СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P2 - 10352

Б.А.Маградзе, В.А.Матвеев

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ МАСС

1976

P2 - 10352

Б.А.Маградзе,* В.А.Матвеев

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ МАСС

* Математический институт АН ГрССР.

Маградзе Б.А., Матвеев В.А. P2 - 10352

Автомодельные решения в конформно-инвариантной теории с непрерывным спектром масс

Исследуются уравнения масштабной и конформной инвариантности для одночастичных матричных элементов произведения локальных скалярных токов в случае теории с непрерывным спектром масс. Получены автомодельные частные решения системы, удовлетворяющие требованиям причинности и спектральности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Magradze B.A., Matveev V.A. P2 - 10352

Automodel Solutions in Conformal Invariant Theory with Continuous Mass Spectrum

The equations expressing conformal invariance for one-particle matrix elements of two scalar current product have been studied in the case of theory with continuous mass spectrum. Automodel solutions satisfying the spectrality and causality conditions have been found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

В настоящей работе получены автомодельные[I] решения уравнений масштабной и конформной инвариантности для одночастичных матричных элементов произведения локальных скалярных токов в случае теории с непрерывным спектром масс. Показано, что полученное в работе[3] общее решение системы удовлетворяет требованиям причинности и спектральности, без ограничения параметров размерностей локальных токов и векторов одночастичных состояний с непрерывной массой. При этом найдены достаточные для выполнения этих требований условия для произвольной функции, определяющей данное решение. В зависимости от значения размерностей соответствующие решению спектральные функции в представлении Дайсона относятся к разным автомодельным классам, введенным в работах[I], [4].

Рассмотрим систему уравнений масштабной и конформной инвариантности для безразмерной величины Φ, определяющей матричные элементы произведения скалярных токов между состояниями скалярных частиц с непрерывной массой[3]:

$$\begin{aligned}
&z_2(\Phi_{11}+\Phi_{22}+\Phi/4)+2z_1\Phi_{12}+2\omega\Phi_{23}+\\
&\quad+2\eta(\Phi_{41}+\Phi_{42})-2\zeta(\Phi_{51}-\Phi_{52})+2\ell\Phi_2=0,\\[2ex]
&\Phi_{11}+\Phi_{22}+\Phi/4+2\Phi_{12}+2(z_1-z_2)\Phi_{13}+2(\omega+\zeta)\Phi_{33}+\\
&\quad+4\zeta\Phi_{35}+2\ell\Phi_3-2\eta\Phi_{44}-2(\ell-1)\Phi_4=0,\\[2ex]
&\Phi_{11}+\Phi_{22}+\Phi/4-2\Phi_{12}+2(z_1+z_2)\Phi_{13}+2(\omega+\eta)\Phi_{33}+\\
&\quad+4\eta\Phi_{34}+2\ell\Phi_3-2\zeta\Phi_{55}-2(\ell-1)\Phi_5=0,
\end{aligned} \tag{I}$$

где

$$f(x,p,p')=\langle p|X(x)X(0)|p'\rangle=(-x^2-i\varepsilon x_0)^{\ell-d}e^{iz_2/2}\Phi(z_1,z_2,w,\eta,\zeta), \qquad (2)$$

$$z_1=x(p+p'),\ z_2=x(p-p'),\ w=p\cdot p'x^2,\ \eta=p^2x^2/2,\ \zeta=p'^2x^2/2,$$

$$\Phi_i=\frac{\partial\Phi}{\partial z_i},\quad \Phi_{ij}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_i\partial z_j},\quad z_3=w,\ z_4=\eta,\ z_5=\zeta,$$

d – размерность тока X , $\ell>1$ – размерность векторов одночастичных состояний.

Наиболее общий вид функции $f(x,p,p')$, учитывающей причинность и спектральность, был получен в работе /2/ на основе представления Дайсона–Йоста–Лемана (ДИЛ):

$$f(x,p,p')=\frac{e^{\frac{i}{2}x(p-p')}}{(2\pi)^3}\int\limits_{|u_0'|+|\vec{u}|\le a}du'e^{iu'x}\int\limits_0^\infty d\lambda^2\lambda^2\frac{K_1\left(\sqrt{(-x^2-i\varepsilon x_0)\lambda^2}\right)}{\sqrt{(-x^2-i\varepsilon x_0)\lambda^2}}\cdot \psi(u',\lambda^2,P,\Delta), \qquad (3)$$

где $P=(p+p')/2=(a,0,0,0)$, $\Delta=(p-p')/2=(p_0-p_0',0,0,2p_3)$,

ψ – весовая функция представления ДИЛ. В силу размерного анализа для величины ψ имеем:

$$\psi(u',\lambda^2,P,\Delta)=a^{2(d-\ell-4)}\tilde{\psi}\left(\vec{\mu}_\perp^{\,2},\mu_0,\mu_3,\tau,\frac{p^2}{(p\cdot p')},\frac{p'^2}{(p\cdot p')}\right),$$

где $\mu_b=u_b'/a$, $\tau=\lambda^2/a^2$.

