ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 10360

Г.Н.Афанасьев

О ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДВИЖЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

1977

P2 - 10360

Г.Н.Афанасьев

О ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ДВИЖЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Направлено в "Journal of Physics. A"

Афанасьев Г.Н. P2 - 10360

О дополнительных интегралах движения в классической и квантовой механике

Для случая движения частицы в поле центрального потенциала дан анализ ситуации с дополнительными интегралами движения в классической механике. Показано, что все известные однозначные дополнительные интегралы (включая вектор Рунге-Ленца для кулоновского потенциала и осцилляторные интегралы) могут быть получены из уравнений орбиты и траектории. Из этих же уравнений получаются однозначные интегралы движения для произвольного центрального потенциала. Обсуждаются возможные причины нарушения симметрии при переходе от классической механики к квантовой.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Afanasiev G.N. P2 - 10360

About the Existence of the Additional Integrals of Motion in Classical and Quantum Mechanics

For the particle motion in the field of a central potential an analysis of situation with the existence of the additional integrals of motion in classical mechanics is given. It is shown that all existing singlevalued integrals of motion (including the Runge-Lenz vector for the Coulomb potential and oscillator integrals) can be deduced from the equations of orbit and trajectory. Also, from these equations additional singlevalued integrals for an arbitrary central potential may be obtained. Also we discuss the reasons for the difference of the symmetry group in quantum and classical mechanics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

I. Введение

Время от времени появляются работы /см., например, /1-8//, в которых для случая движения частицы в произвольном центральном потенциале доказывается существование групп симметрий более широких, чем группа трехмерных вращений. Это эквивалентно существованию дополнительных интегралов движения*, отличных от интегралов энергии и углового момента. Ниже мы покажем, что происхождение этих интегралов обязано той тривиальной причине, что всегда можно однозначным образом выразить начальные координаты и импульсы через текущие. Изложение построено следующим образом. В главе II мы приводим известные аргументы в пользу существования однозначных дополнительных интегралов движения. В главе III для нескольких конкретных примеров /трехмерный анизотропный и изотропный осцилляторы, кулоновский потенциал, произвольный центральный потенциал и т.д./ мы в явном виде вычисляем дополнительные интегралы движения и показываем, что для кулоновского и осцилляторного потенциалов они совпадают с известными. Наконец, в главе IV обсуждаются возможные причины нарушения симметрии при переходе от классической мехники к квантовой.

* Под интегралом движения понимают произвольную функцию времени, координат и импульсов $f(x,p,t)$, удовлетворяющую соотношению $\frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\} = 0$.

II. *Аргументы в пользу существования дополнительных однозначных интегралов движения*

Эти аргументы возникают из следующих рассуждений. Пусть в начальный момент времени $t=t_0$ заданы три координаты положения частицы, x_0, y_0, z_0, и три ее скорости $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$. То, что в дальнейшем произойдет с частицей, полностью и однозначно определяется начальными условиями и уравнениями движения. Иначе говоря, текущие координаты и скорости являются однозначными функциями начальных условий и времени:

$$x_i = f_i(t, t_0, x^0, \dot{x}^0),$$

$$\dot{x}_i = \frac{df_i}{dt}(t, t_0, x^0, \dot{x}^0).$$

Эти соотношения можно обратить, т.е. выразить начальные координаты через текущие. Согласно теореме, доказанной Якоби, это всегда можно сделать: функции $x_i^{(0)}, \dot{x}_i^{(0)}$ выражаются через $x_i, \dot{x}_i$ с помощью тех же функций f, в которых переставлены начальный и конечный моменты времени. Это легко понять интуитивно: уравнения механики симметричны относительно изменения знака времени. Поэтому, задав в момент времени t в качестве начальных координат текущие координаты $x_i, \dot{x}_i$ и пользуясь уравнениями движения, мы получаем в более ранний момент t_0 координаты $x_i^{(0)}, \dot{x}_i^{(0)}$. Очевидно, что координаты $x_i^{(0)}, \dot{x}_i^{(0)}$, будучи выражены через текущие координаты и время t, являются однозначными интегралами движения. Поскольку число начальных координат равно шести, то число независимых интегралов также равно шести. Из этих интегралов можно образовать различные комбинации, которые также являются интегралами движения. Эти комбинации могут иметь больший физический смысл, чем исходные интегралы. В качестве таких комбинаций выбирают обычно энергию системы и три компоненты углового момента. Упомянутые выше интегралы являются обычными первыми интегралами дифференциальных уравнений и рассматриваются во многих учебниках. Рассуждения, сходные с приведенными выше, можно найти, например, в /9/.

