ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

25/IV-77

Г-492

P2 - 10375

1476/2-77

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

ПРИМЕР РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ.

I. Общий метод и нерелятивистская модель

1977

P2 - 10375

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

ПРИМЕР РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ ДВУХ ТЕЛ.

I. Общий метод и нерелятивистская модель

Направлено в ТМФ

Объе... институт
ядер...
БИ...

Черников Н.А., Шавохина Н.С. Р2 - 10375

Пример релятивистской задачи двух тел. 1. Общий метод и нерелятивистская модель

Один тип взаимодействия двух частиц сводится к лагранжевой системе дифференциальных уравнений с частными производными для мировой поверхности, стягивающей мировые линии - траектории частиц, причем уравнения механики выступают в качестве граничных условий. Подробно рассмотрен простейший пример такого рода - нерелятивистская модель. К рассматриваемому типу относится и релятивистская задача двух тел, аналогичная рассмотренной нерелятивистской модели.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Chernikov N.A., Shavokhina N.S. P2 - 10375

An Example of the Two-Body Relativistic Problem. I. General Method and Nonrelativistic Model

A type of interaction of two particles is reduced to the Lagrange system of partial differential equations for the world surface connecting world lines, particle trajectories, the equations of mechanics being the boundary conditions. The simplest example of this type, nonrelativistic model, is thoroughly analysed. The two-body relativistic problem, analogous to the considered nonrelativistic model also belongs to the type under consideration.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

© 1977 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

1. Лагранжев подход к задаче

Задача релятивистского описания системы двух тел была выдвинута Пуанкаре [1]. Она оказалась настолько трудной, что не получила не только удовлетворительного решения, но и точной постановки: до сих пор неизвестны уравнения движения релятивистской системы двух частиц.

Стараясь установить уравнения движения, будем считать, что частицы взаимодействуют только друг с другом. В связи с этим в работе [2] одного из авторов отмечалась следующая трудность. Какими бы уравнениями ни определялось движение двух частиц, в результате их решения мы должны получить пару мировых траекторий. Возникает вопрос: в каком случае эта пара представляет движение двух взаимодействующих только друг с другом частиц? В нерелятивистском случае ответить нетрудно. Мировая гиперплоскость $t = t_0$ пересекает заданные траектории в двух мировых точках. Соединим эти точки отрезком прямой и разделим его в отношении масс m_1 к m_2. Меняя t_0, получаем множество точек деления. Если это множество заполняет мировую прямую, то - с небольшими оговорками - рассматриваемая пара частиц предоставлена самой себе. В противном случае на нее действуют внешние силы. Здесь существенно, что гиперплоскость $t = t_0$ инвариантна относительно преобразований Галилея. Если же последние заменяем преобразованиями Лоренца, то вопрос становится трудным, коль скоро имеем дело не с тривиальным случаем, когда обе частицы движутся прямолинейно и равномерно или когда они претерпевают лишь контактное столкновение друг с другом.

В одном нетривиальном случае ответить на поставленный выше вопрос и установить уравнения движения помогает изучение поверхности, натянутой на мировые траектории и ограниченной ими. Эта поверхность представляет собой абстрактную схему передачи взаимодействия между частицами.

Изложим общий лагранжев подход к изучению такой системы. Уравнение поверхности, как и самих траекторий, запишем в параметрическом виде

$$x = x_0(u, v), \quad x = x_1(\tau_1), \quad x = x_2(\tau_2). \qquad /1/$$

Здесь u, v - параметры на поверхности, τ_1 и τ_2 - параметры на траекториях, x - совокупность координат в четырехмерном /или, если угодно, в N-мерном/ мире.

Составим функцию действия системы /1/ в виде суммы

$$S = S_0 + S_1 + S_2 \text{ , где}$$

$$S_0 = \int\int \mathcal{L}_0\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial u}, \frac{\partial x_0}{\partial v}\right) du\, dv\,, \qquad /2/$$

$$S_1 = \int \mathcal{L}_1\left(x_1, \frac{dx_1}{d\tau_1}\right) d\tau_1\,, \qquad /3/$$

$$S_2 = \int \mathcal{L}_2\left(x_2, \frac{dx_2}{d\tau_2}\right) d\tau_2\,. \qquad /4/$$

Здесь $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ - однородные первого порядка функции производных $\dot{x}_1 = \dfrac{dx_1}{d\tau_1}$ и $\dot{x}_2 = \dfrac{dx_2}{d\tau_2}$, соответственно.