Ограничимся следующим классом весовых функций:

$$\tilde{\psi}(\mu,\tau,p,p')=\delta(\vec{\mu}_\perp)\psi_0(\mu_0,\mu_3,\tau,p,p');$$

безразмерная функция Φ в этом специальном классе с учетом формул (2), (3) представима в виде

$$\Phi=\int du_1du_2\,e^{iu_1z_1+iu_2z_2}\tilde{\Phi}(u_1,u_2,w,\eta,\zeta) \qquad (4)$$

$$\left|u_1+\frac{\eta-\zeta}{\eta+\zeta+w}u_2\right|+\frac{\sqrt{w^2-4\eta\zeta}}{\eta+\zeta+w}|u_2|<\frac{1}{2}, \qquad (5)$$

где

$$\tilde{\Phi}=\frac{4}{(2\pi)^3}\frac{\sqrt{w^2-4\eta\zeta}}{\eta+\zeta+w}\left[-\frac{\eta+\zeta+w}{2}\right]^{d-\ell}\int\limits_0^\infty d\tau\,\tau\frac{K_1\left(\sqrt{-(\eta+\zeta+w)\tau/2}\right)}{\sqrt{-(\eta+\zeta+w)\tau/2}}\psi_0,$$

$$u_1=\left(\mu_0-\frac{\eta-\zeta}{\sqrt{w^2-4\eta\zeta}}\cdot\mu_3\right)/2,\quad u_2=\frac{\eta+\zeta+w}{2\sqrt{w^2-4\eta\zeta}}\cdot\mu_3.$$

Учитывая очевидные соотношения

$$\left|\frac{\eta-\zeta}{\eta+\zeta+w}\right|=\left|\frac{(p-p')_0}{(p+p')_0}\right|<1,\quad \left|\frac{\sqrt{w^2-4\eta\zeta}}{\eta+\zeta+w}\right|=\frac{2|p_3|}{(p+p')_0}<1,$$

легко показать, что для выполнения неравенства (5) достаточно ограничить носитель функции $\tilde{\Phi}$ внутри области:

$$|u_1|+|u_2|<1/2. \qquad (6)$$

В силу эрмитовости токов

$$\tilde{\Phi}^*(u_1,u_2,w,\eta,\zeta)=\tilde{\Phi}(u_1,-u_2,w,\zeta,\eta). \qquad (7)$$

Ниже мы будем предполагать, что величина $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет условиям

$$\tilde{\Phi}(u_1,u_2,w,\eta,\zeta)=\tilde{\Phi}(-u_1,-u_2,w,\eta,\zeta), \qquad (8)$$

$$\tilde{\Phi}(u_1,u_2,w,\eta,\zeta)=0,\ \text{если}\ |u_1|+|u_2|\ge 1/2, \qquad (6')$$

которые обеспечивают требования причинности/2/, а также спектральности. Подставим выражение (4) с учетом неравенства (6) в систему уравнений (I). В результате получим уравнения для фурье-образа $\tilde{\Phi}$:

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}-u_1^2-u_2^2\right)\tilde{\Phi}_2-u_1u_2\tilde{\Phi}_1+u_2w\tilde{\Phi}_3+\eta(u_1+u_2)\tilde{\Phi}_4-\\
&\qquad-\zeta(u_1-u_2)\tilde{\Phi}_5+(\ell-2)u_2\tilde{\Phi}=0,\\
&(w+\zeta)\tilde{\Phi}_{33}+(\ell-1)\tilde{\Phi}_3+2\zeta\tilde{\Phi}_{35}-u_1(\tilde{\Phi}_{13}-\tilde{\Phi}_{23})-\eta\tilde{\Phi}_{44}-\\
&\qquad-(\ell-1)\tilde{\Phi}_4-\tfrac{1}{2}\left[(u_1+u_2)^2-1/4\right]\tilde{\Phi}=0,\\
&(w+\eta)\tilde{\Phi}_{33}+(\ell-1)\tilde{\Phi}_3+2\eta\tilde{\Phi}_{34}-u_1(\tilde{\Phi}_{13}+\tilde{\Phi}_{23})-\zeta\Phi_{55}-\\
&\qquad-(\ell-1)\tilde{\Phi}_5-\frac{[(u_1-u_2)^2-1/4]}{2}\tilde{\Phi}=0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Общее решение первого уравнения системы (9) дается выражением

$$\tilde{\Phi}(u_1,u_2,w,\eta,\zeta)=u_1^{\ell-2}H(y_2,y_3,y_4,y_5),$$

где

$$y_2=\frac{(u_1+\frac{1}{2})^2-u_2^2}{(u_1-\frac{1}{2})^2-u_2^2},\quad y_3=u_1w,\quad y_4=\left(\tfrac{1}{4}-(u_1+u_2)^2\right)\eta,\quad y_5=\left(\tfrac{1}{4}-(u_1-u_2)^2\right)\zeta.$$