III. *Несколько конкретных примеров*

3.1. Трехмерный осциллятор

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{x}_3) + k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = 0.$$

В этом случае имеется шесть независимых интегралов:

$$A_i = x_i \sin\omega_i t + \frac{\dot{x}_i}{\omega_i}\cos\omega_i t,$$

$$B_i = x_i \cos\omega_i t - \frac{\dot{x}_i}{\omega_i}\sin\omega_i t,$$

$$(\omega_i^2 = k_i/m).$$

Из A_i, B_i можно составить три интеграла, не зависящих от времени:

$$E_i = \frac{k_i}{2}(A_i^2 + B_i^2) = \frac{m}{2}\dot{x}_i^2 + \frac{k_i x_i^2}{2}.$$

Остальные три интеграла трансцендентны и в явном виде содержат зависимость от времени t. В дополнение к E_i удобно ввести еще шесть /уже зависимых/ интегралов движения:

$$C_{ik} = A_i A_k + B_i B_k = \left(\frac{\dot{x}_i \dot{x}_k}{\omega_i \omega_k} + x_i x_k\right)\cos(\omega_{ik} t) - \left(\frac{\dot{x}_i}{\omega_i} x_k - \frac{\dot{x}_k}{\omega_k} x_i\right)\sin(\omega_{ik} t),$$

$$D_{ik} = A_i B_k - A_k B_i = \left(\frac{\dot{x}_i \dot{x}_k}{\omega_i \omega_k} + x_i x_k\right)\cdot\sin(\omega_{ik} t) + \left(\frac{\dot{x}_i}{\omega_i} x_k - \frac{\dot{x}_k}{\omega_k} x_i\right)\cos(\omega_{ik} t),$$

$$(\omega_{ik} = \omega_i - \omega_k).$$

Если все осцилляторные константы одинаковы ($k_1=k_2=k_3=k$), то C_{ik}, D_{ik} также явно не зависят от времени:

$$C_{ik} = \frac{\dot{x}_i \dot{x}_k}{\omega^2} + x_i x_k , \quad D_{ik} = \frac{1}{\omega}(\dot{x}_i x_k - \dot{x}_k x_i) .$$

Перенормировав E_i, C_{ik}, D_{ik}, легко убедиться, что алгебра скобок Пуассона, генерируемая E_i, C_{ik}, D_{ik}, изоморфна $SU(3)$. D_{ik} пропорциональны компонентам углового момента, тогда как C_{ik} составляют симметричный тензор.

3.2. В случае произвольного центрального двумерного потенциала для $E<0$ имеем две точки поворота и из уравнений орбиты и траектории /11/ получаем два следующих однозначных интеграла:

$$I_t = \cos\{ 2\pi\frac{t}{\tau} - 2\pi\frac{m}{\tau}\int_{r_0}^{r}\frac{r\,dr}{Z(r)} \} , \qquad /3.2.1/$$

$$I_\phi = \cos\{2\pi\frac{\phi}{\Delta\phi} - 2\pi\frac{L}{\Delta\phi}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\cdot Z(r)} \} , \qquad /3.2.2/$$

где

$$Z(r) = \sqrt{2mr^2(E-V) - L^2} .$$

/E - энергия, L - угловой момент/.

Здесь τ и $\Delta\phi$ - временное и угловое расстояния между двумя соседними минимумами по радиальной координате:

$$\Delta\phi = L\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{dr}{r\cdot Z(r)} , \qquad /3.2.3/$$

$$\tau = m\int_{r_{min}}^{r_{max}}\frac{r\cdot dr}{Z(r)} . \qquad /3.2.4/$$

Величины τ, $\Delta\phi$ было необходимо ввести в /3.2.1/, /3.2.2/, чтобы сделать соизмеримыми временной и угловой периоды траектории τ и орбиты $\Delta\phi$ с периодом тригонометрической функции 2π.

