

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



21/3-77

Д-721

P2 - 10344

990/2-77

Б.Г. Драгович, Д.П. Мавло, А.Т. Филиппов

ИССЛЕДОВАНИЕ
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДАЙСОНА-ШВИНГЕРА
ДЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПРОПАГАТОРА
В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

1976

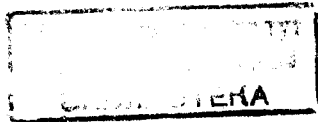
P2 - 10344

Б.Г. Драгович,* Д.П. Мавло, А.Т. Филиппов

ИССЛЕДОВАНИЕ
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДАЙСОНА-ШВИНГЕРА
ДЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПРОПАГАТОРА
В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Направлено в журнал "Fizika"

* Институт физики, Белград, СФРЮ.



Исследование решений уравнения Дайсона-Швингера для электронного пропагатора в квантовой электродинамике

Рассматривается уравнение Дайсона-Швингера для электронного пропагатора в "конечной" квантовой электродинамике Джонсона и др. Подробно исследуются решения соответствующей нелинейной дифференциальной краевой задачи в импульсном пространстве. Показано, что электронный пропагатор имеет особые точки в комплексной плоскости p^2 , что расходится с утверждениями предшествующих работ на эту тему. В связи с этим обсуждается проблема происхождения физической массы электрона в теории с нулевой затравочной массой.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Dragović B.G., Mavlo D.P., Filippov A.T. P2 - 10344

On the Electron Propagator in "Finite" Quantum Electrodynamics

The Dyson-Schwinger equation for the electron propagator in the "finite" quantum electrodynamics of Johnson et al. is considered. The problem is formulated in the form of a one-dimensional integral equation, from which some properties of the solutions are derived, and in the form of a nonlinear second-order differential boundary value problem, which is investigated in detail. The solution is represented as a power series in p^2 , which is proved to be convergent within some finite circle of the complex p^2 plane. The convergence proof as well as numerical results for the radius of convergence are given. These make it possible to conclude (contrary to the previous author's ^{/5/} statement) that electron propagator has singularities in the complex p^2 plane. The behaviour of the solution in the limit of the small "bare" coupling constant e_0^2 is considered and a non-analytic dependence of the solution on e_0^2 for $e_0^2 \rightarrow 0$ is demonstrated. In conclusion the problem of generating a non-vanishing physical electron mass in the theory with vanishing unrenormalized electron mass is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

© 1976 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

§ I. Введение

Хорошо известно, что стандартный подход теории возмущений к локальной квантовой электродинамике приводит к логарифмическим расходимостям для собственной энергии электрона δm и констант перенормировки $Z_1 = Z_2$ и Z_3 ^{/1/}. Теория перенормировок успешно устраняет эти расходимости, но вопрос о структуре точных решений до сих пор остается открытым. Наиболее привлекательной кажется возможность конечной перенормировки заряда в точной теории. Интересный подход к построению такой "конечной" квантовой электродинамики был предложен Джонсоном и др. ^{/2,3/}. В основе этого подхода лежит идея применения нестандартной теории возмущений при равной нулю затравочной массе электрона m_0 . При этом затравочный заряд электрона e_0 должен определяться из условий конечности эффектов поляризации вакуума. В точной теории это соответствовало бы обращению в нуль функции Гелл-Манна-Лоу $\Psi(z)$ при конечном значении $z = \frac{e_0^2}{4\pi}$.

Первым шагом этой программы является решение нелинейного однородного уравнения для электронного пропагатора (2.6). Соответствующая нелинейная дифференциальная краевая задача второго порядка неоднократно обсуждалась в литературе ^{/2-5/}, но она до сих пор окончательно не исследована. В работе ^{/2/} рассмотрено поведение решений в области больших пространственно-

подобных импульсов и малых значений голой константы связи. В работах /2,4/ исследование нелинейного уравнения сводилось к исследованию линеаризованной задачи заменой квадрата искомой функции на константу. Естественно, такой метод не позволяет полностью выяснить природу точных решений нелинейной задачи.

В недавней работе Фукуды и Куго /5/ нелинейная краевая задача второго порядка сведена к задаче первого порядка и решение последней находится методом фазовых траекторий. На основе численного анализа авторы приходят к выводу о том, что электронный пропагатор не имеет особенностей при $-\infty < p^2 < \infty$. На самом деле это утверждение в работе /5/ не доказывается, а неявно предполагается. В действительности, показано лишь, что пропагатор не может иметь полюса. Из рассуждений, приведенных в этой работе, не следует, что пропагатор электрона не может иметь точки ветвления на вещественной оси, а такая точка ветвления и определяла бы конечную массу электрона.

Настоящая работа посвящена исследованию решений нелинейных интегрального уравнения (2.6) и соответствующей дифференциальной краевой задачи (2.7), (2.8). В §2 приводится вывод этих уравнений на основе уравнения Дайсона-Швингера для электронного пропагатора в первом приближении. В §3 получены некоторые общие свойства решений как непосредственно из одномерного интегрального уравнения, так и посредством анализа нелинейного дифференциального уравнения. §4 содержит доказательство сходимости степенных рядов, представляющих решения исследуемого уравнения, в некотором круге конечного радиуса с центром $p^2=0$. Приводится полученная в результате численного анализа зависимость радиуса сходимости указанных степенных раз-

ложений от константы связи. Основные результаты данной работы суммируются и обсуждаются в кратком заключении (§5).