Подставляя это решение в остальные два уравнения системы (9), приходим к системе уравнений для величины H :

$$
\begin{aligned}
&\frac{y_5(y_2-1)^2}{y_2}H_{33}+\frac{2y_5(y_2^2-1)}{y_2}H_{35}-2(y_2-1)^2H_{23}-\\
&\qquad-4y_4H_{44}-4(\ell-1)H_4+2H=0,
\end{aligned}
\tag{I0}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{y_4(y_2-1)^2}{y_2}H_{33}+\frac{2y_4(y_2^2-1)}{y_2}H_{34}-2(y_2-1)^2H_{23}-\\
&\qquad-4y_5H_{55}-4(\ell-1)H_5+2H=0.
\end{aligned}
$$

Изучим сначала поведение величины H в пределе нулевой массы, когда $y_4, y_5 \to 0$, $\ell\to 1$. В предположении, что функция H вместе с производными непрерывна в этом пределе, для системы (I0) получим уравнение

$$(y_2-1)^2\frac{\partial^2 H}{\partial y_2\partial y_3}-H=0.$$

После замены переменных

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y\partial y'}-H=0, \tag{II}$$

$$y=\frac{y_2}{1-y_2},\quad y'=y_3.$$

Изменение переменных y_2 и y внутри области (6) показано на рисунках I и 2. Регулярное решение уравнения (II), удовлетворяющее требованию спектральности (6′), дается выражением

$$H(y,y')=\int_0^y\varphi(t)I_0\left(2\sqrt{y'(y-t)}\right)dt, \tag{I2}$$

где $I_0(z)$ - модифицированная функция Бесселя, а функция $\varphi(t)$ имеет свойства

$$\varphi(t)\underset{t\to 0}{\sim} t^{\gamma},\ \gamma>0,\qquad \int_0^\infty\varphi(t)dt=0. \tag{I3}$$

Далее легко проверить, что выражение

$$\theta(y)H(y,y')-\theta(-1-y)H(-1-y,-y')$$

удовлетворяет уравнению (II), а также требованию причинности (8). Свойство (7) приводит к условию $\varphi^*(t)=\varphi(t)$.

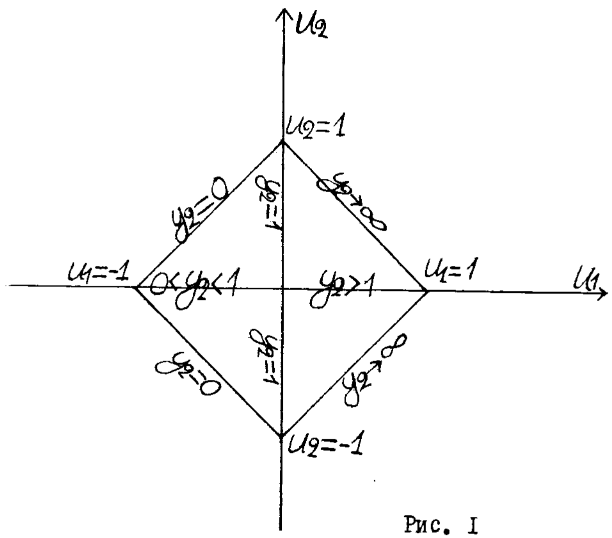

Рис. I

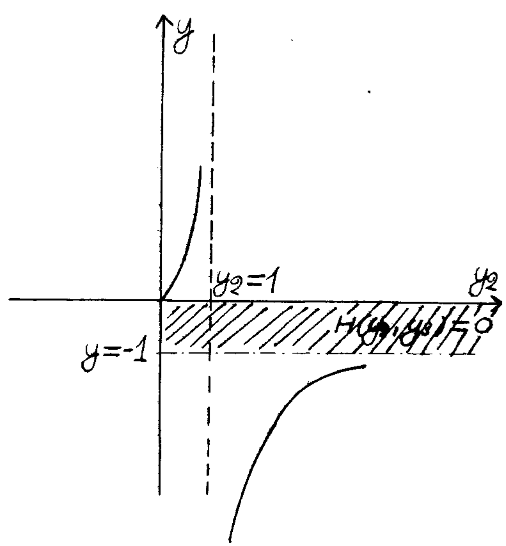

Рис. 2

Выпишем окончательный вид решения для величины Φ :

$$\Phi(z_1,z_2,w)= \int\limits_0^{1/2}\frac{du_1}{u_1}\cos(u_1 z_1)\int\limits_{-(\frac{1}{2}-u_1)}^{(\frac{1}{2}-u_1)} du_2\, e^{iu_2 z_2}\int\limits_0^{\frac{(u_1-1/2)^2-u_2^2}{2u_1}}\varphi(t)\, I_0\left(2\sqrt{-wu_1\left[\frac{(u_1-1/2)^2-u_2^2}{2u_1}-t\right]}\right)dt.$$

Заметим, что полученное решение растет неполиномиально при больших отрицательных x^2 .

