ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10362

В.Г.Маханьков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ "ЗАРЯЖЕННЫХ"СОЛИТОНОВ В РАМКАХ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА С НАСЫЩАЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

1977

Р2 - 10362

В.Г.Маханьков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ "ЗАРЯЖЕННЫХ" СОЛИТОНОВ В РАМКАХ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА С НАСЫЩАЮЩЕЙСЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Направлено в сб. "Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики", вып. II

Маханьков В.Г. Р2 - 10362

Об устойчивости "заряженных" солитонов в рамках уравнения Клейна-Гордона с насыщающейся нелинейностью

Рассмотрены вопросы устойчивости сферически-симметричных частицеподобных решений (солитонов) для скалярного комплексного поля с нелинейным взаимодействием довольно общего вида в рамках релятивистски-инвариантных уравнений. Показано, что в случае так называемой насыщающейся нелинейности существует область (по параметру, связанному с U(1) -симметрией) устойчивости солитона.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Makhankov V.G. P2 - 10362

On Stability of "Charged" Solitons within the Klein-Gordon Equation with Saturated Nonlinearity

The stability problem of spherically symmetric particle - like solutions (solitons) is studied for the scalar complex relativistic field theory with a rather general type of nonlinear interaction. The region of soliton stability in which the parameter relating to U(1) symmetry varies is found to be in the case of the so-called saturated nonlinearity.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computer Technique and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

1. Из теоремы Деррика-Хоббарта /1/ известно, что неодномерные солитоны, как стационарные решения релятивистски-инвариантных /РИ/ уравнений, описывающих взаимодействие /или самодействие/ действительных скалярных полей, оказываются неустойчивыми по отношению к масштабным колебаниям*.

Представляет интерес исследовать на устойчивость неодномерные солитоны, обладающие внутренней симметрией. К ним, в частности, относятся солитоны РИ уравнений для комплексного поля. Одна из наиболее изученных таких моделей - это уравнение Клейна-Гордона с кубической нелинейностью, случай так называемой ϕ^4 - теории поля. Из работы Андерсона-Деррика /2/ известно, что солитоны в этой модели также неустойчивы. Ниже мы рассмотрим вопросы устойчивости сферически-симметричных (ss) солитонов комплексного поля в рамках РИ уравнения Клейна-Гордона с довольно общим видом нелинейности:

$$(\partial_t^2 - \partial_{\vec{x}}^2)\phi + m^2\phi - \phi F(|\phi|^2) = 0. \qquad /1/$$

Это уравнение получается из вариационного принципа $\delta S = 0$, где $S = \int \mathcal{L}(\phi, \phi_{\vec{x}})\, d\vec{x}\, dt$, а

$$\mathcal{L} = |\phi_t|^2 - |\phi_{\vec{x}}|^2 - m^2|\phi|^2 - \frac{1}{2} U(|\phi|^2),$$

$$F(|\phi|^2) = -\frac{1}{2\phi}\frac{dU}{d\phi^*}, \qquad /2/$$

и имеет первые интегралы** :

*Эта теорема легко обобщается на векторные поля.

**В отличие от действительного поля появляется интеграл заряда, связанный с U(1)-симметрией.

а/ заряда

$$Q = -i\int(\phi_i^*\phi - \phi^*\phi_i)d\vec{x}\,, \qquad /3/$$

б/ импульса

$$\vec{P} = -\int(\phi_t^*\phi_{\vec{x}} + \phi_{\vec{x}}^*\phi_t)\,d\vec{x}\,, \qquad /4/$$

в/ энергии

$$E = \int\{|\phi_t|^2 + |\phi_{\vec{x}}|^2 + m^2|\phi|^2 + U(|\phi|^2)\}d\vec{x}\,. \qquad /5/$$

Можно показать, что решение

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi(\vec{x})\,e^{-i\mu t} \qquad /6/$$

минимизирует функционал энергии при $\partial_t\mu = 0$, а в собственной системе координат солитона, кроме того, $\partial_{\vec{x}}\mu = \partial_t\Psi = 0$. Здесь и ниже под солитоном мы понимаем локализованное в пространстве решение /I/, имеющее конечные Q, P и E/ ниже мы будем называть их Q-солитонами/.