Поскольку I_t, I_ϕ инвариантны, то они равны тем значениям, которые они принимают при $t=t_0$, т.е.

$$I_t = \cos(2\pi\frac{t_0}{\tau}) , \quad I_\phi = \cos(2\pi\frac{\phi_0}{\Delta\phi}) .$$

Таким образом, существуют две инвариантные комбинации координат и времени. Разумеется, эти выражения для I_t, I_ϕ следуют из уравнений орбиты и траектории. Однозначными инвариантами будут и следующие интегралы:

$$t - m\int_{r_0}^{r}\frac{r\,dr}{Z(r)} = t_0 , \qquad /3.2.5/$$

$$\phi - L\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\cdot Z(r)} = \phi_0 , \qquad /3.2.6/$$

при условии корректного соотнесения момента времени t с соответствующим листом римановой поверхности интегралов /3.2.5/ и /3.2.6/. Легко видеть, что стандартное правило /10,11/ обхода точек ветвления позволяет всегда это сделать.

В качестве конкретного примера рассмотрим следующий центральный потенциал:

$$V(r) = -\frac{\gamma}{r} + \frac{\Lambda^2}{2mr^2} .$$

В этом случае для $E<0$ имеем два интеграла:

$$I_\phi = \cos(\frac{2\pi\phi}{\Delta\phi}) + (1 - \frac{L^2+\Lambda^2}{2mr^2})\frac{1}{\epsilon} = \cos(\frac{2\pi\phi_0}{\Delta\phi}) ,$$

$$I_t = \cos(\frac{2\pi t}{\tau} - \xi + \epsilon\cdot\sin\xi) = \cos(\frac{2\pi t_0}{\tau}) ,$$

где

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2E(L^2+\Lambda^2)}{m\gamma^2}} , \quad \cos\xi = (1 + \frac{2rE}{\gamma})\frac{1}{\epsilon} ,$$

причем временной и угловой периоды равны в данном случае

$$\Delta\phi = 2\pi\cdot\frac{L}{\sqrt{L^2+\Lambda^2}}, \quad \tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\cdot\frac{\gamma}{2|E|}.$$

Отметим, что для дискретного набора угловых моментов, удовлетворяющих соотношению

$$\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{L^2}} = \frac{m}{n} \qquad /m, n \text{ - целые}/,$$

орбиты замкнуты.

При $E>0$ инвариант I_ϕ остается прежним, инвариант I_t можно записать в виде

$$I_t = t - \sqrt{\frac{m}{2E}}\,\frac{\gamma}{2E}(\epsilon\,\mathrm{sh}\chi - \chi) = t_0,$$

где

$$\mathrm{ch}\chi = \frac{1}{\epsilon}\left(1+\frac{2Er}{\gamma}\right).$$

В этом случае отсутствуют осложнения, связанные с неоднозначностью интегралов. Угол ϕ полностью определяется радиальной координатой r и не зависит от предыстории системы.

3.3. Здесь мы покажем, что существование вектора Рунге-Ленца для атома водорода вытекает из приведенных в предыдущем пункте инвариантов. Обозначим через θ значение интеграла

$$\theta = L\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r\cdot Z(r)}, \qquad /3.3.1/$$

а через ϕ - полярный угол. Имеем

$$I = \cos(\phi-\theta) = \cos\phi\cdot\cos\theta + \sin\phi\cdot\sin\theta = \frac{x}{r}\cos\theta + \frac{y}{r}\sin\theta =$$

$$= \left[\frac{\vec{r}}{r}\cos\theta + \frac{(\vec{r}\times\vec{L})}{rL}\sin\theta\right]_x =$$

$$= \left[\left(\cos\theta - \frac{L}{Z}\sin\theta\right)\frac{\vec{r}}{r} + (\vec{p}\times\vec{L})\frac{r}{L\cdot Z}\sin\theta\right]_x. \qquad /3.3.2/$$