Будем искать частное решение системы уравнений (I0), не зависящее от переменной y_3 . Пусть $H=\overline{H}(y_2,y_4,y_5)$. Тогда система (I0) значительно упрощается:

$$y_4\overline{H}_{44}+(\ell-1)\overline{H}_4-\frac{1}{2}\overline{H}=0,$$

$$y_5\overline{H}_{55}+(\ell-1)\overline{H}_5-\frac{1}{2}\overline{H}=0.$$

Решение данной системы имеет вид

$$\overline{H}=(-2y_4)^{\frac{2-\ell}{2}}(-2y_5)^{\frac{2-\ell}{2}}Z_{\ell-2}(\sqrt{-2y_4})Z'_{\ell-2}(\sqrt{-2y_5})f(y_2),$$

где Z_ν , Z'_ν – функции Бесселя. Положим, что $Z_{\ell-2}=H^{(1)}_{\ell-2}$ и $Z'_{\ell-2}=H^{(2)}_{\ell-2}$. Ограничив произвольную функцию $f(y_2)$, свойствам (6'), (7), (8) легко удовлетворить. Однако решение при больших времениподобных x^2 не удовлетворяет требованию полиномиальной ограниченности.

Общее решение системы (I0) будем искать в виде интеграла Фурье:

$$H(y_2,y_3,y_4,y_5)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dV_3\,dV_4\,dV_5\, e^{iV_3y_3+iV_4y_4+iV_5y_5}\cdot\widetilde{H}(V_2,V_3,V_4,V_5), \tag{I4}$$

$$V_2=y_2.$$

Для фурье-образа $\tilde{H}$ получим:

$$\frac{V_3(V_2-1)}{V_2}\Big[(V_2-1)V_3+2(V_2+1)V_5\Big]\tilde{H}_5-4V_4^2\tilde{H}_4+2(V_2-1)^2V_3\tilde{H}_2+$$
$$+\left[\frac{2(V_2^2-1)}{V_2}V_3+4(\ell-3)V_4+2i\right]\tilde{H}=0,$$

$$\frac{V_3(V_2-1)}{V_2}\Big[(V_2-1)V_3+2(V_2+1)V_4\Big]\tilde{H}_4-4V_5^2\tilde{H}_5+2(V_2-1)^2V_3\tilde{H}_2+ \qquad (15)$$
$$+\left[\frac{2(V_2^2-1)V_3}{V_2}+4(\ell-3)V_5+2i\right]\tilde{H}=0.$$

Решив систему уравнений (I5) и подставив найденное решение[3] в формулы (I4) и (4), выпишем окончательный вид решения для величины φ:

$$\varphi(z_1,z_2,w,\eta,\zeta)=\int\limits_{|u_1|+|u_2|<1/2}du_1du_2\,e^{iu_1z_1+iu_2z_2}\,u_1^{\ell-2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dV_3dV_4dV_5\,\cdot$$
$$\cdot\exp\Big\{iV_3u_1w+iV_4\big[\tfrac{1}{4}-(u_1+u_2)^2\big]\eta+iV_5\big[\tfrac{1}{4}-(u_1-u_2)^2\big]\zeta\Big\}\cdot$$
$$\cdot\frac{4V_2}{(V_2-1)^2}\left(V_3^2-\frac{4V_2}{(V_2-1)^2}\cdot V_4V_5\right)^{\ell-3}\exp\left\{\frac{i}{2V_3}\cdot\frac{V_2+1}{V_2-1}\right\}F(\alpha,\beta), \qquad (16)$$

где

$$\alpha=V_3,\qquad \beta=\frac{1}{V_2}\cdot\frac{\left[V_3+\frac{2V_2}{V_2-1}V_4\right]\left[V_3+\frac{2V_2}{V_2-1}V_5\right]}{\left[V_3+\frac{2}{V_2-1}V_4\right]\left[V_3+\frac{2}{V_2-1}V_5\right]}.$$
$$V_2=y_2,$$

В силу ограничений (7) и (8) произвольная функция $F(\alpha,\beta)$ имеет свойства симметрии[3]

$$F^*(\alpha,\beta)=F(-\alpha,\beta),$$
$$F(-\alpha,1/\beta)=(-1)^{\ell-2}F(\alpha,\beta).$$

Важно заметить, что на границе области (6) функция $\beta(V_2,V_3,V_4,V_5)$ стремится к величинам, не зависящим от переменных V_i:
$\beta(V_2\to 0)\to\infty$, $\beta(V_2\to 1)\to 1$, $\beta(V_2\to\infty)\to 0$.
Следовательно, свойство спектральности (6′) легко выполнить, ограничив величину $F(\alpha,\beta)$ условием: $|F(\alpha,\beta)|\to 0$ при $|\beta|\to 0$, $\beta\to 1$ и $|\beta|\to\infty$.