Подставляя /6/ в /1/-/5/, легко находим

$$\Delta\Psi - \kappa^2\Psi + \Psi F(\Psi^2) = 0\,, \quad \kappa^2 = m^2 - \mu^2, \qquad /7/$$

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2}\{(\Psi_{\vec{x}})^2 + \kappa^2\Psi^2 + U(\Psi^2)\}\,, \qquad /8/$$

$$\vec{P} = 0\,, \qquad /9/$$

$$E = \frac{1}{2}\int\{(\mu^2 + m^2)\Psi^2 + (\Psi_{\vec{x}})^2 + U(\Psi^2)\}\,d\vec{x}\,. \qquad /10/$$

Уравнение /7/ можно получить с помощью вариационного принципа $\delta S=0$ с лагранжианом /8/, полагая вариации поля Ψ произвольными. Кроме того, /7/ получается также из условного экстремума

$$\delta E|_Q = 0 \qquad /11/$$

при постоянном Q. Ясно, что в этом случае вариации поля должны удовлетворять дополнительному условию ортогональности

$$\delta Q = \delta(\mu\int\Psi^2 d\vec{x}) = 2\mu\int\Psi\delta\Psi d\vec{x} = 0\,.$$

Этот же принцип можно сформулировать иначе, выражая с помощью /9/ μ как функционал от Ψ,

$$\mu = QS^{-1}[\Psi]\,, \qquad /12/$$

и подставляя его в /10/ [3]. Теперь уже Q=const выполняется автоматически, поэтому вариации $\delta\Psi$ можно опять считать произвольными.

Итак, полагая $\Psi = \Psi_s + \delta\Psi$, находим $\delta E|_Q = 0$.

Для исследования вопросов устойчивости солитонного решения Ψ_s найдем

$$\delta^2 E = \frac{1}{2}\int\delta\Psi\hat{H}\delta\Psi d\vec{x} + 2\frac{\mu_s^3}{Q}(\int\Psi_s\delta\Psi d\vec{x})^2, \qquad /13/$$

где

$$\hat{H} = -\Delta + \kappa^2 + \Psi_s^2\,\frac{d^2U}{d(\Psi^2)^2}\Big|_{\Psi_s}\,.$$

Кроме того, при получении /13/ мы учли /12/, откуда следует, что

$$\delta(\mu^2 S) = \frac{Q^2}{4(S[\Psi_s])^2}\Big(-2\int\Psi_s\delta\Psi d\vec{x} - \int(\delta\Psi)^2 d\vec{x} + 2\frac{[\int\Psi_s\delta\Psi\, d\vec{x}]^2}{S[\Psi_s]}\Big)\,.$$

Для ответа на вопрос об устойчивости солитонного решения Ψ_s /если таковое существует/ нам придется исследовать задачу на собственные значения /СЗ/ для оператора $\hat{H}$:

$$\hat{H} y_i = \lambda_i y_i \,. \qquad /14/$$

В силу трансляционной симметрии вместе с решением $\Psi_s(\vec{x})$ уравнение /7/ имеет решение $\Psi\ (\vec{x}+\vec{\epsilon})$. А для $\epsilon \ll 1$

$$\Psi_k = \frac{\partial}{\partial x_k}\Psi_s \qquad (k = 1,2,3)$$

является решением /7/ с $\lambda_i = 0$, что проверяется простым дифференцированием уравнения /7/. Таким образом, трансляционная мода представляет собой трижды вырожденное состояние оператора $\hat{H}$ с нулевой энергией. В ss-геометрии с ее помощью можно построить p-состояние с $\ell = 1$:

$$y_p = c\frac{\partial\Psi_s}{\partial r} Y_\ell^m \qquad \text{/ c - константа нормировки/}$$

/оператор $\hat{H}$ есть оператор Шредингера/. Это означает, что существует по крайней мере одно S-состояние $(\ell = 0)$ с более низкой энергией,

$$\lambda < 0 \,.$$

2. Сформулируем теорему. Если тестовый оператор $\hat{H}$ имеет не более одного отрицательного СЗ /а одно существует, как мы видели, всегда/, то знак производной

$$\frac{\mu}{Q}\ \frac{dQ}{d\mu} < 0$$

определяет область устойчивости исследуемого солитонного решения /по крайней мере по отношению к возмущениям, не меняющим его симметрию/. И наоборот, для неустойчивости Q-солитона достаточно наличия у $\hat{H}$ двух отрицательных СЗ или $(dQ/d\mu) > 0$.