Но для кулоновского случая

$$\cos\theta - \frac{L}{Z}\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\gamma^2}}},$$

$$\frac{r}{LZ}\sin\theta = \frac{1}{\gamma m}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\gamma^2}}}$$

и, следовательно,

$$I_c = -\frac{1}{\epsilon}\left[\frac{\vec{r}}{r} - \frac{1}{m\gamma}(\vec{p}\times\vec{L})\right]_x, \qquad /3.3.3/$$

что с точностью до стоящего перед квадратными скобками множителя совпадает с третьей компонентой вектора Рунге-Ленца. Если вспомнить, что для центрального потенциала движение всегда происходит в плоскости, то остальные компоненты в трехмерном случае получаются из /3.3.3/ операцией вращения.

Наконец, отметим, что компоненты /3.3.3/ вектора Рунге-Ленца были выписаны в явном виде в первом томе "Небесной механики" Лапласа /12/.

Хотя движение частицы в поле центрального потенциала полностью определяется шестью начальными координатами и уравнениями движения, все же полезно на примере кулоновского потенциала выяснить, какую роль играет каждый из интегралов движения. Именно, направление углового момента определяет плоскость, в которой происходит движение. Энергия E и абсолютная величина углового момента определяют тип и параметры орбиты /в данном случае – эллипс/. Далее, необходимо задать ориентацию орбиты в плоскости движения, т.е. указать, по какому из эллипсов, лежащих в плоскости орбиты и имеющих в своем фокусе силовой центр, происходит движение. Это можно сделать с помощью вектора Рунге-Ленца, задав направление какого-либо элемента орбиты, например, направления главной полуоси. Задача все еще не определена полностью, ибо, хотя известен эллипс, по которому частица движется, но неизвестно, в какой точке эллипса находится в данный момент частица. Эту неопределенность можно устранить, задав момент t прохождения частицей определенного участка орбиты. Тогда положение частицы в текущий момент времени получается обращением соотношения /3.2.1/. Заметим, что радиальная координата является однозначной функцией времени t .

3.4. В этом пункте мы покажем, что алгебраические однозначные интегралы движения типа Рунге-Ленца можно построить, если орбиты замкнуты, что имеет место, если период $\Delta\phi$ составляет рациональную долю 2π:

$$\Delta\phi = \frac{m}{n}\cdot 2\pi .$$

В этом случае имеем:

$$I_n = \cos[(\phi-\theta)n] = \cos n\phi\cdot\cos n\theta + \sin n\phi\cdot\sin n\theta . \qquad /3.4.1/$$

Но $\cos n\phi, \sin n\phi$ являются многочленами от x, y, а $\cos n\theta, \sin n\theta$ являются однозначными, не зависящими явно от времени функциями радиус-вектора частицы r . Интеграл /3.4.1/ ничуть не хуже, чем вектор Рунге-Ленца в кулоновском случае. Следующим по простоте /после кулоновского случая/ примером такого рода является трехмерный изотропный осциллятор, для которого:

$$\Delta\phi = \pi , \quad m = 1 , \ n = 2 .$$

Заменяем в /3.4.1/$\cos 2\phi, \sin 2\phi$ квадратичными комбинациями x ,y и, действуя далее, как и в предыдущем пункте, приходим к известным осцилляторным интегралам движения, которые в явном виде были выписаны в п.3.1. I_n являются компонентами $(2n+1)$-мерного вектора. Алгебра скобок Пуассона, генерируемая I_n /при $n \neq 1$/, изоморфна $SU(n+1)$. Ввиду того, что все I_n обязаны своим существованием интегралу /3.2.2/ /представление при этом оказывается максимально вырожденным/, наличию подобной симметрии не следует придавать слишком много значения. Число n показывает, сколько полных угловых периодов укладывается на интервале $(0,2\pi)$. Одна из компонент I_n /которую можно направить в один из максимумов/ фиксирует ориентацию орбиты в плоскости движения.