Для фурье-образа коммутатора токов с учетом решения (I6) получим:

$$f_k(q,p,p')=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\,e^{-iqx}\langle p|[\chi(\tfrac{x}{2}),\chi(-\tfrac{x}{2})]|p'\rangle$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4x\,e^{-iqx}f_s(x^2)\,\varphi(z_1,z_2,w,\eta,\zeta)=$$
$$=\frac{i}{(2\pi)^3}\int du_1du_2dV_3dV_4dV_5\,u_1^{\ell-2}\frac{4V_2}{(V_2-1)^2}\left(V_3^2-\frac{4V_2V_4V_5}{(V_2-1)^2}\right)^{\ell-3}\cdot \qquad (17)$$
$$\cdot\, e^{\frac{i}{2V_3}\left[\frac{V_2+1}{V_2-1}\right]}F(\alpha,\beta)\,J_s(q,p,p',u_1,u_2,V_3,V_4,V_5).$$

Здесь

$$f_s(x^2)=\begin{cases}2i\pi\,\varepsilon(x_0)(x^2)^s\theta(x^2), & s\neq-1,-2,\\ 2i\pi\,\varepsilon(x_0)\delta(x^2), & s=-1,\\ -\frac{8i\pi}{(-s-2)!}2^{-2s-2}(-\Box)^{-s-2}\frac{\varepsilon(x_0)\delta(x^2)}{x^2} & s=-2,-3\cdots,\end{cases}$$

$$s=\ell-\alpha,$$

$$J_s=\frac{1}{2\pi i}\int d^4x\,\exp\Big\{i\big(-q+(p+p')u_1+(p-p')u_2\big)x+i\big[u_1V_3(pp')+$$
$$+\big(\tfrac{1}{4}-(u_1+u_2)^2\big)V_4p^2+\big(\tfrac{1}{4}-(u_1-u_2)^2\big)V_5p'^2\big]x^2\Big\}\,f_s(x^2).$$

Вычисляя интеграл $\mathcal{J}_S$ (см. приложение I) и подставляя его значение в формулу (I7), имеем:

$$f_k(q,p,p')=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{|u_1|+|u_2|<\frac{1}{2}} du_1 du_2\, \mathcal{E}(Q_0)\int_{-\infty}^{\infty} dV_3 dV_4 dV_5 \Big\{\sum_{n=0}^{-S-2} C_n^{-S}(-i\beta)^n (Q_+^2)^{-S-2-n} +$$

$$+(-i\beta)^{-S-1}\delta(Q^2)\, u_1^{\ell-2}\frac{4V_2}{(V_2-1)^2}\Big(V_3^2-\frac{4V_2V_4V_5}{(V_2-1)^2}\Big)^{\ell-3} e^{\frac{i}{2V_3}\left[\frac{V_2+1}{V_2-1}\right]} F(\alpha,\beta) \tag{I8}$$

$$S=-1,-2,\cdots$$

$$f_k(q,p,p')=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{|u_1|+|u_2|<1/2} du_1 du_2\, \mathcal{E}(Q_0)\int dV_3 dV_4 dV_5 \Big\{\frac{\delta(Q^2)}{(\beta+i0)^{S+1}} -$$

$$-\frac{\theta(Q^2)}{Q^2}\frac{e^{-\frac{iQ^2}{8\beta}}}{(\beta+i0)^{S+1}} M_{S+1,\frac{1}{2}}\Big(\frac{iQ^2}{4\beta}\Big)\Big\} u_1^{\ell-2}\frac{4V_2}{(V_2-1)^2}\Big(V_3^2-\frac{4V_2V_4V_5}{(V_2-1)^2}\Big)^{\ell-3} e^{\frac{i}{2V_3}\left[\frac{V_2+1}{V_2-1}\right]}\cdot \tag{I9}$$

$$\cdot F(\alpha,\beta),$$

$$S\neq -1,-2\cdots$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$Q=-q+(p+p')u_1+(p-p')u_2,$$

$$\beta=u_1V_3(pp')+\Big[\tfrac{1}{4}-(u_1+u_2)^2\Big]V_4p^2+\Big[\tfrac{1}{4}-(u_1-u_2)^2\Big]V_5p'^2,$$

$$C_n^k=\frac{2^{-2(k-n-1)}}{(k-n-2)!}\binom{k-1}{n}.$$

$M_{S+1,\frac{1}{2}}(z)$ – функция Уиттекера. При целых значениях $S=n$ имеем:

$$M_{n+1/2,1/2}(z)=\frac{e^{\frac{1}{2}z}}{2\cdot 3\cdots(n+1)}\frac{d^n}{dz^n}\Big\{z^{n+1}e^{-z}\Big\},\quad n=0,1,2\cdots$$

Соответствующие выражениям (I8) и (I9) весовые функции представления ДЙ имеют вид

$$\psi(\lambda^2,u_0',u_3',p,p')=\int dV_3dV_4dV_5\Big\{\sum_{n=0}^{-S-2}C_n^{-S}(-i\beta)^n(\lambda_+^2)^{-S-2-n}+$$

$$+(-i\beta)^{-S-1}\delta(\lambda^2)\Big\}u_1^{\ell-2}\frac{4V_2}{(V_2-1)^2}\Big(V_3^2-\frac{4V_2V_4V_5}{(V_2-1)^2}\Big)^{\ell-3}e^{\frac{i}{2V_3}\left[\frac{V_2+1}{V_2-1}\right]}F(\alpha,\beta), \tag{20}$$

$$S=-1,-2,\cdots$$

$$\psi(\lambda^2,u_0',u_3',p,p')=$$

$$=\int dV_3dV_4dV_5\Big\{\frac{\delta(\lambda^2)}{(\beta+i0)^{S+1}}-\frac{\theta(\lambda^2)(S+1)}{\lambda^2(\beta+i0)^{S+1}}M_{S+1,\frac{1}{2}}\Big(\frac{i\lambda^2}{4\beta}\Big)\Big\}\cdot \tag{21}$$

$$\cdot u_1^{\ell-2}\frac{4V_2}{(V_2-1)^2}\Big(V_3^2-\frac{4V_2V_4V_5}{(V_2-1)^2}\Big)^{\ell-3}\exp\Big\{\frac{i}{2V_3}\cdot\frac{V_2+1}{V_2-1}\Big\}F(\alpha,\beta),\quad S\neq-1,-2\cdots$$