Что касается $\mathcal{L}_0$, то при замене параметров она преобразуется по правилу

$$\mathcal{L}'_0\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial u'}, \frac{\partial x_0}{\partial v'}\right) = \mathcal{L}_0\left(x_0, \frac{\partial x_0}{\partial u}, \frac{\partial x_0}{\partial v}\right)\frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')}.$$

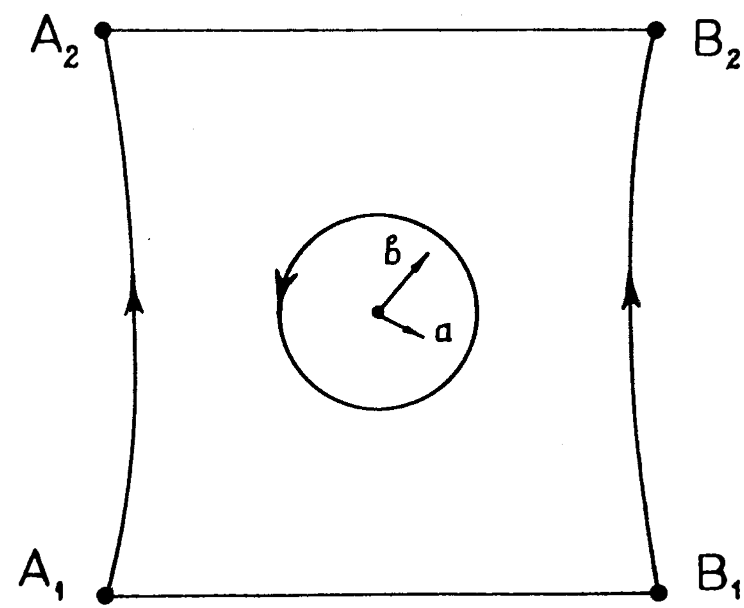
Такому условию удовлетворяет функция вида

$$\mathcal{L}_0\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right) = F(x, J)\,, \qquad /5/$$

где J - совокупность величин

$$J^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u}\frac{\partial x^\beta}{\partial v} - \frac{\partial x^\beta}{\partial u}\frac{\partial x^\alpha}{\partial v}\,, \qquad /6/$$

а F - однородная первого порядка функция величин $J^{\alpha\beta}$. Функции $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ описывают механические свойства частиц самих по себе, а функция $\mathcal{L}_0$ описывает их взаимодействие. Интеграл /3/ берется по направленному в будущее отрезку $A_1 A_2$ мировой траектории первой частицы, интеграл /4/ - по направленному в будущее отрезку $B_1 B_2$ мировой траектории второй частицы, а интеграл /2/ - по ориентированному куску $A_1 B_1 B_2 A_2 A_1$ поверхности $x = x_0(u, v)$ /см. *рисунок*/.



Рассмотрим вариацию функции действия. Имеем

$$\delta S_0 = \iint \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial a^\alpha} \delta a^\alpha + \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial b^\alpha} \delta b^\alpha \right) du\, dv \,, \qquad /7/$$

где

$$a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u}, \qquad b^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial v}, \qquad /8/$$

затем

$$\delta S_1 = \int_{A_1}^{A_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \dot x^\alpha} \delta \dot x^\alpha \right) d\tau_1 \qquad /9/$$

и

$$\delta S_2 = \int_{B_1}^{B_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial x^\alpha} \delta x^\alpha + \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial \dot x^\alpha} \delta \dot x^\alpha \right) d\tau_2 \,. \qquad /10/$$

Выведем уравнения движения. Для этого проинтегрируем /9/ и /10/ по частям:

$$\delta S_1 = \int_{A_1}^{A_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau_1} \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \dot x^\alpha} \right) \delta x^\alpha d\tau_1 + \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \dot x^\alpha} \delta x^\alpha \Big|_{A_1}^{A_2}$$

$$\delta S_2 = \int_{B_1}^{B_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial x^\alpha} - \frac{d}{d\tau_2} \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial \dot x^\alpha} \right) \delta x^\alpha d\tau_2 + \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial \dot x^\alpha} \delta x^\alpha \Big|_{B_1}^{B_2} .$$