Доказательство

Дифференцируя /7/ по μ и вводя обозначение $\Psi^{(\mu)} = \frac{\partial\Psi_s}{\partial\mu}$, имеем

$$\hat{H}\Psi^{(\mu)} = 2\mu\Psi^{(\mu)} \,. \qquad /15/$$

Разложим Ψ_s и $\Psi^{(\mu)}$ по ортонормированной системе с.ф. оператора $\hat{H}$.

$$\Psi^{(\mu)} = \sum_i a_i y_i \,, \qquad /16а/$$

$$\Psi_s = \sum_i b_i y_i \qquad /16б/$$

и

$$\int y_i y_j\, d\vec{x} = \delta_{ij} \,. \qquad /17/$$

Из /15/, /16а/ и /17/ следует

$$\lambda_i a_i = 2\mu b_i \,,$$

т.е. $b_i = 0$ при $\lambda_i = 0$. Кроме того, замечаем, что

$$\int \Psi^{(\mu)} \hat{H} \Psi^{(\mu)} d\vec{x} = \sum_i a_i \lambda_i \,,$$

поэтому в силу /15/

$$\int \Psi^{(\mu)} \hat{H} \Psi^{(\mu)} d\vec{x} = \mu \frac{d}{d\mu}\int \Psi_s^2 d\vec{x} = \frac{1}{2}\ \frac{d}{d\mu}\ \frac{Q}{\mu} \,,$$

или

$$\sum_i{}' a_i^2 \lambda_i = 2\mu^2 \sum_i{}' (b_i^2/\lambda_i) = \frac{\mu}{2}\ \frac{d}{d\mu}\ \frac{Q}{\mu} \,. \qquad /18/$$

Штрих у Σ означает, что при суммировании выбрасываются члены с $\lambda_i = 0$.

Разлагая произвольное возмущение $\delta\Psi$ по с.ф. y_i,

$$\delta\Psi = \sum_i \delta_i y_i \,,$$

из /13/ имеем

$$\delta^2 E = \frac{1}{2}\sum{}' \delta_i^2 \lambda_i + \frac{2\mu^3}{Q}\sum_{ij}{}' b_i b_j \delta_i \delta_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} \delta_i T_{ij} \delta_j \,, \qquad /19/$$

где тестовая матрица T_{ij} определяется формулой

$$T_{ij} = \lambda_i \delta_{ij} + \frac{4}{Q}\mu^3 b_i b_j . \qquad /20/$$

Знак $\delta^2 E$ определяется СЗ матрицы T_{ij}, которые находятся из уравнения

$$\sum_j T_{ij}\delta_j = \Omega\delta_i .$$

Используя определение T_{ij} /см. /20//, найдем

$$\frac{1}{\Omega - \lambda_i} \frac{4}{Q}\mu^2 b_i \sum_j{}' b_j \delta_j = \delta_i .$$

Домножая на b_i и суммируя по i, получим

$$f(\Omega) = \frac{4}{Q}\mu^2 \Sigma' \frac{b_i^2}{\Omega - \lambda_i} - 1 = 0. \qquad /21/$$

Наличие отрицательных корней у уравнения /21/ означает неустойчивость солитона по отношению к соответствующему возмущению. Пусть оператор $\hat{H}$ имеет лишь одно СЗ, меньшее нуля, например, $\lambda_1 = -\lambda$, тогда при $\Omega < 0$

$$f(\Omega) = -\frac{4}{Q}\mu_s^2 \sum_i{}' \frac{b_i^2}{|\Omega| - \lambda} - 1 .$$

Если график этой функции пересечет ось абсцисс, то /21/ будет иметь отрицательный корень. Такое пересечение может быть лишь в области $0 < |\Omega| < \lambda$, в которой $f(\Omega)$ изменяется от $+\infty$ до нуля, если $g(0) < 0$, и остается положительной, если $g(0) \geq 0$.

Из /18/ находим

$$g(0) = -\frac{4}{Q}\mu_s^2 \sum_i{}' (b_i^2/\lambda_i) - 1 = -\frac{\mu_s}{Q} \frac{dQ}{d\mu}, \qquad /22/$$

т.е. отрицательный корень вместе с неустойчивостью имеют место при

$$\frac{\mu}{Q}\frac{dQ}{d\mu} > 0,$$

в противном случае все СЗ матрицы T_{ij} положительны, а солитон устойчив. Наличие двух отрицательных СЗ у оператора $\hat{H}$, λ_1 и λ_2, неминуемо приводит к отрицательному корню уравнения /21/, лежащему между λ_1 и λ_2.

