СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 10348

Г.В.Исаев

СТАТИЧЕСКИЕ "МАССИВНЫЕ" ПОЛЯ И ПОВЕРХНОСТЬ ГОРИЗОНТА

1976

P2 - 10348

Г.В.Исаев

СТАТИЧЕСКИЕ "МАССИВНЫЕ" ПОЛЯ И ПОВЕРХНОСТЬ ГОРИЗОНТА

Исаев Г.В.

Р2 - 10348

Статические "массивные" поля и поверхность горизонта

Доказана несовместимость статических "массивных" скалярных и векторных полей с поверхностью горизонта, что указывает на невозможность образования "черных дыр" в присутствии таких полей.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Isaev G.V.

P2 - 10348

Static Massive Fields and the Horizon Surface

The static massive scalar and vector fields are proved to be incompatible with the horizon surface. It points out the impossibility of the "black holes" creation in the precense of such fields.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

В последнее время в связи с возобновлением интереса к так называемым "черным дырам" в литературе рассматривалось влияние различных физических полей на характер кривизны пространства-времени. Обращалось внимание на то обстоятельство, что присутствие статических центрально-симметричных скалярных [1-3] или массивных векторных [4-6] полей исключает существование сферы горизонта, то есть существование "черной дыры". В этой работе рассмотрен произвольный /нецентрально-симметричный/ статический случай. Показано, что и в этом случае присутствие массивных скалярных и векторных полей исключает существование замкнутой поверхности горизонта, т.е. существование нецентрально-симметричной "черной дыры". Заметим, что в случае коллапса бесконечного цилиндра горизонт /незамкнутый/ отсутствует уже в чисто гравитационном /без внешних полей/ случае [7], однако здесь существенным условием является неограниченность цилиндра, что представляет собой абстракцию.

Утверждение о невозможности существования замкнутой поверхности горизонта в присутствии массивных скалярных и векторных полей является указанием на невозможность образования "черной дыры" в результате гравитационного коллапса в присутствии соответствующих полей, однако для строгого доказательства последнего требуется динамическое рассмотрение [8].

Математическая идея доказательства заимствована из работы Бекенштейна [9], однако результат является "зеркальным отражением" вывода Бекенштейна. В [9] утверждается: "черные дыры" не обладают определенными статическими внешними полями. Из доказанного ниже следует: определенные статические поля не обладают "черными дырами".

Именно, докажем утверждение:

в пространстве с ненулевым массивным векторным или скалярным полем отсутствуют замкнутые псевдоособенности * типа "горизонт".

/Греческие индексы пробегают значения -0,1,2,3; латинские - 1,2,3/

<u>Доказательство:</u>

Случай массивного векторного поля

1. Допустим, что существует "горизонт" - статическая замкнутая двухгиперповерхность, удовлетворяющая условию

$$dS_\mu dS^\mu = 0, \qquad /1/$$

где dS^μ - четырехвектор, направленный по четырехнормали к "горизонту" и пропорциональный элементу площади.

2. Пусть вне горизонта существует статическое векторное поле с массой

$$B_\mu \neq 0,$$

$$F_{\mu\nu} \neq 0.$$

Рассмотрим выражение

$$P = \int B_\mu F^{\mu\nu} dS_\nu \overset{df}{\equiv} \int N^\nu dS_\nu ,$$

* Под псевдоособенностью понимается такая поверхность, на которой физические /измеримые/ скаляры несингулярны.

где интеграл берется по поверхности "горизонта". В статическом случае $dS_0 = 0$, поэтому

$$P = \int N^k dS_k .$$

Т.к. пространственная часть метрики имеет знакоопределенную сигнатуру /-1, -1, -1/, справедливо неравенство Коши-Буняковского:

$$(N^k dS_k)^2 \leq (N_k N^k)(dS_k dS^k) . \qquad /2/$$

Величина $N_k N^k$ является физическим скаляром / N_k - произведение потенциала на напряженность поля/ и, следовательно, несингулярна на "горизонте". Тогда из /1/ и из статичности задачи ($dS_0 = 0$) следует, что $dS_k dS^k = 0$, и с учетом /2/

$$(N^k dS_k)^2 = 0$$

на "горизонте"; следовательно,

$$P = 0. \qquad /3/$$

Покажем, что условие /3/, т.е. наличие "горизонта", вступает в противоречие с уравнениями векторного поля с массой и предположением 2. Умножим уравнение векторного поля с массой