Вариацию же /7/ с помощью формулы Грина приведем к аналогичному виду:

$$\delta S_0 = \iint \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial a^\alpha} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial b^\alpha} \right) \delta x^\alpha du\, dv +$$

$$+ \oint \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial a^\alpha} dv - \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial b^\alpha} du \right) \delta x^\alpha ,$$

где контурный интеграл равен

$$\oint = \int_{B_1}^{B_2} - \int_{A_1}^{A_2} - \int_{A_2}^{B_2} + \int_{A_1}^{B_1} .$$

Приравнивая нулю вариацию $\delta S = \delta S_0 + \delta S_1 + \delta S_2$ всюду, за исключением отрезков $A_1 B_1$ и $A_2 B_2$, получаем уравнения движения:

$$0)\quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial a^\alpha} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial b^\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial x^\alpha} = 0 \,,$$

$$1)\quad \frac{d}{d\tau_1} \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \dot x^\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial b^\alpha} \frac{du}{d\tau_1} - \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial a^\alpha} \frac{dv}{d\tau_1} \,,$$

$$/11/$$

$$2)\quad \frac{d}{d\tau_2} \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial \dot x^\alpha} - \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial a^\alpha} \frac{dv}{d\tau_2} - \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial b^\alpha} \frac{du}{d\tau_2} \,.$$

Мы видим, что уравнения 1/ и 2/ для мировых траекторий частиц выступают в качестве граничных условий для мировой поверхности, задаваемой уравнением 0/.

Если уравнения движения /11/ удовлетворяются, то

$$\delta S = \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \dot x^\alpha} \delta x^\alpha (A_2) + \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial \dot x^\alpha} \delta x^\alpha (B_2) + \int_{A_2}^{B_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial b^\alpha} du - \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial a^\alpha} dv \right) \delta x^\alpha -$$

$$- \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \dot x^\alpha} \delta x^\alpha (A_1) - \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial \dot x^\alpha} \delta x^\alpha (B_1) - \int_{A_1}^{B_1} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial b^\alpha} du - \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial a^\alpha} dv \right) \delta x^\alpha . \qquad /12/$$

Отсюда получаем определение импульса системы

$$P_\alpha = \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial \dot x^\alpha}(A) + \frac{\partial \mathfrak{L}_2}{\partial \dot x^\alpha}(B) + \int_A^B \left(\frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial b^\alpha} du - \frac{\partial \mathfrak{L}_0}{\partial a^\alpha} dv \right) . \qquad /13/$$

Рассмотрим теперь, как в данном случае реализуется общая теорема Нетер. Выполним преобразование координат

$$\tilde x^\alpha = x^\alpha + \lambda^\alpha(x)\,\epsilon \,,$$

где ϵ - бесконечно малый параметр, и обозначим

$$\delta x^\alpha = \lambda^\alpha \epsilon \,, \qquad \delta \dot x^\alpha = \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^\beta} \dot x^\beta \epsilon \,,$$

$$\delta a^\alpha = \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^\beta} a^\beta \epsilon \,, \qquad \delta b^\alpha = \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial x^\beta} b^\beta \epsilon \,.$$

При подстановке этих выражений в /7/, /9/ и /10/ может случиться, что $\delta S = 0$. Тогда, согласно /12/, в процессе движения системы сохраняется величина M, равная

$$M = \lambda^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{x}^{\alpha}}(A) + \lambda^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot{x}^{\alpha}}(B) + \int_A^B \lambda^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^{\alpha}} du - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^{\alpha}} dv \right). \quad /14/$$

Например, если функции $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ не зависят явно от координаты x^1, то положим $\tilde{x}^1 = x^1 + \epsilon$ и $\tilde{x}^{\alpha} = x^{\alpha}$, если $\alpha \neq 1$. Нетрудно увидеть, что в таком случае $\delta S = 0$. Значит, сохраняется компонента P_1 импульса /13/.

