ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 10393

А.Б.Пестов

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ, РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

1977

P2 - 10393

А.Б.Пестов

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ УРАВНЕНИЯ, РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Направлено в ТМФ

Пестов А.Б. Р2 - 10393

Релятивистские уравнения, решение задачи Коши

Введены операторы, определяемые векторными полями. На множестве таких операторов построены конечномерные реализации фоковских операторов для ферми-частиц и реализация алгебры Ли собственной группы Пуанкаре. Решена задача Коши для релятивистских уравнений первого порядка, выражающихся через операторы внешней производной и обобщенной дивергенции. Доказана теорема о динамических инвариантах этих уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Pestov A.B. P2 - 10393

The Relativistic Equations, the Couchi Problem

The operators determined by vector fields are introduced. On the set of these operators, finite-dimensional realization of the Fock operators for Fermi particles and the realization of the Lie algebra of the proper Poincare group are constructed. The Couchi problem is solved for the first-order relativistic equations which are expressed in terms of operators of the outer derivative and generalized divergence. A theorem is proved for the dynamical invariants of these equations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе излагаются новые результаты, относящиеся к релятивистским уравнениям первого порядка, предложенным в работе /1/. В первом разделе, по аналогии с операторами внешнего дифференцирования и обобщенной дивергенции, введены операторы, определяемые векторными полями. В дальнейшем будем называть их векторными операторами. Векторные операторы, в сочетании с операторами внешней производной и обобщенной дивергенции, позволяют построить операторы, связанные с симметриями пространства-времени и действующие в пространстве решений вышеупомянутых уравнений. Выделяя из этих операторов линейно независимые, получаем реализацию алгебры Ли собственной группы Пуанкаре. Кроме того, на множестве векторных операторов построены конечномерные реализации фоковских операторов для ферми-частиц.

Во втором разделе с помощью формализма векторных операторов решена задача Коши с произвольными начальными данными для предложенных в /1/ уравнений. Важность этого результата обусловлена тем, что, как известно /2-6/, квантование полей и решение задачи Коши для уравнений этих полей - взаимосвязанные задачи. В третьем разделе работы определены скалярные произведения в пространстве решений изучаемых уравнений и доказаны равенства, связывающие средние значения генераторов собственной группы Пуанкаре относительно этих скалярных произведений с выражениями динамических инвариантов через тензор энергии-импульса.

Мы используем в точности обозначения /1/ и поэтому не будем останавливаться на определениях и разъяснениях, которые там даны. Ссылки на уравнения в работе /1/ будем писать с 1, например, /1.7/.

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Антисимметричное тензорное поле валентности p /p - вектор/ обозначаем $\underset{(p)}{F}$, а его ковариантные компоненты $f_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}(x)$. Метрика пространства Минковского определяется тензором $\eta^{\alpha\beta}$:

$$\eta^{\alpha\beta} = 0,\ \alpha \neq \beta,\ \eta^{00} = -\eta^{11} = -\eta^{22} = -\eta^{33} = 1.$$

В пространстве-времени $0 \le p \le 4$. Операторы d, δ, $*$ p-вектор $\underset{(p)}{F}$ переводят в (p+1)-вектор $d\underset{(p)}{F}$, (p−1)-вектор $\delta\underset{(p)}{F}$, (4−p)-вектор $*\underset{(p)}{F}$, компоненты которых равны

$$(d\underset{(p)}{F})_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} = (p+1)\partial_{[\alpha_1} f_{\alpha_2 \ldots \alpha_{p+1}]}, \qquad /1.1/$$

$$(\delta\underset{(p)}{F})_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} = -\eta^{\alpha\beta}\partial_\beta f_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} = \qquad /1.2/$$

$$= -\partial^\alpha f_{\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}},$$

$$(*\underset{(p)}{F})_{\alpha_1 \ldots \alpha_{4-p}} = \frac{1}{p!}\epsilon_{\beta_1 \ldots \beta_p \alpha_1 \ldots \alpha_{4-p}} f^{\beta_1 \ldots \beta_p}$$

где квадратные скобки [...] обозначают альтернирование, $\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ - полностью антисимметричный тензор, $\epsilon_{0123} = 1$.