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}) - m^2 B^\mu = 0$$

на $\sqrt{-g} B_\mu$ и проинтегрируем по всей пространственно-временной области вне "горизонта":

$$A = \int [B_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\sqrt{-g}\, F^{\mu\nu}) - m^2 B_\mu B^\mu \sqrt{-g}\,] d^4x = 0. \qquad /4/$$

Преобразуя первый член в /4/, имеем /после интегрирования по частям и с учетом теоремы Гаусса/:

$$A = \underbrace{\int B_\mu F^{\mu\nu} dS_\nu}_{\text{I}} - \underbrace{\int \sqrt{-g}\,(F^{\mu\nu} B_{\mu,\nu} + m^2 B_\mu B^\mu) d^4x}_{\text{II}} = 0. \quad /5/$$

Используя то обстоятельство, что в статическом случае

$$B^{\mu} = (B^{\circ},0,0,0)^{*} ,$$

распишем второй член из /5/:

$$\mathrm{II} = \int d^4x \sqrt{-g}\; g_{00}\, [(-g_{ij}\; B^{\circ,i} B^{\circ,j}) + m^2 (B^{\circ})^2]. \qquad /6/$$

Выражение $(-g_{ij} B^{\circ,i} B^{\circ,j})$,являющееся квадратом пространственной части четырехвектора **, положительно определено. Следовательно, подынтегральное выражение в /6/ знакоопределено. Таким образом, если $B^{\circ} \neq 0$, $B^{\circ,i} \neq 0$, то $\mathrm{II} \neq 0$, а значит /из /5// и $\mathrm{I} \neq 0$. Получено противоречие с /3/, что и требовалось доказать.

Заметим, что при получении векторного потенциала статического поля в виде $B^{\mu} = (B^{\circ},0,0,0)$, используется условие $m \neq 0$, то есть для безмассового /электромагнитного/ поля утверждение об отсутствии "горизонта" не имеет места. В центрально-симметричном случае это общеизвестно /решение Нордстрема-Рейсснера/.

Случай массивного скалярного поля

Доказательство вполне аналогично случаю векторного поля. Покажем, что уравнение горизонта вступает в противоречие с уравнением скалярного поля /без конформного члена/.

Рассмотрим выражение

$$P' = \int (\Phi \cdot \Phi^{,\mu})\, dS_{\mu} \overset{df}{=} \int M^{\mu}\, dS_{\mu} ,$$

* При доказательстве этого утверждения используется предположение об инвариантности уравнений массивного векторного поля относительно обращения времени[9].

** В статическом случае, вследствие того, что $B^{\mu} = (B^{\circ},0,0,0)$, B° при пространственных преобразованиях координат ведет себя как скаляр и, соответственно, $B^{\circ,i}$ - как вектор.

где интеграл берется по поверхности "горизонта" /который, по предположению, существует/. В статическом случае $dS_0 = 0$, тогда

$$P' = \int (\Phi \cdot \Phi^{,k})\, dS_k \equiv \int M^k dS_k ,$$

$$(M^k dS_k)^2 \leq (M_k M^k)(dS_k dS^k) .$$

На статическом "горизонте" $dS_k dS^k = 0$, поэтому

$$P' = 0 . \qquad /3'/$$

Умножим уравнение Клейна-Гордона в римановом пространстве [10]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}\; \Phi_{,\nu}) + m^2 \Phi = 0$$

на $\sqrt{-g}\Phi$ /чтобы получить квадратичные по полю выражения/ и проинтегрируем по всей четырехобласти вне "горизонта":

$$\int [\Phi \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g}\; g^{\mu\nu}\; \Phi_{,\nu}) + m^2 \sqrt{-g}\, \Phi^2]\, d^4x = 0. \qquad /4'/$$

Преобразуя первый член в /4'/ /после интегрирования по частям и с учетом теоремы Гаусса/, имеем

$$\underbrace{\int (\Phi \cdot \Phi^{,\mu})\, dS_{\mu}}_{\mathrm{I}'} - \underbrace{\int \sqrt{-g}\, d^4x\, [(-g_{\mu\nu}\; \Phi^{,\mu}\, \Phi^{,\nu}) + m^2 \Phi^2]}_{\mathrm{II}'} = 0. \qquad /5'/$$

Второй интеграл в /5'/ в статическом случае приобретает вид:

$$\mathrm{II}' = \int \sqrt{-g}\; d^4x [(-g_{ik} \Phi^{,i}\, \Phi^{,k}) + m^2 \Phi^2]. \qquad /6'/$$

Выражение $(-g_{ik}\, \Phi^{,i}\; \Phi^{,k})$ положительно определено, следовательно, все подынтегральное выражение в /6′/ знакоопределено. Тогда в присутствии поля ($\Phi \neq 0$) интеграл $II' \neq 0$, а значит из /5′/ и $I' \neq 0$. Получено противоречие с /3′/, что и требовалось доказать.