2. *Зависимость между уравнениями движения*

Докажем, что в системе /11/ левая часть уравнения 0/ ортогональна к векторам a^{α} и b^{α}, а обе части уравнений 1/ и 2/ ортогональны к $\dot{x}_1^{\alpha}$ и $\dot{x}_2^{\alpha}$, соответственно.

Начнем с левых частей уравнений 1/ и 2/. Пусть $\mathcal{L}(x, \dot{x})$ - произвольная дифференцируемая функция от x^{α} и $\dot{x}^{\alpha}$. Пусть $x^{\alpha} = x^{\alpha}(\tau)$ - некоторая кривая и

$\dot{x}^{\alpha} = \frac{d}{d\tau} x^{\alpha}(\tau)$, $\ddot{x}^{\alpha} = \frac{d}{d\tau} \dot{x}^{\alpha}(\tau)$. Тогда

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} \dot{x}^{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} \ddot{x}^{\alpha},$$

а значит,

$$\dot{x}^{\alpha} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\dot{x}^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} - \mathcal{L} \right).$$

Если $\mathcal{L}$ - однородная первого порядка функция от аргументов $\dot{x}^{\alpha}$ /как это и предполагается относительно функций $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ /, то по теореме Эйлера

$$\dot{x}^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = \mathcal{L}. \quad /15/$$

Следовательно, для таких функций имеется тождество

$$\dot{x}^{\alpha} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} \right) = 0. \quad /16/$$

Рассмотрим теперь левую часть уравнения 0/. Пусть $\mathcal{L}(x, a, b)$ - произвольная дифференцируемая функция от x^{α}, a^{α}, b^{α}. Пусть $x^{\alpha} = x^{\alpha}(u, v)$ - некоторая поверхность и $a^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial u}$, $b^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial v}$. Тогда

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} a^{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^{\alpha}} \frac{\partial a^{\alpha}}{\partial u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b^{\alpha}} \frac{\partial b^{\alpha}}{\partial u},$$

а так как $\frac{\partial b^{\alpha}}{\partial u} = \frac{\partial a^{\alpha}}{\partial v}$, то

$$a^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^{\alpha}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b^{\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^{\alpha}} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} \left(a^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^{\alpha}} - \mathcal{L} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(a^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b^{\alpha}} \right).$$

Если аргументы a и b входят в выражение для $\mathcal{L}$ только в виде комбинаций

$$J^{\alpha\beta} = a^{\alpha} b^{\beta} - a^{\beta} b^{\alpha}, \quad /17/$$

то есть если

$$\mathcal{L}(x, a, b) = F(x, J), \quad /18/$$

то, как нетрудно подсчитать,

$$a^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b^{\alpha}} = 0, \qquad b^{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a^{\alpha}} = 0. \quad /19/$$

Это как раз те самые комбинации /6/, от которых зависит функция $\mathcal{L}_0$. Следовательно, для такой функции

$$a^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^\alpha}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b^\alpha}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(a^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^\alpha}-\mathcal{L}\right).$$

Если теперь $F(x,J)$ - однородная первого порядка функция от $J^{\alpha\beta}$, то функция /18/ будет однородной первого порядка функцией от аргументов a^α и b^α в отдельности. Для такой функции, аналогично /15/, получаем

$$a^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^\alpha}=\mathcal{L}, \qquad b^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b^\alpha}=\mathcal{L}, \qquad /20/$$

а значит,

$$a^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^\alpha}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b^\alpha}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\right)=0. \qquad /21/$$

Поскольку параметры u, v здесь входили симметрично, то и

$$b^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^\alpha}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b^\alpha}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\alpha}\right)=0. \qquad /22/$$

Согласно /5/, функция $\mathcal{L}_0$ является как раз такой функцией. Поэтому для нее имеем два тождества /21/ и /22/.