Прямые суммы

$$F = \sum_{p=0}^{4} \oplus \underset{(p)}{F}$$

скалярного, векторного, бивекторного, 3-векторного, 4-векторного полей или, для краткости, c-поля, подчиняются уравнениям /1/:

$$\delta F - dF = \lambda_1 F,$$

$$\delta F + dF = \lambda_2 F$$

$$\lambda_1 = \pm \frac{imc}{\hbar}, \quad \lambda_2 = \pm \frac{mc}{\hbar}.$$

Действие операторов δ, d, $*_1$, $*_2$, λ на F определяется формулами

$$\delta F = \sum_{p=0}^{4} \oplus \delta\underset{(p)}{F}, \qquad dF = \sum_{p=0}^{4} \oplus d\underset{(p)}{F},$$

$$*_1 F = \sum_{p=0}^{4} \oplus (-1)^{p(p+1)/2} *\underset{(p)}{F},$$

$$*_2 F = \sum_{p=0}^{4} \oplus (-1)^{p(p-1)/2} *\underset{(p)}{F}, \quad \lambda F = \sum_{p=0} \oplus \lambda \underset{(p)}{F},$$

где λ - скаляр.

2. ВЕКТОРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть $\underset{(1)}{K}$ - векторное поле и $k_\mu(x)$ - его ковариантные компоненты. Заменяя в правых частях равенств /1.1/, /1.2/ оператор дифференцирования $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ на

$k_\mu(x)$, придем к операторам K_δ, K_d, которые p-вектор $\underset{(p)}{F}$ переводят соответственно в $(p-1)$-вектор $K_\delta \underset{(p)}{F}$ и $(p+1)$-вектор $K_d \underset{(p)}{F}$;

$$(K_\delta \underset{(p)}{F})_{\alpha_1\dots\alpha_{p-1}} = -k^\mu f_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{p-1}},$$

$$(K_d \underset{(p)}{F})_{\alpha_1\dots\alpha_{p+1}} = (p+1)k_{[\alpha_1} f_{\alpha_2\dots\alpha_{p+1}]} .$$

Операторы K_δ, K_d, с-поле $F = \sum_{p=0}^{4} \oplus \underset{(p)}{F}$ переводят в с-поле

$$K_\delta F = \sum_{p=0}^{4} \oplus K_\delta \underset{(p)}{F}, \quad K_d F = \sum_{p=0}^{4} \oplus K_d \underset{(p)}{F}$$

и таким образом действуют в пространстве этих полей. Без труда проверяется справедливость следующих соотношений:

$$K_\delta K_\delta = 0, \; K_d K_d = 0 .$$

Далее, если в равенствах /1.18/, /1.20/, /1.22/-/1.25/ заменить операторы δ и d соответственно операторами K_δ, K_d, то получим соотношения

$$* K_d * = K_\delta , \qquad /1/$$

$$\omega K_\delta + K_\delta \omega = 0, \; \omega K_d + K_d \omega = 0 , \qquad /2/$$

$$K_d *_1 - *_1 K_\delta = 0 , \qquad /3/$$

$$K_\delta *_1 - *_1 K_d = 0 , \qquad /4/$$

$$K_d *_2 + *_2 K_\delta = 0 , \qquad /5/$$

$$K_\delta *_2 + *_2 K_d = 0 , \qquad /6/$$

справедливость которых устанавливается тем же путем, что и в рассмотренном случае.

Из операторов δ, d, K_δ, K_d составим операторы

$$K_1 = K_\delta d + dK_\delta ,$$

$$K_2 = K_d \delta + \delta K_d .$$

Очевидно, что

$$K_1 d - dK_1 = 0, \qquad /7/$$

$$K_2 \delta - \delta K_2 = 0. \qquad /8/$$

Применяя соотношения /1.22/-/1.25/, а также соотношения /2/-/7/, получаем

$$*_1 K_1 = K_2 *_1 , \qquad /9/$$

$$*_2 K_2 = K_1 *_2 . \qquad /10/$$

Докажем, что

$$K_1 = K_2 , \qquad /11/$$

если компоненты векторного поля $\underset{(1)}{K}$ удовлетворяют уравнениям Киллинга