где

$$u_0'=-(p+p')_0u_1-(p-p')_0u_2,$$

$$u_3'=-2p_3\cdot u_2.$$

Очевидно, что функции (20) относятся к классу, введенному в работе [I], а функции (2I) позволяют выделение квазиасимптотической части [4]. Справедливость этого утверждения непосредственно следует из асимптотического (в смысле квазиасимптотик) представления:

$$\psi(\lambda^2,u_0',u_3',p,p')\underset{\lambda^2\to+\infty}{\simeq}4^{S+2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(S+n+1)}{n!}(\lambda_+^2)^{-(n+S+2)}\cdot$$

$$\int dV_3dV_4dV_5\Big[4i\Big(u_1V_3(pp')+\Big[\tfrac{1}{4}-(u_1+u_2)^2\Big]V_4p^2+\Big[\tfrac{1}{4}-(u_1-u_2)^2\Big]V_5p'^2\Big)\Big]^n\cdot$$

$$\cdot u_1^{\ell-2}\frac{4V_2}{(V_2-1)^2}\Big(V_3^2-\frac{4V_2V_4V_5}{(V_2-1)^2}\Big)^{\ell-3}e^{\frac{i}{2V_3}\left[\frac{V_2+1}{V_2-1}\right]}F(\alpha,\beta).$$

Авторы выражают глубокую благодарность А.Н.Тавхелидзе за обсуждения работы и ценные замечания, Э.Вицореку, Дж.Гвазава, А.Квинихидзе и Д.Робашику за обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Вычислим необходимый четырехмерный интеграл:

$$J_s = \int d^4x\, e^{iqx + i\alpha x^2} f_s(x^2)\,; \tag{I.I}$$

$$f_s(x^2) = \begin{cases} \varepsilon(x_0)\theta(x^2)(x^2)^s, & s \neq -1, -2 \cdots, \quad \text{(I.2)} \\ \varepsilon(x_0)\delta(x^2), & s = -1, \\ (-\Box)^{-2-s}\dfrac{\varepsilon(x_0)\delta(x^2)}{x^2}, & s = -2, -3, \quad \text{(I.3)} \end{cases}$$

которой всегда будем считать пределом аналитической функции по параметру α. В случае (I.2) имеем:

$$J_s = \int d^4x\, e^{iqx + i\alpha x^2}\varepsilon(x_0)\theta(x^2)(x^2)^s = \int_0^\infty dy\, y^s e^{i\alpha y}\int d^4x\, \varepsilon(x_0)\delta(x^2-y)e^{iqx} =$$

$$= \int_0^\infty dy\, y^s e^{i\alpha y} D(q^2, y) = (2\pi)^2 i\,\varepsilon(q_0)\Big\{\delta(q^2)\int_0^\infty dy\, y^s e^{i\alpha y} -$$

$$- \frac{\theta(q^2)}{2\sqrt{q^2}}\int_0^\infty dy\, y^{s+\frac{1}{2}} e^{i\alpha y} J_1\big(\sqrt{yq^2}\big)\Big\} =$$

$$= (2\pi)^2 e^{\frac{i\pi s}{2}}\Gamma(s+1)\varepsilon(q_0)\Big\{\frac{\delta(q^2)}{(\alpha+i0)^{s+1}} - \frac{\theta(q^2)(s+1)}{(\alpha+i0)^{s+1}} e^{-\frac{iq^2}{8\alpha}} M_{s+1,\frac{1}{2}}\Big(\frac{iq^2}{4\alpha}\Big)\Big\}.$$

Здесь мы воспользовались формулой (6.643) справочника /5/. (В случае (I·3) в тексте сделано приближение):

$$\frac{8\pi i}{(k-2)!\,2^{2k-2}}(-\Box)^{k-2}\frac{\varepsilon(x_0)\delta(x^2)}{x^2} \simeq 2i\pi\,\varepsilon(x_0)\,\delta^{(k-1)}(x^2),$$

что справедливо с точностью до членов, асимптотически убывающих в автомодельной области. Следовательно:

$$J_s = \int d^4x\, e^{iqx + i\alpha x^2}\delta^{(-s-1)}(x^2)\,\varepsilon(x^0) =$$

$$= \int d^4x\, e^{iq\cdot x}\varepsilon(x_0)\sum_{n=0}^{-s-1}(-i\alpha)^n\delta^{(-s-n-1)}(x^2)\binom{-s-1}{n} =$$

$$= 4i\pi^2\varepsilon(q_0)\Big\{\sum_{n=0}^{-s-2} C_n^k(-i\alpha)^n(q^2)^{-s-n-2}\theta(q^2) + (-i\alpha)^{-s-1}\delta(q^2)\Big\}.$$