Нам осталось доказать, что правые части уравнений 1/ и 2/ ортогональны к векторам $\dot{x}_1^\alpha$ и $\dot{x}_2^\alpha$, соответственно. Это нетрудно сделать, имея выражение

$$\frac{dx^\alpha}{d\tau}=a^\alpha\frac{du}{d\tau}+b^\alpha\frac{dv}{d\tau} \qquad /23/$$

для скорости и выражение

$$f_\alpha=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^\alpha}\frac{dv}{d\tau}-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b^\alpha}\frac{du}{d\tau} \qquad /24/$$

для силы. Умножая /23/ и /24/ и свертывая произведение по индексу α, находим

$$\dot{x}^\alpha f_\alpha=\left(a^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^\alpha}-b^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b^\alpha}\right)\frac{du}{d\tau}\frac{dv}{d\tau}-$$

$$-a^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial b^\alpha}\left(\frac{du}{d\tau}\right)^2+b^\alpha\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial a^\alpha}\left(\frac{dv}{d\tau}\right)^2.$$

На основании /19/ и /20/ заключаем отсюда, что

$$\dot{x}^\alpha f_\alpha=0. \qquad /25/$$

Итак, все утверждения доказаны. Для доказательства нам потребовалось только, чтобы функции $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ удовлетворяли условию /15/, а функция $\mathcal{L}_0$ - условиям /19/ и /20/. Требования, которые мы с самого начала предъявили к $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, оказываются эквивалентными этим условиям. Действительно, если функция $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию /15/, то, как известно, она является однородной первого порядка функцией от аргументов $\dot{x}^\alpha$. Если функция $\mathcal{L}$ удовлетворяет условиям /19/, то она зависит только от комбинаций /17/, т.е. имеет вид /18/. Если к тому же она удовлетворяет и условиям /20/, то функция $F(x,J)$ может быть только однородной первого порядка функцией от аргументов /17/.

Наличие двух зависимостей между уравнениями 0/ отражает произвол в выборе параметров u, v, а одной зависимости в каждой из групп уравнений 1/ и 2/ - произвол в выборе параметров τ_1 и τ_2. В зависимости от вида функций $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ и других условий задачи оказывается удобным тот или иной выбор параметров u, v, τ_1, τ_2.

Во всяком случае, можно положить

$$v=\tau_1=\tau_2=t, \qquad /26/$$

где $t = x^0$ - координата времени. При этом вместо /1/ пишем

$$x^k = x_0^k\,(u,t)\,,\quad x^k = x_1^k(t)\,,\quad x^k = x_2^k\,(t)\,, \qquad /27/$$

где $k = 1,2,3$, и получаем

$$\dot t = 1\,,\quad a^0 = 0\,,\quad b^0 = 1\,. \qquad /28/$$

В силу /16/, /22/, /25/ и /28/ в системе /11/ уравнения с индексом $\alpha = 0$ являются следствием остальных, так что достаточно решить следующие уравнения

$$0)\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^k} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^k} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^k} = 0\,,$$

$$1)\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot x^k} - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^k}\frac{du}{dt} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^k}\,, \qquad /29/$$

$$2)\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot x^k} - \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^k} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^k}\frac{du}{dt}\,.$$

Согласно /21/, в системе /29/ остается одна зависимость

$$a^k\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^k} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^k} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^k}\right) = 0\,, \qquad /30/$$

отражающая оставшийся произвол в выборе параметра u .

Наконец, заметим, что в интеграле /14/ можно считать $t = \mathrm{const}$, так что

$$M = \lambda^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot x^\alpha}(A) + \lambda^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \dot x^\alpha}(B) + \int_A^B \lambda^\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^\alpha}\,du\,. \qquad /31/$$

3. Нерелятивистская модель

Обозначим

$$J^k = J^{k0} = a^k\, b^0 - a^0\, b^k\,,$$

$$\vec J = \{J^1, J^2, J^3\}\,,\qquad \vec x = \{x^1, x^2, x^3\}\,,$$

$$\vec a\vec b = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3\,,\qquad |\vec x| = \sqrt{\vec x\vec x}$$

и положим

$$\mathcal{L}_0\,(x,a,b) = -G\,|\vec J\,|\,,$$
$$\mathcal{L}_n\,(x,\dot x) = \frac{1}{2} m_n \frac{\dot{\vec x}\dot{\vec x}}{\dot t}\,,\qquad n = 1,2\,, \qquad /32/$$