$$\partial_\alpha k_\beta + \partial_\beta k_\alpha = 0 . \qquad /12/$$

Действительно, согласно определению операторов K_1, K_2,

$$(K_1 \underset{(p)}{F})_{\alpha_1\dots\alpha_p} = -(p+1)k^\mu \partial_{[\mu} f_{\alpha_1\dots\alpha_p]} -$$

$$- p\partial_{[\alpha_1} k^\mu f_{|\mu|\alpha_2\dots\alpha_p]},$$

$$(K_2 F_{(p)})_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = -(p+1)\partial^\mu k_{[\mu} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} -$$

$$- p k_{[\alpha_1} \partial^\mu f_{|\mu|\alpha_2 \dots \alpha_p]},$$

$$p = 0,1,2,3,4.$$

Используя тождества

$$(p+1)\partial_{[\mu} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} = \partial_\mu f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} -$$

$$- p\partial_{[\alpha_1} f_{|\mu|\alpha_2 \dots \alpha_p]},$$

$$(p+1)k_{[\mu} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p]} = k_\mu f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} -$$

$$- p k_{[\alpha_1} f_{|\mu|\alpha_2 \dots \alpha_p]},$$

получаем отсюда

$$(K_1 F_{(p)} - K_2 F_{(p)})_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = - f_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \partial^\mu k_\mu -$$

$$- p k^\mu_{[\alpha_1} f_{|\mu|\alpha_2 \dots \alpha_p]},$$

где

$$k^\mu_\alpha = \partial_\alpha k^\mu + \partial^\mu k_\alpha .$$

Тем самым равенство /11/ доказано. Полагая в таком случае

$$K = K_1 = K_2$$

и обращаясь к /7/-/10/, видим, что оператор K коммутирует как с оператором

$$\Lambda = \delta + ed, \quad e = \pm 1,$$

так и с операторами $*_1$, $*_2$. Равенство нулю коммутатора $K\Lambda - \Lambda K$ означает, что оператор K действует в пространстве решений уравнений /1.6/, /1.7/. Уравнения /12/ имеют десять линейно независимых решений

$$\underset{(\alpha)}{k}^\mu = \delta^\mu_\alpha ,$$

$$\underset{(\alpha\beta)}{k}^\mu = \delta^\mu_\alpha x_\beta - \delta^\mu_\beta x_\alpha ,$$

$$\alpha,\beta = 0,1,2,3, \quad x_\alpha = \eta_{\alpha\beta} x^\beta .$$

Отвечающие им операторы K обозначим K_α, $K_{\alpha\beta}$. Операторы K_α, $K_{\alpha\beta}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[K_\alpha, K_\beta] = 0, \; [K_{\alpha\beta}, K_\mu] = \eta_{\beta\mu} K_\alpha - \eta_{\alpha\mu} K_\beta,$$

$$[K_{\alpha\beta}, K_{\mu\nu}] = \eta_{\alpha\nu} K_{\beta\mu} + \eta_{\alpha\mu} K_{\nu\beta} - \eta_{\beta\nu} K_{\alpha\mu} - \eta_{\mu\beta} K_{\nu\alpha}$$

и, следовательно, задают реализацию алгебры Ли собственной группы Пуанкаре. При переходе к общей теории относительности полученные выше равенства /1/-/10/ также имеют место, однако оператор K, вообще говоря, ввести нельзя.

В n-мерном псевдоевклидовом пространстве E_n, $m(\le n)$ векторных полей, ковариантные компоненты которых обозначим $\underset{(a)}{k}_\mu$, $a = 1,2,\dots,m$, определяют 2m векторных операторов $\underset{(a)}{K}\delta$, $\underset{(a)}{K} d$. Греческие индексы пробегают теперь значения $0,1,\dots,n-1$.