Здесь учтены соотношения

$$\int d^4x\, e^{iqx}\varepsilon(x_0)\delta(x^2) = 4i\pi^2\delta(q^2)\varepsilon(q_0),$$

$$\int d^4x\, e^{iqx}\varepsilon(x_0)\delta^{(k)}(x^2) = \frac{4i\pi^2 2^{-2k}}{(k-1)!}(q^2)^{k-1}\theta(q^2)\varepsilon(q_0).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Решения систем конформной и масштабной инвариантности типа (I) удобно искать в виде разложения по собственным функциям операторов специальных конформных преобразований. Для примера рассмотрим амплитуду в конформно-инвариантной теории с непрерывным спектром масс /3/:

$$F(p, p', \ell, \ell') = \langle p, \ell | \chi(0) | p', \ell' \rangle,$$
$$p^2 > 0, \quad p'^2 > 0, \quad \ell, \ell' > 1;$$

χ – скалярный ток с размерностью d. Выпишем уравнения конформной и масштабной инвариантности для величины F.

$$\{ O_{K_\mu}(p') + O_{\bar{K}_\mu}(p) \} F(p,p') = 0, \tag{2.1}$$

$$\{ O_D(p') + O_{\bar{D}}(p') - id \} F(p,p') = 0, \tag{2.2}$$

где

$$O_{K_\mu}(p) = -O_{\bar{K}_\mu}(p) = p_\mu \partial^\nu \partial_\nu - 2(\ell + p^\nu \partial_\nu)\partial_\mu ,$$
$$O_D(p) = O_{\bar{D}}(p) = i(\ell + p_\mu \partial^\mu).$$

Собственные функции операторов O_{K_μ} совпадают с бесселевскими функциями[6]:

$$R(p,h) = R_\ell(p \cdot h) = (p \cdot h)^{-\frac{2\ell-1}{2}} J_{2\ell-1}(2\sqrt{(p \cdot h)}) .$$

Величину F будем искать в виде интеграла:

$$F(p,p';\ell,\ell') = \int d^4h\, d^4h' \, \tilde{F}(h,h') R_\ell(p \cdot h) R_{\ell'}(p' \cdot h) .$$

С учетом уравнений (2.I) и (2.2) находим точный вид функций $\tilde{F}$:

$$\tilde{F}(h,h') = (-h^2 - i\varepsilon h_0)^{\frac{\ell+\ell'-d-4}{2}} \delta(h-h') .$$

Окончательно:

$$F(p,p') = \int d^4h (-h^2 - i\varepsilon h_0)^{\frac{\ell+\ell'-d-4}{2}} (p \cdot h)^{\frac{1}{2}-\ell} (p' \cdot h)^{\frac{1}{2}-\ell'} J_{2\ell-1}(2\sqrt{ph}) J_{2\ell'-1}(2\sqrt{p'h}) .$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Требование масштабной и конформной инвариантности, сформулированное для весовых функций представления ДИЛ, приводит к дифференциальной краевой задаче в частных производных. Ограничение на носитель весовой функции соответствует определенному краевому условию.

Рассмотрим систему (I) в случае частиц с нулевой массой, когда $p^2 = p'^2 = 0$ и $\ell = 1$[2]:

$$\begin{aligned} &z_2 (H_{11} + H_{22} + \tfrac{1}{4} H) - 4 z_2 z_3 H_{33} + 2(z_3 - z_1^2 - z_2^2) H_{23} - 4 z_2 H_3 + \\ &\qquad + 2H_2 = 0 , \\ &H_{11} + H_{22} + \tfrac{1}{4} H - 4(z_3 H_{33} + H_3) + 4(z_1 - z_2) H_{23} + 2H_{12} = 0 , \\ &H_{11} + H_{22} + \tfrac{1}{4} H - 4(z_3 H_{33} + H_3) - 4(z_1 + z_2) H_{23} - 2H_{12} = 0 , \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $z_1 = (p+p')x$, $z_2 = (p-p')x$, $z_3 = z_1^2 - z_2^2 - 2w$, $w = (pp')x^2$.

В работе[2] на основе представления ДИЛ в специальном классе весовых функций вида

$$\Psi(u,p,\Delta,\lambda^2) = f_\beta(\lambda^2) \Psi_0(u,p,\Delta) ,$$

где $f_\beta(\lambda^2) = \dfrac{(\lambda^2)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$,

было получено представление для величины H :

$$H(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{d\mu_0\, d\mu_3\, d\mu_\perp^2\, e^{\frac{i}{2}(\mu_0 z_1 - \mu_3 z_2)} J_0(\frac{1}{2}\mu_\perp \sqrt{z_3}) \Psi_0(\mu_0,\mu_3,\mu_\perp^2)}{|\mu_0| + \sqrt{\mu_3^2 + \vec{\mu}_\perp^2}} . \tag{3.2}$$