где m_1, m_2- массы частиц, G - константа их взаимодействия. Имеем

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \vec a} = -G\frac{\vec J\, b^0}{|\vec J\,|}\,,\qquad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \vec b} = G\frac{\vec J\, a^0}{|\vec J\,|}\,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^0} = G\frac{\vec J\vec b}{|\vec J\,|}\,,\qquad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^0} = -G\frac{\vec J\vec a}{|\vec J\,|}\,, \qquad /33/$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \dot{\vec x}} = m_n\frac{\dot{\vec x}}{\dot t}\,,\qquad \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \dot t} = -\frac{1}{2} m_n \frac{\dot{\vec x}^2}{\dot t^2}\,.$$

На этом примере в порядке упражнения полезно детально проследить ход рассуждений, приведший нас к уравнениям /29/. Мы этого здесь делать не будем, зато довольно подробно рассмотрим сами уравнения /29/. Выбирая параметры /26/, при которых выполняются равенства /28/, из /33/ получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \vec a} = -G\frac{\vec a}{|\vec a|}\,,\qquad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \vec b} = 0\,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial a^0} = G\,\frac{\vec a \vec b}{|\vec a|}\,, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial b^0} = -G\,|\vec a|\,,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_n}{d\dot{\vec x}} = m_n\,\frac{d\vec x}{dt}\,, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_n}{\partial \dot t} = -\frac{1}{2}\,m_n\left(\frac{d\vec x}{dt}\right)^2. \qquad /34/$$

Так как к тому же функции /32/ не зависят от $\vec x$, то уравнения /29/ принимают следующий вид:

$$0)\quad \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\vec a}{|\vec a|} = 0\,,$$

$$1)\quad m_1\,\frac{d^2\vec x_1}{dt^2} = G\,\frac{\vec a}{|\vec a|}\,, \qquad /35/$$

$$2)\quad m_2\,\frac{d^2\vec x_2}{dt^2} = -G\,\frac{\vec a}{|\vec a|}\,.$$

Из уравнения 0/ сразу получаем, что

$$\frac{\vec a}{|\vec a|} = \vec n(t)\,, \qquad /36/$$

где $\vec n(t)$ - произвольная функция времени, удовлетворяющая условию

$$|\vec n(t)| = 1\,, \qquad /37/$$

а тогда из 1/ и 2/ следует, что сумма

$$m_1\,\frac{d\vec x_1}{dt} + m_2\,\frac{d\vec x_2}{dt} = \vec P \qquad /38/$$

является интегралом движения. Этот же результат получается и по теореме Нетер. Действительно, поскольку величины /32/ не зависят от $\vec x$, сохраняются три компоненты $\vec P$ импульса /13/. Вычисляя их по формуле /31/, получаем /38/.

Не так просто выглядит компонента $P_0 = -E$, которая тоже сохраняется, поскольку величины /32/ не зависят от t. Из формулы /31/ следует, что

$$E = \frac{m_1}{2}\left(\frac{d\vec x_1}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{d\vec x_2}{dt}\right)^2 + G\int_{u_1(t)}^{u_2(t)} |\vec a(u,t)|\,du\,.$$

Это есть энергия системы.

По теореме Нетер получаем также, что сохраняется момент количества движения, равный

$$\vec M = m_1\left[\vec x_1\,\frac{d\vec x_1}{dt}\right] + m_2\left[\vec x_2\,\frac{d\vec x_2}{dt}\right]. \qquad /40/$$

Действительно, рассмотрим, например, преобразование

$$\tilde x^0 = x^0\,, \qquad \tilde x^1 = x^1\cos\epsilon - x^2\sin\epsilon\,,$$

$$\tilde x^3 = x^3\,, \qquad \tilde x^2 = x^1\sin\epsilon + x^2\cos\epsilon\,,$$

где ϵ - параметр. При таком преобразовании величины /32/ не меняются. Поэтому при $\delta x^\alpha = \lambda^\alpha \epsilon$, где

$$\lambda^0 = 0\,, \quad \lambda^1 = -x^2\,, \quad \lambda^2 = x^1\,, \quad \lambda^3 = 0\,,$$

вариация δS равняется нулю. Значит, сохраняется величина, равная

$$M_3 = m_1\left(x^1\frac{dx^2}{dt} - x^2\frac{dx^1}{dt}\right)(A) + m_2\left(x^1\frac{dx^2}{dt} - x^2\frac{dx^1}{dt}\right)(B)\,.$$

Полученный результат записывается в виде /40/. Но из уравнений движения 1/ и 2/ следует, что

$$\frac{d\vec M}{dt} = -G\,[\vec x_2 - \vec x_1, \vec n\,]\,. \qquad /41/$$

Значит, вектор $\vec{n}$ должен быть направлен по вектору $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$.