Имеем

$$(\underset{(a)}{K} d \underset{(b)}{K} \delta F_{(p)})_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = -p \underset{(b)(a)}{k^\mu k}_{[\alpha_1} f_{|\mu|\alpha_2 \dots \alpha_p]},$$

$$(\underset{(b)}{K} \delta \underset{(a)}{K} d F_{(p)})_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = -(p+1) \underset{(a)}{k}^\mu \underset{(b)}{k}_{[\mu} f_{\alpha_1 \dots \alpha_p]},$$

где $\underset{(a)}{k}{}^{\mu} = g^{\mu\alpha}\underset{(a)}{k}{}_{\alpha}$, $g^{\mu\alpha}$ - метрический тензор E_n. Принимая во внимание, что

$$(p+1)\,\underset{(a)}{k}{}_{[\mu} f_{\alpha_1\ldots\alpha_p]} = \underset{(a)}{k}{}_{\mu} f_{\alpha_1\ldots\alpha_p} -$$

$$- \; p\,\underset{(a)}{k}{}_{[\alpha_1} f_{|\mu|\alpha_2\ldots\alpha_p]}$$

и обозначая $(\underset{(a)}{K}, \underset{(b)}{K}) = \underset{(a)}{k}{}^{\mu}\underset{(b)}{k}{}_{\mu}$, получаем следующие равенства

$$\underset{(a)}{K}{}^{d}\underset{(b)}{K}{}^{\delta} + \underset{(b)}{K}{}^{\delta}\underset{(a)}{K}{}^{d} = -(\underset{(a)}{K}, \underset{(b)}{K}). \qquad /13/$$

Кроме того, нетрудно убедиться в справедливости соотношений

$$\underset{(a)}{K}{}^{\delta}\underset{(b)}{K}{}^{\delta} + \underset{(b)}{K}{}^{\delta}\underset{(a)}{K}{}^{\delta} = 0,$$

$$\underset{(a)}{K}{}^{d}\underset{(b)}{K}{}^{d} + \underset{(b)}{K}{}^{d}\underset{(a)}{K}{}^{d} = 0.$$

В n-мерном евклидовом пространстве $m(\leq n)$ векторных полей можно выбрать ортогональными и нормированными на единицу. Полагая в таком случае

$$K_a = i\underset{(a)}{K}{}^{\delta}, \qquad K^{+}_a = i\underset{(a)}{K}{}^{d},$$

$$a = 1,2,\ldots,m,$$

получаем конечномерную реализацию фоковских операторов для ферми-частиц:

$$K_a K^{+}_b + K^{+}_b K_a = \delta_{ab}, \qquad /14/$$

$$K_a K_b + K_b K_a = 0, \qquad /15/$$

$$K^{+}_a K^{+}_b + K^{+}_b K^{+}_a = 0. \qquad /16/$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Обозначим $n_\alpha(x)$ векторное поле, нормальное к пространственно-подобной гиперповерхности Σ. Операторы типа K_δ, K_d, определяемые векторными полями $n_\alpha(x)$, $\dfrac{\partial D(x-y)}{\partial x^\alpha}$, где $D(x-y)$- перестановочная функция Паули-Иордана с известными свойствами /7/, обозначим соответственно $N_\delta(x)$, $N_d(x)$, $D_\delta(x-y)$, $D_d(x-y)$. Если с-поле F зависит от переменных y^α, $F = F(y)$, то имеют место равенства /здесь и в дальнейшем дифференцируем по переменным x^α/:

$$dD_d(x-y)F(y) = \delta D_\delta(x-y)F(y) = 0, \qquad /17/$$

$$\delta D(x-y)F(y) = D_\delta(x-y)F(y), \qquad /18/$$

$$dD(x-y)F(y) = D_d(x-y)F(y), \qquad /19/$$

$$\delta D_d(x-y)F(y) + dD_\delta(x-y)F(y) = \Box D(x-y)F(y). \qquad /20/$$

Докажем, например, последнее равенство. С этой целью выпишем компоненты p-вектора $\delta D_d(x-y)\underset{(p)}{F}(y)$:

$$(\delta D_d(x-y)\underset{(p)}{F}(y))_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = -(p+1)\partial^{\mu}\partial_{[\mu} D(x-y) f_{\alpha_1\ldots\alpha_p]}(y),$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \partial^\mu = \eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha.$$