Подставим выражение (3.2) в систему уравнений (3.I). Далее, используя соотношения для функций Бесселя J_0

$$z_3 J_0\left(\frac{\mu_\perp}{2}\sqrt{z_3}\right) = -4\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu_\perp^2} + \frac{1}{\mu_\perp}\frac{\partial}{\partial\mu_\perp}\right) J_0\left(\frac{1}{2}\mu_\perp\sqrt{z_3}\right),$$

$$\left(z_3\frac{\partial^2}{\partial z_3^2} + \frac{\partial}{\partial z_3}\right) J_0\left(\frac{1}{2}\mu_\perp\sqrt{z_3}\right) = -\frac{\mu_\perp^2}{16} J_0\left(\frac{1}{2}\mu_\perp\sqrt{z_3}\right),$$

а также учитывая граничные условия

$$\Psi_0(\mu) = 0, \quad \frac{\partial^k}{\partial\mu_k}\Psi_0(\mu) = 0, \quad \text{если} \quad |\mu_0| + \sqrt{\mu_3^2+\mu_\perp^2} \geq 1, \tag{3.3}$$

приходим к следующей системе уравнений для величины $\Psi_0(\mu)$:

$$[(\mu_0-\mu_3)^2-\mu_\perp^2-1]\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\mu_\perp^2} - 2\mu_\perp\mu_3\left(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\mu_\perp\partial\mu_0} + \frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\mu_\perp\partial\mu_3}\right) + \frac{[(\mu_0-\mu_3)^2-7\mu_\perp^2-1]}{\mu_\perp}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\mu_\perp} -$$
$$- 4\mu_3\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\mu_0} + \frac{\partial\Psi_0}{\partial\mu_3}\right) - 8\Psi_0 = 0,$$

$$[(\mu_0+\mu_3)^2-\mu_\perp^2-1]\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\mu_\perp^2} + 2\mu_\perp\mu_3\left(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\mu_\perp\partial\mu_0} - \frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\mu_\perp\partial\mu_3}\right) + \frac{[(\mu_0+\mu_3)^2-7\mu_\perp^2-1]}{\mu_\perp}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\mu_\perp} +$$
$$+ 4\mu_3\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial\mu_0} - \frac{\partial\Psi_0}{\partial\mu_3}\right) - 8\Psi_0 = 0,$$

$$\mu_3\mu_\perp\left(\frac{\partial^3\Psi_0}{\partial\mu_\perp\partial^2\mu_0^2} + \frac{\partial^3\Psi_0}{\partial\mu_\perp\partial^2\mu_3^2}\right) - (\mu_0^2+\mu_3^2-\mu_\perp^2-1)\frac{\partial^3\Psi_0}{\partial\mu_\perp^2\partial\mu_3} - \mu_3\mu_\perp\frac{\partial^3\Psi_0}{\partial\mu_\perp^3} +$$
$$+ 2\mu_3\left(\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\mu_0^2} + \frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\mu_3^2}\right) - 5\mu_3\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\mu_\perp^2} - \frac{\mu_0^2+\mu_3^2-7\mu_\perp^2-1}{\mu_\perp}\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial\mu_\perp\partial\mu_3} - \frac{3\mu_3}{\mu_\perp}\frac{\partial\Psi_0}{\partial\mu_\perp} +$$
$$+ 8\frac{\partial\Psi_0}{\partial\mu_3} = 0. \tag{3.4}$$

Проверим, что полученное в работе /2/ частное решение (см. формулу (4.23) в работе /2/) удовлетворяет системе (3.4). Действительно, для решения вида $\Psi_0(\mu) = \delta(\mu_3)X(\mu_0,\mu_\perp)$ система (3.4) после несложных преобразований сводится к уравнениям

$$\delta(\mu_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu_\perp^2} + \frac{1}{\mu_\perp}\frac{\partial}{\partial\mu_\perp}\right)\{[\mu_0^2-\mu_\perp^2-1]X(\mu_0,\mu_\perp)\} = 0,$$

$$\delta'(\mu_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu_\perp^2} + \frac{1}{\mu_\perp}\frac{\partial}{\partial\mu_\perp}\right)\{[\mu_0^2-\mu_\perp^2-1]X(\mu_0,\mu_\perp)\} = 0.$$

Следовательно,

$$\Psi_0(\mu) = \delta(\mu_3)\delta(\mu_0^2-\mu_\perp^2-1)\vartheta(\mu_\perp^2),$$

где согласно (3.3)

$$\vartheta(\mu_\perp^2) = \sum b_n \delta^{(n)}(\mu_\perp^2).$$

Литература

I. Н.Н.Боголюбов, В.С.Владимиров, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, I2, 305, I972.

2. Э.Вицорек, В.А.Матвеев, Д.Робашик, А.Н.Тавхелидзе. ТМФ, 22, 3, I975.

3. В.А.Матвеев, Б.А.Маградзе. Препринт ОИЯИ,Р2-9435, Дубна, I976.

4. Б.И.Завьялов. ТМФ, I7, I78, I973.

5. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, I963.

6. H.A.Kastrup. Phys. Rev., vol.142, N 4, p. 1060 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
3I декабря 1976 года.