{-\omega|s|}-1)]\},$$

откуда следует эйкональное представление

$$f(\vec{p},\vec{q}) \simeq \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\vec{\Lambda}_{\perp}^2\right) f_{\text{эйк}}(\vec{\Lambda}_{\perp}), \qquad /5.11/$$

где $f_{\text{эйк}}$ - эйкональная амплитуда рассеяния на потенциале при отсутствии квантового "дрожания"

$$f_{\text{эйк}}(\vec{\Lambda}_{\perp}) = p\int d^2\vec{r}_{\perp}\, e^{i\vec{r}_{\perp}\vec{\Lambda}_{\perp}}\,\frac{1-e^{\chi(\vec{r}_{\perp})}}{2\pi i},$$

$$\chi(\vec{r}_{\perp}) = \frac{i\mu}{p}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, V(\vec{r}_{\perp}, z).$$

Учет дрожания приводит, как видно из /5.11/, к появлению дифракционного фактора, что на языке фейнмановских диаграмм /1/ соответствует учету радиационных поправок. Физически это означает учет процессов с многократным испусканием-поглощением мягких виртуальных квантов поля.

По сути дела этот результат является следствием того факта, что собственной энергией поля можно пренебречь по сравнению с энергией налетающей частицы.

Действительно, в предельном случае равенства нулю собственной энергии поля (ω=0) легко получить

$$f_0(\vec{p},\vec{q}) = \exp[-\frac{\rho^2}{2}(\vec{p}-\vec{q})^2]\, f^{(0)}(\vec{p},\vec{q}), \qquad /5.12/$$

где $f^{(0)}(\vec{p},\vec{q})$ - точная амплитуда рассеяния на потенциале $V(\vec{r})$, представимая в виде

$$f^{(0)}(\vec{p},\vec{q}) = f(\vec{p},\vec{q})|_{\rho^2=0} .$$

Таким образом, соотношение /5.11/ является частной реализацией соотношения /5.12/.

В заключение отметим, что полученные формулы, описывающие при рассеянии высокоэнергетических частиц дифракционный пик, справедливы, вообще говоря, в области не слишком больших передач импульса. Это связано, как отмечалось выше, с учетом лишь борновского члена в эффективном потенциале. Исследование процессов перерассеяния требует дальнейшего изучения структуры эффективного взаимодействия.

Авторы искренне признательны А.Н.Тавхелидзе за интерес к работе и стимулирующие замечания, а также Г.И.Макаренко, В.А.Матвееву и В.К.Митрюшкину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barbashov B.M., Kuleshov S.P., Matveev V.A., Sissakian A.N. JINR, E2-4983, Dubna, 1970.*
2. *Matveev V.A., Tavkhelidze A.N. JINR, E2-5141, Dubna, 1970.*
3. *Боголюбов Н.Н. Укр.матем.журнал, 1950, 2,3. Избр. труды, 2, 499 "Наукова думка", Киев, 1970.*
4. *Welton Th. Phys. Rev., 1948, 74, p.1157.*
5. *Nambu Y. Preprint EFI69-64, 1969. Miyamoto Y. Prog. Theor. Phys., 1970, 43, p.564.*
6. *Боголюбов П.Н. ОИЯИ, Р2-5684, Дубна, 1971.*
7. *Feynman. Phys. Rev., 1951, 84, p.108.*
8. *Feynman R.P. Phys. Rev., 1955, 97, p.660.*
9. *Platzman P.M. Phys. Rev., 1962, 125, p.1961.*
10. *Кулешов С.П., Матвеев В.А., Сисакян А.Н., Смондырев М.А., Тавхелидзе А.Н. ЭЧАЯ, т.5, вып. 4, стр. 3, Атомиздат, М., 1974.*

Рукопись поступила в издательский отдел
28 февраля 1977 года.