Так как

$$-(p+1)\partial_{[\mu} D(x-y) f_{\alpha_1\ldots\alpha_p]} = -\partial_\mu D(x-y) f_{\alpha_1\ldots\alpha_p}(y) +$$

$$+\, p\,\partial_{[\alpha_1} D(x-y) f_{|\mu|\alpha_2\ldots\alpha_p]}(y),$$

то

$$\delta D_d(x-y)\underset{(p)}{F}(y) = \Box D(x-y)\underset{(p)}{F}(y) - dD_\delta(x-y)\underset{(p)}{F}(y),$$

а так как

$$\delta D_d(x-y)F(y) = \sum_{p=0}^{4} \oplus\, \delta D_d(x-y)\underset{(p)}{F}(y),$$

то

$$\delta D_d(x-y)F(y) = \Box D(x-y)F(y) - dD_\delta(x-y)F(y),$$

что и требовалось доказать.

Полагая, наконец,

$$F_N(y) = [eN_\delta(y) + N_d(y)]F(y), \quad e = \pm 1,$$

покажем, что решение задачи Коши для уравнений /1.6/, /1.7/ дается формулой

$$F(x) = \int_\Sigma d^3v[D_\delta(x-y) + eD_d(x-y) + \lambda D(x-y)]F_N(y),$$

где d^3v - инвариантная мера на гиперповерхности Σ,

$\lambda = \lambda_1 = \pm \frac{imc}{h}$ для $e = 1$, $\lambda = \lambda_2 + \pm \frac{mc}{h}$ для $e = -1$.

Действуя оператором $\delta + ed - \lambda$ на $F(x)$ и используя равенства /17/-/20/, получаем

$$(\delta + ed - \lambda)F(x) = \int_\Sigma d^3v[e\,\Box D(x-y) - \lambda^2 D(x-y)]F_N(y).$$

Перестановочная функция удовлетворяет уравнению

$$\Box D(x-y) - \left(\frac{mc}{h}\right)^2 D(x-y) = 0,$$

следовательно, $F(x)$ удовлетворяет уравнениям /1.6/, /1.7/. Остается доказать, что $F(x)$ принимает на Σ заданные значения. Согласно /13/,

$$D_\delta(x-y)N_d(y) = -n^\mu(y)\partial_\mu D(x-y) - N_d(y)D_\delta(x-y),$$

поэтому

$$[D_\delta(x-y) + eD_d(x-y)]F_N(y) =$$

$$= e[D_\delta(x-y)N_\delta(y) + D_d(x-y)N_d(y)]F(y) +$$

$$+ [D_\delta(x-y)N_d(y) - N_d(y)D_\delta(x-y)]F(y) - n^\mu(y)\partial_\mu D(x-y)F(y).$$

Рассматривая значения $F(x)$ на гиперповерхности Σ и используя свойства перестановочной функции $D(x-y)$, обнаруживаем, что при этом интегралы

$$\int_\Sigma d^3v[D_\delta(x-y)N_\delta(y) + D_d(x-y)N_d(y)]F(y),$$

$$\int_\Sigma d^3v[D_d(x-y)N_\delta(y) - N_d(y)D_\delta(x-y)]F(y),$$

$\int_\Sigma d^3v D(x-y)F_N(y)$, исчезают, а

$$-\int_\Sigma d^3v\, n^\mu(y)\partial_\mu D(x-y)F(y) = F(x).$$

Тем самым задача Коши решена.

4. *СОХРАНЯЮЩИЕСЯ ВЕЛИЧИНЫ*

Паре решений F, H уравнения /1.6/ можно поставить в соответствие вектор $\underset{(1)}{S}$ с ковариантными компонентами

$$s_\mu = \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!}(\bar{f}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} h_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_p} + \bar{f}_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_p} h^{\alpha_1 \dots \alpha_p}).$$

Дивергенция этого вектора равна нулю $\delta \underset{(1)}{S} = 0$. Следовательно, интеграл $\int_{\Sigma} s_\mu d\sigma^\mu$ не зависит от выбора пространственно-подобной гиперповерхности Σ. Имея это в виду, определим скалярное произведение в пространстве решений уравнения /1.6/, полагая

$$\langle F, H \rangle = \int_{\Sigma} s_\mu d\sigma^\mu. \qquad /21/$$

Паре действительных решений R, Q уравнения /1.7/ можно поставить в соответствие вектор $\underset{(1)}{P}$ с ковариантными компонентами

$$p_\mu = \sum_{p=0}^{4} \frac{1}{p!} (r^{\alpha_1 \dots \alpha_p} q_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_p} - r_{\mu\alpha_1 \dots \alpha_p} q^{\alpha_1 \dots \alpha_p})$$