Заметим, что для модифицированного уравнения скалярного поля [11,12]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu} \Phi_{,\nu}) + (m^2 + \frac{R}{6})\Phi = 0,$$

где R - скалярная кривизна, доказательство не проходит. Действительно, в этом случае в подынтегральном выражении /6′/ вместо члена $m^2\Phi^2$ появится выражение $(m^2 + \frac{R}{6})\Phi^2$. Найдем величину $R/6$: взяв след от уравнения Эйнштейна

$$R^{\mu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\mu} R = 8\pi k T^{\mu}_{\mu} \quad ,$$

где $T^{\mu}_{\mu} = m^2\Phi^2$ - след тензора энергии-импульса модифицированного скалярного поля [12], имеем

$$\frac{R}{6} = -\frac{4}{3}\pi k m^2 \Phi^2 .$$

Таким образом, подынтегральное выражение в /6′/ перестает быть положительно определенным, и, следовательно, существование "горизонта" не влечет за собой тождественного обращения поля в нуль во всем пространстве вне "горизонта".

Таким образом, модифицированное скалярное поле в принципе не исключает существования поверхности "горизонта".

В отличие от векторного поля, где было существенным условие $m \neq 0$ /см. [9] /, доказательство для скалярного поля проходит и в безмассовом случае. Правда, в безмассовом случае предположение об ограниченности поля на "горизонте" осложняется тем, что Φ определено с точностью до аддитивной постоянной, но эту постоянную можно обратить в нуль, потребовав дополнительно, чтобы $\Phi \to 0$ на пространственной бесконечности.

В формулах /5/ и /5′/ под dS_{μ} понимается двухгиперповерхность, охватывающая четырехобласть вне "горизонта", то есть это "горизонт" и пространственно-временная бесконечность. При доказательстве интеграл по бесконечно удаленной поверхности считался исчезающим. Для этого необходимо, чтобы подынтегреальные выражения в I и I' убывали на бесконечности быстрее, чем $1/r^2$. Это условие выполнено как для массивных B_o, $\Phi \sim \frac{1}{r} e^{-mr}$, так и для безмассовых $\Phi \sim \frac{1}{r} \to$ $\to \Phi.\Phi' \sim \frac{1}{r^3}$ /см. [1] / полей.

Известные из литературы примеры согласуются с доказанным утверждением. Действительно, в случае центральной симметрии для обычного скалярного уравнения получено общее решение [1], в котором "горизонт" отсутствует. В случае модифицированного безмассового скалярного уравнения известно решение с "горизонтом" /при фиксированном соотношении между скалярным зарядом, массой источника и гравитационной постоянной/ [13].

Доказательство проведено не на основе теории возмущений и, следовательно, справедливо для произвольных /не малых/ отклонений от центральной симметрии.

В заключение благодарю Р.А.Асанова за постановку задачи и многочисленные обсуждения, проф. Н.А.Черникова за полезные замечания и проф. Д.И.Блохинцева за внимание к работе.

Литература

1. *И.З.Фишер. ЖЭТФ, 18, 636 /1948/.*
2. *Р.А.Асанов. ТМФ, 20, №1, 66 /1974/.*
3. *Р.А.Асанов. Сообщение ОИЯИ, Р2-6564, Дубна, 1972.*
4. *Г.В.Исаев. В кн.: Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. М., Атомиздат, 1976, с. 138.*
5. *B.Kuchwics. Phys.Lett., 51A, 47 /1975/.*

6. А.А.Солодов. ТМФ, 24, №1, 136 /1975/.
7. R.S.Thorne. Preprint, California Institute of Technology, Pasadena /1971/.
8. М.А.Марков. УФН, 111, 3 /1973/.
9. J.D.Bekenstein. Phys. Rev., D5, 1139 /1972/.
10. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., "Наука", 1973, стр. 312.
11. Р.Пенроуз. В сб.: Гравитация и топология. М., "Мир", 1966.
12. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann.Inst. H.Poincare, 9, 109 /1968/.
13. К.А.Бронников, Б.Н.Мельников. Препринт ВНИИОФИ 70-2, М., 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1976 года.