К этому заключению можно прийти, минуя теорему Нетер. Действительно, мы должны решить систему уравнений /36/, где $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u}$. Координата t играет в ней роль константы, так что по существу имеем дело с системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее общее решение есть

$$\vec{x} = \vec{x}_0(u,t) = \vec{X}(t) + \vec{n}(t)\xi(u,t), \qquad /42/$$

где $\vec{X}(t)$ - произвольная функция времени, а функция $\xi(u,t)$ удовлетворяет единственному условию $\partial\xi/\partial u > 0$ монотонного возрастания по аргументу u. Из /42/ находим

$$\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t) = [\xi(u_2(t),t) - \xi(u_1(t),t)]\vec{n}(t), \qquad /43/$$

а значит, векторы $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$ и $\vec{n}$ коллинеарны. Из /41/ и /43/, независимо от теоремы Нетер, заключаем, что сохраняется величина /40/.

Перейдем теперь к главному выводу, перекрывающему все предыдущие: уравнения движения 1/ и 2/ суть уравнения Ньютона

$$m_1 \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = G\frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|}, \quad m_2 \frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = G\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \qquad /44/$$

для двух материальных точек, между которыми действует сила, равная по величине $|G|$ и направленная по соединяющей их линии, причем частицы притягиваются, если $G > 0$. Это непосредственно получается из /43/ и /36/.

Видим, что данная сила, так сказать, материализуется в виде мировой поверхности /42/, целиком состоящей из мировых траекторий нерелятивистских тахионов [3] - прямолинейных отрезков $\ell(t)$, соединяющих мировые точки $\vec{x}_1(t)$ и $\vec{x}_2(t)$. В результате мы пришли к той указанной в работе [2] конфигурации, о которой говорилось в начале статьи.

Среди всех интегралов движения $\vec{P}$, $\vec{M}$ и E мировая поверхность /42/, стягивающая мировые траектории частиц, вносит свой вклад только в энергию E. Нетрудно подсчитать, что интеграл движения /39/ равняется гамильтоновой функции

$$E = \frac{m_1}{2}\left(\frac{d\vec{x}_1}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right)^2 + G\,|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \qquad /45/$$

для уравнений Ньютона /44/. Действительно, согласно /42/,

$$|\vec{a}(u,t)| = \frac{\partial}{\partial u}\xi(u,t). \qquad /46/$$

Из формул /39/, /46/ и /43/ получаем /45/.

Чтобы лучше изучить поверхность /42/, воспользуемся оставшимся произволом в выборе параметра u, благодаря которому имеем тождество /30/, в данном случае означающее, что

$$\vec{a}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = 0. \qquad /47/$$

Именно, заменим параметр u на $\xi = \xi(u,t)$. Эта замена фактически означает наложение условия

$$|\vec{a}| = 1 \qquad /48/$$

на выбор параметра u. Иначе говоря, параметр u, удовлетворяющий условию /48/, называем ξ. Теперь вместо /42/ и /43/ мы можем написать

$$\vec{x} = \vec{X}(t) + \vec{n}(t)\xi, \qquad /49/$$

$$\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t) = [\xi_2(t) - \xi_1(t)]\vec{n}(t). \qquad /50/$$

Если бы мы сразу приняли условие /48/, то уравнения движения 0/ записались бы в виде

$$\frac{\partial^2\vec{x}}{\partial\xi^2} = 0, \qquad /51/$$

и мы сразу бы пришли к /49/ и /50/, где вектор $\vec{n}(t)$, согласно условию /48/, должен быть единичным.