и равной нулю дивергенцией. Антисимметричное скалярное произведение в пространстве решений уравнения /1.7/ определим, полагая

$$(R, Q) = \int_{\Sigma} p_\mu d\sigma^\mu. \qquad /22/$$

Введенные скалярные произведения характеризуются рядом важных свойств. Выше было доказано, что оператор K действует в пространстве решений уравнения /1.6/, то есть, если F - решение уравнения /1.6/, то и KF также решение того же уравнения. Имеем

$$\langle KF, H \rangle = \int_{\Sigma} (K \underset{(1)}{S})_\mu d\sigma^\mu - \langle F, KH \rangle,$$

где

$$(K \underset{(1)}{S})_\mu = (K_2 \underset{(1)}{S})_\mu = -\partial^\alpha (k_\alpha s_\mu - k_\mu s_\alpha) - k_\mu \partial^\alpha s_\alpha.$$

Так как $k_\alpha S_\mu - k_\mu S_\alpha$ - антисимметричный тензор, то по теореме Стокса его дивергенция не дает вклада в интеграл. Таким образом,

$$\langle KF, H \rangle + \langle F, KH \rangle = 0,$$

или

$$\langle LF, H \rangle = \langle F, LH \rangle, \qquad /23/$$

где положено $L = iK$. Используя метод доказательства вещественности вектора c_μ в /1/, можно также показать, что

$$\langle *_2 F, H \rangle = \langle F, *_2 H \rangle. \qquad /24/$$

Что касается скалярного произведения /22/, то для него справедливы равенства

$$(KR, Q) = (KQ, R),$$

$$(*_1 R, Q) = (*_1 Q, R),$$

доказательство которых проводится аналогично доказательству равенств /23/, /24/. Тензоры энергии-импульса /1.37/, /1.38/ удовлетворяют уравнению $\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$. Отсюда следует, что если k_μ - решение уравнений /12/, то дивергенция вектора $k^\mu T_{\mu\nu}$ исчезает и интеграл

$$T = \int_{\Sigma} k^\mu T_{\mu\nu} d\sigma^\nu$$

не зависит от выбора гиперповерхности Σ. Докажем, что имеют место равенства

$$\langle F, LF \rangle = \int_{\Sigma} k^\mu T_{\mu\nu} d\sigma^\nu; \qquad /25/$$

$$\frac{1}{2}(KR,R)=\int_{\Sigma} k^{\mu}T_{\mu\nu}d\sigma^{\nu}, \qquad /26/$$

где $T_{\mu\nu}$ равен соответственно /1.37/ или /1.38/. Перегруппировывая слагаемые и используя уравнения движения, представим тензор энергии-импульса /1.37/ в виде

$$T_{\mu\nu}=i\sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}(\partial^{\sigma}f_{\sigma\mu a_1\ldots a_p}\bar{f}_{\nu}^{\;a_1\ldots a_p} -$$

$$-\partial^{\sigma}\bar{f}_{\sigma\mu a_1\ldots a_p}f_{\nu}^{\;a_1\ldots a_p})+$$

$$+i\sum_{p=0}^{4}\frac{p+1}{p!}(\partial_{[\nu}\bar{f}_{a_1\ldots a_p]}f_{\mu}^{\;a_1\ldots a_p}-$$

$$-\partial_{[\nu}f_{a_1\ldots a_p]}\bar{f}_{\mu}^{\;a_1\ldots a_p})-\eta_{\mu\nu}\tilde{\mathfrak{L}}_1 .$$

Отсюда получаем

$$k^{\nu}T_{\mu\nu}=\sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}(f_{\mu}^{\;a_1\ldots a_p}\overline{(LF)}_{(p)\,a_1\ldots a_p}+$$

$$+\bar{f}_{\mu}^{\;a_1\ldots a_p}(LF)_{(p)\,a_1\ldots a_p})-k_{\mu}\tilde{\mathfrak{L}}_1+\partial^{\sigma}q_{\sigma\mu} ,$$