Если орбита не замкнута, то однозначные, не зависящие явно от времени интегралы движения, также существуют, но являются трансцендентными функциями координат. Полагая $a = \dfrac{2\pi}{\Delta\phi}$, находим следующие однозначные интегралы движения типа Рунге-Ленца:

$$I_a = \cos a(\phi-\theta) = \cos a\phi\cdot\cos a\theta + \sin a\phi\cdot\sin a\theta . \qquad /3.4.2/$$

Если a иррационально, тогда $\cos a\phi$, $\sin a\phi$ - трансцендентные функции x , y . При этом орбиты равномерно покрывают кольцо с внешним и внутренним радиусами, равными соответственно большему и меньшему нулям знаменателя $Z(r)$. В этом случае интегралам движения I_a труднее придать конкретный физический смысл. Тем не менее соотношение /3.4.2/ показывает, что существуют сохраняющиеся трансцендентные функции координат и импульсов частицы. Алгебра скобок Пуассона при этом оказывается незамкнутой. Несмотря на то, что в этом случае существует бесконечно много интегралов движения, все они являются следствием интеграла /3.4.2/.Интегралы типа Рунге-Ленца должны быть дополнены интегралом /3.2.1/, содержащим время явным образом. Наконец, отметим, что интегралы движения, используемые в данной работе, являются однозначными функциями в отличие от интегралов, приведенных в работах /1-8/.

IV. *Аргументы "за" и "против" существования дополнительных интегралов для квантовой задачи движения частицы в поле произвольного центрального потенциала*

4.1. Основной аргумент против существования дополнительных интегралов состоит в том, что уравнение Шредингера решалось численно для самых различных потенциалов и для них /исключая атом водорода и осциллятор/

не было найдено вырождения уровней энергии, отличного от вырождения по проекции углового момента.

Аргументом "за" служит принцип соответствия между классической и квантовой механикой. Интуитивно кажется очевидным, что при малых значениях константы Планка h мы должны точной симметрии в классической механике сопоставить по крайней мере приближенную симметрию в квантовой механике. Отсутствие подобной симметрии указывает на то, что имеет место сингулярность по константе h. Типичным примером подобного нарушения симметрии является следующий простой пример. Рассмотрим квантовую и классическую задачу движения в поле кулоновского двумерного потенциала. Пусть решение уравнения Шредингера, отвечающее угловому моменту ℓ, имеет вид

$$\Psi_{n\ell} = R_{n\ell} \cdot \exp(i\ell\phi).$$

Тогда плотность вероятности

$$\rho_{n\ell} = |\Psi_{n\ell}|^2 = R^2_{n\ell}(r)$$

сферически-симметрична, что как будто соответствует движению по круговой орбите. Между тем в классической механике существуют как круговые орбиты, так и эллиптические, которым в квантовом случае должно соответствовать распределение плотности, имеющее максимум вблизи эллиптической орбиты. Парадокс устраняется, если, найдя "квантовую" функцию действия из соотношения

$$\Psi = \exp(iS/h),$$

мы поступим в соответствии с рецептом получения уравнения орбиты в классической механике [11], т.е. продифференцируем по орбитальной константе ℓ и положим результат равным другой константе a. Тогда получается следующий результат. При сколь угодно малой /но не равной нулю/ константе h орбиты незамкнуты. Это означает, что частица описывает траекторию типа розетки, т.е. движется по эллипсу, причем сам эллипс поворачивается с угловой скоростью, пропорциональной константе h. Поскольку рассматривается стационарная квантовая задача, то это означает, что распределение $\rho_{n\ell}$

есть результат усреднения по времени орбиты, описываемой частицей за бесконечный промежуток времени. Орбиты, описываемые частицей, равномерно покроют кольцо с внутренним и внешним радиусами, равными соответственно меньшей и большей полуосям эллипса. Результирующее усреднение распределения является очевидно сферически-симметричным. С другой стороны, если h есть точный нуль, то орбита частицы для кулоновского потенциала является замкнутой и постоянна во времени.