Теорема доказана.

3. Остается выяснить, когда тестовый гамильтониан $\hat{H}$ имеет только одно отрицательное СЗ. Используя методику, изложенную в /4/, можно показать, что, если потенциал U при малых Ψ имеет отличную от нуля вторую производную $(d^2U/d(\Psi^2)^2) \neq 0$ при $\Psi = 0$, то соответствующий ему тестовый гамильтониан имеет лишь одно сферически-симметричное решение с отрицательной энергией.

4. Пусть функция $F(\Psi^2)$ ограничена сверху при $\Psi \to \infty$, запишем ее асимптотику, например, в виде

$$F(\Psi^2) \approx M - \frac{c_1}{(c_2\Psi)^{2k}} \quad (k = 1,2,3,\ldots). \qquad /23/$$

Подставляя это выражение в уравнение /7/, легко найдем, что экстремальные точки потенциала

$$u = -\frac{1}{2}(\kappa^2\Psi^2 + U(\Psi^2)),$$

определяющего траекторию решения на фазовой плоскости, находятся из уравнения

$$\frac{du}{d\Psi} = \Psi(-\kappa^2 + F(\Psi^2)) \approx \Psi(-\kappa^2 + M - \frac{c_1}{(c_2\Psi)^{2k}}) = 0.$$

Откуда, кроме $\Psi = 0$, имеем

$$\Psi_m = \pm \frac{1}{c_2}\left(\frac{c_1}{M-\kappa^2}\right)^{1/2k}. \qquad /24/$$

Поэтому

$$0 < \kappa^2 < M. \qquad /25/$$

Формула /24/ справедлива при $\kappa^2 \to M$.

Рассмотрим теперь поведение интеграла $S[\Psi]$ в зависимости от κ. В случае малых κ при переходе к $\Phi = \frac{\Psi}{\kappa}$ и $\xi = \kappa x$ в силу $(d^2U/d(\Psi^2)^2) \neq 0$

$$S = \int \Psi^2 d\vec{x} = \frac{1}{\kappa}\int \Phi^2 d\vec{\xi} + O(\kappa) \simeq \frac{\mathrm{const}}{\kappa}$$

растет с уменьшением κ. При $\kappa^2 \to M-0$ поведение S будет определяться экстремальными точками Ψ_m, поскольку они определяют масштаб решения как функции параметра κ. Поэтому

$$S \propto \Psi_m^2 \frac{1}{\kappa^3},$$

откуда следует, что для уравнений с насыщающейся нелинейностью возможны решения, для которых S растет при $\kappa^2 \to M$. Поскольку S должна быть непрерывной функцией параметра κ, она имеет минимум при некотором значении κ_{cr}, в котором производная $dS/d\kappa$ меняет знак. Это означает, что в моделях с насыщающейся нелинейностью существует ветвь $Q(\mu)$, которой соответствуют устойчивые солитонные решения. Следует отметить, что предел $\kappa^2 \to M$ или $m^2(1-\frac{\mu^2}{m^2}) \to M$ имеет место, если $M < m^2$, а асимптотой для Q при малых μ будет прямая $\mu = \sqrt{m^2 - M}$. Спадающая ветвь Q соответствует устойчивому решению. В качестве примера можно рассмотреть

$$F = \frac{\Psi^2}{1+\Psi^2},$$

для которой

$$\Psi_m = \pm\sqrt{\frac{\kappa}{1-\kappa^2}}.$$

Из теоремы 2 сразу следует результат работы [2] о неустойчивости ss Q-солитона в модели ϕ^4, а также результат работы [5], в которой была определена область устойчивости плоского Q-солитона:

$$\mu^2 > \frac{1}{2}.$$

Литература

1. *Derrick G.H. J.Math.Phys., 1964, 5, 1252; Hobart R.H. Proc.Phys.Soc., 1965, 85, 610.*
2. *Anderson D., Derrick G.H. J.Math.Phys., 1970, 11, 1336.*
3. *Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Phys.Rev., 1976, D13, 2739.*
4. *Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. Изв. вузов, Радиофизика, 1973, 16, 1021.*
5. *Katyshev Yu.V., Makhankov V.G. Phys.Lett., 1976, 57A, 10.*

Рукопись поступила в издательский отдел
5 января 1977 года.