где

$$q_{\sigma\mu}=i\sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}(f_{\sigma\mu a_1\ldots a_p}k^{\nu}\bar{f}_{\nu}^{\;a_1\ldots a_p} -$$

$$-\bar{f}_{\sigma\mu a_1\ldots a_p}k^{\nu}f_{\nu}^{\;a_1\ldots a_p})\,.:$$

Далее, согласно /1/ $k_{\mu}\tilde{\mathfrak{L}}_1=k_{\mu}\mathfrak{L}_1+k_{\mu}\delta A_{(1)}$, где $A_{(1)}$ - вектор с ковариантными компонентами a_{μ}, равными

$$a_{\mu}=\frac{i}{2}\sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}(f^{\,a_1\ldots a_p}\bar{f}_{\mu a_1\ldots a_p}-\bar{f}^{\,a_1\ldots a_p}f_{\mu a_1\ldots a_p}). \qquad /27/$$

Так как

$$(KA)_{(1)\mu}=-\partial^{\sigma}(k_{\sigma}a_{\mu}-k_{\mu}a_{\sigma})-k_{\mu}\partial^{\sigma}a_{\sigma},$$

то, принимая во внимание, что на решениях уравнения /1.6/ $\mathfrak{L}_1=0$, получаем

$$k_{\mu}\tilde{\mathfrak{L}}_1=(KA)_{(1)\mu}+\partial^{\sigma}(k_{\sigma}a_{\mu}-k_{\mu}a_{\sigma}).$$

Если теперь учесть, что, согласно /27/,

$$(KA)_{(1)\mu}=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{4}\frac{1}{p!}(\bar{f}_{\mu}^{\;a_1\ldots a_p}(LF)_{(p)a_1\ldots a_p}+$$

$$+f^{\,a_1\ldots a_p}\overline{(LF)}_{(p)a_1\ldots a_p}-\bar{f}^{\,a_1\ldots a_p}(LF)_{(p+1)\mu a_1\ldots a_p}-$$

$$-f^{\,a_1\ldots a_p}\overline{(LF)}_{(p+1)\mu a_1\ldots a_p}),$$

то в итоге получаем

$$\int_{\Sigma}k^{\nu}T_{\mu\nu}d\sigma^{\mu}=\frac{1}{2}\langle LF,F\rangle+\frac{1}{2}\langle F,LF\rangle+$$

$$+\int_{\Sigma}\partial^{\sigma}(q_{\sigma\mu}+k_{\mu}a_{\sigma}-k_{\sigma}a_{\mu})d\sigma^{\mu}.$$

Тензор $q_{\sigma\mu} + k_\mu a_\sigma - k_\sigma a_\mu$ - антисимметрический и поэтому по теореме Стокса интеграл от его дивергенции равен нулю. Тем самым равенство /25/ доказано. Аналогично доказывается и равенство /26/. Доказанные равенства /25/, /26/ имеют важное значение, так как связывают динамические инварианты с-поля со средними значениями оператора К относительно введенных скалярных произведений /21/, /22/. Так, мы имеем

$$P_0 = \int \overline{T}_{00} d^3x = \langle F, i\frac{\partial F}{\partial t} \rangle ,$$

$$P_k = \int T_{0k} d^3x = \langle F , i\frac{\partial F}{\partial x^k} \rangle ,$$

в полном соответствии с основными квантовомеханическими представлениями.

Автор глубоко благодарен проф. Н.А.Черникову за ценные замечания.

Литература

1. *Пестов А.Б. Препринт ОИЯИ, Р2-9642, Дубна, 1976.*
2. *Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., ИЛ, 1963.*
3. *Тирринг В.Е. Принципы квантовой электродинамики. М., "Высшая школа", 1964.*
4. *Сигал И. Математические проблемы релятивистской физики. М., "Мир", 1968.*
5. *Черников Н.А., Шавохина Н.С. Препринт ОИЯИ, Р2-6109, Дубна, 1971.*
6. *Н.С.Шавохина. ТМФ, 1972, 10, 412.*
7. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., "Наука", 1973.*

Рукопись поступила в издательский отдел
21 января 1977 года.