СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 10347

Г.В.Исаев

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БИРКГОФА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1976

P2 - 10347

Г.В.Исаев

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БИРКГОФА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Исаев Г.В. P2 - 10347

Аналог теоремы Биркгофа для нелинейной электродинамики

Показано, что центрально-симметричное решение системы уравнений Эйнштейна и уравнений нелинейной электродинамики вне вещества является статическим. В частности, это относится к уравнениям Максвелла и уравнениям Борна-Инфельда в гравитационном поле.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Isayev G.V. P2 - 10347

Birkhoff Theorem Analogy for the Nonlinear Electrodynamics

A central-symmetrical solution of the Einstein and nonlinear electrodynamics equations outside the matter is proved to be static. Specifically the affirmation concerns with the Maxwell and Born-Infeld equations in a gravitational field.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

1. Введение

В последние годы в литературе интенсивно обсуждается вопрос о поведении различных полей в рамках общей теории относительности. Эти вопросы интересны, с одной стороны, в связи с гравитационным коллапсом и так называемыми "черными дырами" /см. обзор [1] и приведенные там ссылки/ и, с другой стороны, в связи с надеждой на регуляризующую роль кривизны пространства-времени в квантовой теории поля /см. обзор [2] и приведенные там ссылки/. Наряду с максвелловской электродинамикой, исходящей из лагранжевой плотности $\mathcal{L} \sim F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, рассматривались различные нелинейные обобщения. Например, Березин и Марков [3] в связи со слабыми взаимодействиями в процессе гравитационного коллапса, рассматривали нелинейные поля с лагранжевой плотностью вида $\mathcal{L} \sim (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^{\ell}$, где $\ell = \frac{n+1}{2n+1}$, $n = 0,1,2,...$*. На необходимость рассмотрения нелинейных полей более общего вида в искривленной метрике в связи с возникновением в нелинейных теориях сверхсветовых скоростей указывали Блохинцев [4], Нгуен Ван Хьеу [5] и другие /см. ссылки в [5]/.

---

*Это ограничение на возможные значения ℓ следует из условия положительной определенности плотности энергии T^0_0 /см. [3]/.

В этой работе рассмотрен наиболее общий класс нелинейных безмассовых векторных полей в рамках общей теории относительности и доказано следующее утверждение:
в центрально-симметричном случае в пустоте метрика и поле являются статическими.
Аналогичное утверждение в отсутствие внешних полей в общей теории относительности носит название теоремы Биркгофа.

2. Векторное поле

Приняты обозначения: $,\mu$ - обычная производная по x^{μ}; $;\mu$ - ковариантная производная по x^{μ}. Рассмотрим нелинейное векторное поле, определяемое лагранжевой плотностью самого общего вида:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(K, I)\,, \qquad /1/$$

где $\mathfrak{L}$ - произвольная, однократно дифференцируемая функция двух возможных независимых инвариантов векторного поля:
скаляра

$$K = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \qquad /2/$$

и псевдоскаляра

$$I = -\frac{1}{8}\sqrt{-g}\,\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho}\,.$$

Здесь $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ - тензор поля, $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ - единичный, абсолютно антисимметричный псевдотензор с ковариантными компонентами $\sqrt{-g}\,\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$ /подробности см., например, в [6] /. Уравнения поля получаем, исходя из принципа наименьшего действия с лагранжевой плотностью /1/, в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\sqrt{-g}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K}\cdot\frac{\partial K}{\partial F_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial I}\,\frac{\partial I}{\partial F_{\mu\nu}}\right)\right] = 0\,. \qquad /3/$$

Тензор энергии-импульса получается по формуле Гильберта /см. [6] / в симметричном виде

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}(\sqrt{-g}\,\mathfrak{L}) - \frac{\partial}{\partial x^{\xi}}\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\,\mathfrak{L})}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\xi}}\right].$$

Благорадя тому, что четырехпотенциал A_{μ} входит в лагранжеву плотность $\mathfrak{L}$ только в виде комбинации

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} \equiv A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \qquad /\text{см. } [6]\, /,$$

$\mathfrak{L}$ не зависит от символов Кристоффеля и, следовательно, не зависит от производных $g^{\mu\nu}{}_{,\xi}$. С учетом этого имеем:

$$T_{\mu\nu} = -g^{\sigma\sigma'}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K} F_{\mu\sigma} F_{\nu\sigma'} + \frac{1}{8} g_{\mu\nu}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial I}\sqrt{-g}\,\epsilon_{\alpha\beta\sigma\rho} F^{\alpha\beta} F^{\sigma\rho} - g_{\mu\nu}\,\mathfrak{L}\,. \qquad /4/$$

3. Центрально-симметричный случай

Параметризуем интервал в виде [6]

$$dS^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)\,. \qquad /5/$$

Тогда $\sqrt{-g} = e^{\frac{\lambda+\nu}{2}} r^2 \sin\theta$, где введены координаты

$(x^{\circ}, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, r, \theta, \phi)$ /скорость света $c = 1$ /.

В центрально-симметричном случае отличны от нуля только две компоненты тензора поля: $F_{01} = -F_{10}$. В этом случае псевдоскаляр I, а вместе с ним и второй член в правой части /4/ тождественно обращаются в нуль.