Как видно, параметр ξ есть ориентированная длина на тахионной мировой траектории $\ell(t)$. Поскольку на прямой, содержащей отрезок $\ell(t)$, не указано начало отсчета длины, в выборе параметра ξ все еще остается некоторый произвол. Именно, если заменить ξ на $\xi' = \xi - \phi(t)$, где $\phi(t)$- произвольная функция времени, то формула /50/ не изменится, а в формуле /49/ функция $X(t)$ заменится на $\vec{X}'(t) = \vec{X}(t) + \vec{n}(t)\phi(t)$, что несущественно ввиду произвольности функции $\vec{X}(t)$. Чтобы устранить и этот произвол, поместим начало отсчета в центр масс частиц, т.е. положим

$$\vec{X}(t) = \frac{m_1\vec{x}_1(t) + m_2\vec{x}_2(t)}{m_1 + m_2}. \qquad /52/$$

Из уравнений Ньютона /44/ или просто из /38/ следует, что величина

$$\vec{N} = m_1\vec{x}_1(t) + m_2\vec{x}_2(t) - t\,[m_1\frac{d}{dt}\vec{x}_1(t) + m_2\frac{d}{dt}\vec{x}_2(t)] \qquad /53/$$

не зависит от t. Следовательно, мировая траектория /52/ центра масс частиц есть прямая линия

$$\vec{X}(t) = \frac{\vec{N} + \vec{P}t}{m_1 + m_2}. \qquad /54/$$

Таким образом, на поверхности /49/ лежит прямая /54/.

Подставляя /54/ в /49/, получаем уравнение поверхности в виде

$$\vec{x} = \frac{\vec{N} + \vec{P}t}{m_1 + m_2} + \vec{n}(t)\xi. \qquad /55/$$

Чтобы найти вектор $\vec{n}(t)$, введем вектор

$$\vec{K}(t) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}[\vec{x}_2(t) - \vec{x}_1(t)]. \qquad /56/$$

Из уравнений Ньютона /44/ следует, что он удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\vec{K}}{dt^2} = -G\frac{\vec{K}}{|\vec{K}|}. \qquad /57/$$

Решив это уравнение, найдем

$$\vec{n}(t) = \frac{\vec{K}(t)}{|\vec{K}(t)|}. \qquad /58/$$

Тому, кто хочет стать механиком, Аппель рекомендует уравнение /57/ для самостоятельного упражнения /4/.

Интересно получить закон сохранения величины /53/ из вариационного принципа. Рассмотрим преобразование Галилея

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{\vec{x}} = \vec{x} - \vec{\epsilon}t,$$

где $\vec{\epsilon}$ - параметр. При таком преобразовании комбинация

$$\frac{\partial\vec{x}}{\partial u}\frac{\partial t}{\partial v} - \frac{\partial\vec{x}}{\partial v}\frac{\partial t}{\partial u}$$

не меняется, а значит, не меняется $\mathfrak{L}_0$. Величина же $\frac{m}{2}\frac{\dot{\vec{x}}^2}{t}$ при бесконечно малых $\vec{\epsilon}$ получает приращение $-m\vec{\epsilon}\,\dot{\vec{x}}$. Значит,

$$\delta S = -\vec{\epsilon}(m_1\vec{x}_1 + m_2\vec{x}_2)\Big|_{t_A}^{t_B}. \qquad /59/$$

С другой стороны, из общей формулы /12/ следует, что

$$\delta S = -\vec{\epsilon}t\,(m_1\frac{d\vec{x}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{x}_2}{dt})\Big|_{t_A}^{t_B}. \qquad /60/$$

Сравнивая /59/ и /60/, получаем, что величина /53/ со временем не меняется.

Нерелятивистскую модель мы подробно рассмотрели потому, что решенные здесь вопросы необходимы для понимания релятивистской проблемы двух тел.

Литература

1. *Пуанкаре А. О динамике электрона в кн. "Принцип относительности", М., Атомиздат, 1973, 90, 118.*
2. *Черников Н.А. ЭЧАЯ, 1973, т. 4, вып. 3, 808.*
3. *Черников Н.А. Препринт ОИЯИ, Р2-10251, Дубна, 1976.*
4. *Аппель П. Теоретическая механика. М., Физматгиз, 1960, т. I, 370.*

Рукопись поступила в издательский отдел
7 января 1977 года.