Другое возможное решение парадокса состоит в поиске нестационарных решений уравнения Шредингера. Под этим мы понимаем реализацию глубокой идеи Луи де Бройля [14], состоящей в том, чтобы каждому стационарному решению уравнения Шредингера сопоставить решение с движущейся сингулярностью. Простейший пример такого рода составляет уравнение Шредингера для свободной частицы:

$$-ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\,{}^2\,\Psi. \qquad /4.1.1/$$

Стационарное решение имеет вид

$$\Psi_{\text{стац}} = \exp[\frac{i}{h}(E\cdot t - p\cdot z)], \qquad (E = \frac{p^2}{2m}).$$

Легко убедиться, что уравнению /4.1.1/ удовлетворяет также следующее решение с движущейся сингулярностью:

$$\Psi = \exp[\frac{i}{h}(Et - pz)]\cdot\frac{1}{[x^2+y^2+(z-vt)^2]^{1/2}}, \qquad /4.1.2/$$

$$(v = p/m).$$

Интересной задачей, на наш взгляд, является отыскание решений типа /4.1.2/ для простейших потенциалов.

4.2. В этом пункте мы покажем, что проблема нарушения симметрии при переходе от квантовой задачи к классической частично снимается, если допустить существование решений уравнения Шредингера с произвольными нецелыми орбитальными моментами.

В качестве примера рассмотрим потенциал

$$V(r) = -\frac{\gamma}{r} + \frac{h^2\Lambda^2}{2mr^2}. \qquad /4.2.1/$$

Уровни энергии в такой потенциальной яме равны

$$E_{n\ell} = -\frac{m\gamma^2}{2h^2}\frac{1}{[n+\sqrt{\ell^2+\Lambda^2}+\frac{1}{2}]^2}. \qquad /4.2.2/$$

Здесь n - радиальное квантовое число, ℓ - орбитальный момент. При ℓ целых вырождения нет. Легко видеть, однако, что всегда возможно отыскать такую дискретную совокупность ℓ /нецелых/, что волновые функции, отвечающие уровню энергии $E_{n\ell}$, оказываются вырожденными*. Если через N обозначить главное квантовое число

$$(E = -\frac{m\gamma^2}{2h^2(N+1/2)^2}),$$

то допустимые значения ℓ определяются соотношением

$$\ell = \pm\sqrt{(N-n)^2 - \Lambda^2}.$$

Очевидна также аналогия с классическим случаем п.3.2, где орбиты в том же потенциале становятся замкнутыми для нецелых дискретных значений орбитального момента. Использование нецелых угловых моментов при-

*Заметим, что угловая часть уравнения Шредингера допускает решение $Y_{\lambda,\mu}(\theta,\phi)$ при произвольных (λ,μ) и только дополнительное требование однозначности волновых функций на сфере единичного радиуса отбирает решения с целочисленными λ,μ.

водит к осложнениям. Именно, волновые функции перестают быть однозначными:

$$\Psi(\phi) \neq \Psi(\phi + 2\pi).$$

Между тем в классической механике требования целочисленности орбитальных моментов не накладываются так же, как и не требуется, чтобы частица после поворота на угол 2π вернулась в прежнее положение. Наличие подобных дополнительных условий в квантовой механике и отсутствие таковых в классической является одной из причин сужения группы симметрии при переходе от классической механики к квантовой. Отметим также, что понятие интеграла движения в классической и квантовой механике определено по-разному /в первом случае с помощью скобок Пуассона в пространстве 2n переменных, во втором случае - в пространстве n координат с помощью операции коммутирования/. Этого можно избежать, если от уравнения Гамильтона-Якоби для функций действия S перейти подстановкой

$$S \sim h\,\ell n\Psi$$

к уравнению

$$\frac{h^2}{2m}\Sigma\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}\right)^2 + V\cdot\Psi^2 = E\cdot\Psi^2 \qquad /4.2.3/$$

и сравнить преобразования, оставляющие инвариантными уравнение /4.2.3/ и уравнение Шредингера. Можно также воспользоваться обратной подстановкой

$$\Psi = \exp\left(\frac{iS}{h}\right),$$

чтобы перейти от уравнения Шредингера к квантовому уравнению типа Гамильтона-Якоби и сравнить свойства симметрии квантового и классического уравнений. В любом случае мы должны сравнивать свойства симметрии квантового и классического уравнений в одном и том же пространстве.