Два не обращающихся тождественно в нуль уравнения поля /3/ в случае центральной симметрии принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[e^{\frac{\lambda+\nu}{2}} r^2 \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial F_{01}}\right] = 0 ,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[e^{\frac{\lambda+\nu}{2}} r^2 \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial F_{01}}\right] = 0 . \qquad /6/$$

4. Уравнения Эйнштейна

В случае центральной симметрии независимые, не обращающиеся тождественно в нуль, компоненты уравнения Эйнштейна имеют вид:

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2} = 8\pi k T^1_1 , \qquad /7/$$

$$-e^{-\lambda}\left(-\frac{\lambda'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2} = 8\pi k T^0_0 , \qquad /8/$$

$$-e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} = 8\pi k T^1_0 . \qquad /9/$$

Штрихом обозначена производная по радиусу, точкой - производная по времени /подробности см. в /6/ /.

Уравнения для T^2_2 и T^3_3 /в рассматриваемом случае $T^2_2 = T^3_3$/ следуют из /7-9/ в силу тождеств Бьянки. Вычисляя нужные нам компоненты тензора энергии-импульса по формуле /4/, имеем:

$$T^0_0 = e^{-(\lambda+\nu)}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K}(F_{01})^2 - \mathfrak{L} , \qquad /10/$$

$$T^1_1 = e^{-(\lambda+\nu)}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial K}(F_{10})^2 - \mathfrak{L} , \qquad /11/$$

$$T^1_0 = 0 . \qquad /12/$$

Вычитая /8/ из /7/, с учетом того, что $T^0_0 = T^1_1$, имеем *

$$\lambda' + \nu' = 0 ,$$

откуда

$$\lambda + \nu = f(t) . \qquad /13/$$

В случае выбора интервала в виде /5/ остается еще возможность, не нарушая центральной симметрии и вида /5/, сделать преобразование времени вида $t = \phi(t')$ /см. /6/ /. Выбрав

$$t = \int e^{f(t')/2} dt' ,$$

где $f(t')$ - функция из правой части /13/, получим

$$\lambda + \nu = 0 . \qquad /14/$$

Из уравнений Эйнштейна /9/, /12/ следует, что $\lambda = \lambda(r)$. Тогда из /14/ видно, что и $\nu = \nu(r)$. Статичность метрики доказана. Статичность поля непосредственно следует из /6/ и условия /14/.

Таким образом, аналог теоремы Биркгофа доказан. Условие /14/ очень упрощает задачу и позволяет точно решить систему уравнений Эйнштейна и рассматриваемого поля /в рамках центральной симметрии/. Действительно, в силу условия /14/ компоненты метрического тензора вообще не войдут в уравнения поля /6/. Тогда из уравнений поля /6/ можно найти напряженность поля как

---

* Для массивных полей лагранжева плотность $\mathfrak{L}$ зависит также от члена $m^2 A_\mu A^\mu$, вследствие чего нарушается условие $T^0_0 = T^1_1$, и по этой причине все дальнейшее доказательство для них не проходит.

функцию только координат. Эта зависимость будет такой же, как в плоском пространстве *. В тензор энергии-импульса /10/, /11/ компоненты метрического тензора также не войдут. Тогда в правой части уравнения /7/ мы получим известную функцию радиуса. Переписав /7/ в удобной для решения форме, имеем уравнение

$$(e^{-\lambda})' + \frac{1}{r} e^{-\lambda} = \frac{1}{r} - 8\pi k r T_0^0(r) .$$

Его решение:

$$e^{-\lambda} = 1 + \frac{\text{const}}{r} - \frac{8\pi k}{r} \int_r^\infty \xi^2 T_0^0(\xi) d\xi .$$

Из условия, что при $T_{\mu\nu} \to 0$ мы должны получить решение Шварцшильда, находим: $\text{const} = -2km$.

В частности, при $\mathfrak{L} = \text{const} \cdot K$ все вышесказанное относится к Максвелловскому электромагнитному полю; при $\mathfrak{L} = \text{const} \cdot (K)^{\frac{n+1}{2n+1}}$, где $n = 0,1,2,\dots$ - к полям, рассмотренным Березиным и Марковым [3], и при $\mathfrak{L} = 1 - (1 - K - I^2)^{1/2}$ - к нелинейной электродинамике Борна-Инфельда [7].

В заключение благодарю Р.А.Асанова за многочисленные обсуждения, проф. Н.А.Черникова за полезные замечания и проф. Д.И.Блохинцева за внимание к работе.

*В случае решения Нордстрема-Рейсснера этот результат известен. Напряженность электрического поля имеет вид $E_r = E_{01} = \frac{\text{const}}{r^2}$, компоненты же метрического тензора отличны от своих "плоских" значений.

Литература

1. М.А.Марков. УФН, 111, 3 /1973/.
2. А.Салам. В сб.: Квантовая гравитация и топология. М., "Мир", 1973.
3. Б.А.Березин, М.А.Марков. ТМФ, 12, 153 /1972/.
4. D.I.Blokhintsev. Nuovo Cim.Supp., X, 4, No 4, 629 /1956/.
5. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу. ТМФ, т.2, №1, 55 /1970/.
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., "Наука", 1973.
7. M.Born, L.Infeld. Proc.Roy.Soc., A144, 425 /1934/.

Рукопись поступила в издательский отдел 30 декабря 1976 года.