V. Заключение

Подведем итоги. Для произвольного центрального потенциала всегда существуют "фундаментальные" однозначные интегралы движения /3.3.1/, /3.3.2/. Физическое содержание их состоит в том, что точно шесть констант необходимо, чтобы зафиксировать ориентацию плоскости движения, тип и параметры орбиты, ориентацию орбиты в плоскости движения и положение частицы на орбите. Как следствие существования этих интегралов, получаем:

а/ вектор Рунге-Ленца для атома водорода,

б/ обычные квадратичные осцилляторные интегралы движения,

в/ алгебраические интегралы для замкнутых орбит,

г/ трансцендентные интегралы для незамкнутых орбит.

Итак, имеем следующую альтернативу. Если на уравнения орбиты и траектории, представляющие собой инвариантные в силу уравнений движения соотношения между координатами и временем, смотреть как на интегралы движения, то тогда в силу перечисленных следствий для любого центрального потенциала можно построить дополнительные однозначные /в общем случае трансцендентные/ интегралы движения. Если же "принять закон", согласно которому дополнительные интегралы движения, являющиеся следствиями фундаментальных интегралов, интегралами движения считать не следует, то тогда к интегралам движения не следует причислять вектор Рунге-Ленца для кулоновского потенциала и квадратичные интегралы движения для осцилляторного потенциала.

Как мы упомянули ранее, происхождение этих интегралов обязано тому тривиальному факту, что всегда возможно однозначным образом выразить начальные

координаты частицы через текущие*. Такая тривиализация интегралов движения совпадает с точкой зрения Е.П.Вигнера [13], согласно которой свойства симметрии полезны, во-первых, при отыскании новых законов природы и, во-вторых, как инструмент для нахождения решений уравнений, которые эти законы описывают. Однако, коль скоро известно точное решение задачи, понятие симметрии и интегралов движения становится бессодержательным. На примере точно решаемой модели мы приходим к выводу, что отличие группы симметрии в классическом и квантовом случаях /для движения частицы в поле центрального потенциала/ может быть частично объяснено следующими двумя причинами:

1/ некоторые степени свободы теряются при переходе от непрерывного спектра углового момента и энергии в классической механике к дискретному спектру в квантовой;

2/ отсутствуют известные нестационарные решения уравнения Шредингера, отвечающие связанным состояниям в поле простейших центральных потенциалов.

Автор глубоко благодарен Н.К.Мельникову и М.И.Широкову за полезные обсуждения и критическое чтение рукописи.

Литература

1. Bacry H., Ruegg H., Souriau J.M. Commun. Math. Phys., 1966, 3, 323.
2. Fradkin D.M. Progr. Theor. Phys., 1967, 37, 798.
3. Mukunda N. Phys.Rev., 1967, 155, 1383.
4. Serebrennikov V.B., Shabad A.E. Int. J. Theor.Phys., 1973,7,339.
5. Серебрянников В.Б., Шабад А.Е. ТМФ, 1971, 8, 23.
6. Mariwalla K. Phys.Rep., 1975, C20, 287.

---

* Отсюда вытекает, в частности, существование дополнительных однозначных интегралов движения для случая движения частицы в поле произвольного нецентрального нестатического потенциала. Это наглядно иллюстрируется п. 3.1 настоящей работы. Аналогичное утверждение содержится также в работе [7].

7. Buch L.H., Dehmann M.H. Phys.Rev., 1975, D11, 279.
8. Katzin G.H., Levine J. J.Math.Phys., 1974, 15, 1460.
9. *Картан Э. Интегральные инварианты. ГИТТЛ, М.-Л., 1940.*
10. Gutzwiller M.C. J.Math.Phys., 1967, 8, 1979.
11. *Голдстейн Г. Классическая механика, Наука, М., 1975.*
12. Laplace P.S., Celestial Mechanics, v.1, p.344, Chelsea Publ. Co., N.Y., 1966.
13. Houtapel R.M.F., Van Dam H., Wigner E.P. Rev.Mod.Phys., 1965, 37, 595.
14. Broglie L. Nonlinear Wave Mechanics, Elsevier, Amsterdam, 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 января 1977 года.