§ 2. Нелинейные уравнения для электронного пропагатора в первом приближении

Уравнение Дайсона-Швингера для полного электронного пропагатора в квантовой электродинамике имеет следующий вид:

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - \frac{ie_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4q \gamma^\mu S(q) \Gamma^\nu(p, q; k) D_{\mu\nu}(k), \quad (2.1)$$

где S и S_0 - полная и свободная функции Грина электрона, $D_{\mu\nu}$ - полная функция Грина фотона, Γ^ν - полная вершинная часть и $k = p - q$. Для того, чтобы (2.1) было уравнением относительно одной неизвестной функции $S(p)$, необходимо подставить в него некоторые явные выражения для Γ^ν и $D_{\mu\nu}$, которые могут быть получены по теории возмущений. В "конечной" электродинамике первое нетривиальное приближение получается заменой полных функций Грина фотона $D_{\mu\nu}$ и вершинной функции Γ^ν на их свободные части $D_{\mu\nu}^0$ и γ^ν . В этом приближении, учитывая, что

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= m_0 + \Sigma(p) - \hat{p} \equiv \alpha(-p^2) - \hat{p} \beta(-p^2), \\ S_0^{-1}(p) &= m_0 - \hat{p}, \\ D_{\mu\nu}^0(k) &= \frac{1}{k^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} (1 - d_e) \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где d_e определяет выбранную калибровку, получаем систему двух нелинейных интегральных уравнений для $\alpha(-p^2)$ и $\beta(-p^2)$:

$$\alpha(-p^2) = m_0 + \frac{ie_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4q \frac{\alpha(-q^2)}{\alpha^2(-q^2) - q^2 \beta^2(-q^2)} \cdot \frac{(3 + d_e)}{k^2}, \quad (2.3a)$$

$$\begin{aligned} \beta(-p^2) &= 1 + \frac{ie_0^2}{(2\pi)^4 p^2} \int d^4q \frac{\beta(-q^2)}{\alpha^2(-q^2) - q^2 \beta^2(-q^2)} \left[\frac{2(pq)}{(p-q)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p^2 + q^2)(pq) - 2p^2 q^2}{(p-q)^4} (1 - d_e) \right]. \end{aligned} \quad (2.3b)$$

Система (2.3) может быть преобразована в систему одномерных

интегральных уравнений после перехода к евклидовой метрике ($q_0 \rightarrow i q_4, -q^2 = \vec{q}^2 - q_0^2 \rightarrow q^2 = \vec{q}^2 + q_4^2$ и аналогично для P):

$$\alpha(P^2) = m_0 + \frac{e_0^2 (3 + d_e)}{2(2\pi)^4} \int_0^\infty q^2 dq^2 \frac{\alpha(q^2)}{\alpha^2(q^2) + q^2 \beta^2(q^2)} \int \frac{d^3 \Omega}{P^2 + q^2 - 2(Pq)}, \quad (2.4a)$$

$$\beta(P^2) = 1 + \frac{e_0^2}{2(2\pi)^4 P^2} \int_0^\infty q^2 dq^2 \frac{\beta(q^2)}{\alpha^2(q^2) + q^2 \beta^2(q^2)} \int d^3 \Omega \left[\frac{2(Pq)}{(P-q)^2} + \frac{(P^2 + q^2)(Pq) - 2P^2 q^2}{(P-q)^4} (1 - d_e) \right]. \quad (2.4b)$$

После выполнения интегрирования по углам и перехода к поперечной калибровке $d_e = 0$ (см. /1, 2/) система (2.4) максимально упрощается, так как $\beta(P^2) = 1$ и остается лишь одно уравнение для $\alpha(P^2)$:

$$\alpha(P^2) = m_0 + \frac{3e_0^2}{(4\pi)^2} \int_0^\infty dq^2 \frac{q^2 \alpha(q^2)}{\alpha^2(q^2) + q^2} \left[\frac{\Theta(P^2 - q^2)}{P^2} + \frac{\Theta(q^2 - P^2)}{q^2} \right], \quad (2.5)$$

которому можно придать вид

$$\alpha(x) = m_0 + g^2 \left[\frac{1}{x} \int_0^x \frac{y \alpha(y) dy}{\alpha^2(y) + y} + \int_x^\infty \frac{\alpha(y) dy}{\alpha^2(y) + y} \right], \quad (2.6)$$

где $x = P^2, y = q^2, g^2 = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{e_0^2}{4\pi} \equiv \frac{3}{4\pi} \alpha_0$ (α_0 - голая постоянная тонкой структуры).

Легко показать, что нелинейное интегральное уравнение (2.6) эквивалентно следующей нелинейной дифференциальной краевой задаче второго порядка:

$$\frac{d^2}{dx^2} [x \alpha(x)] = -g^2 \frac{\alpha(x)}{\alpha^2(x) + x}, \quad (2.7)$$

$$x^2 [\alpha(x)]' \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \quad [x \alpha(x)]' \xrightarrow{x \rightarrow \infty} m_0. \quad (2.8)$$

Обратимся к вопросу о существовании конечного решения однородного уравнения (2.6). Предполагая, что решение уравнения (2.6) допускает представление в виде ряда по степеням g^2 ,

$$\alpha(x) = m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) g^{2n}, \quad (2.9)$$

из (2.6) получаем:

$$a_n(x) = \frac{m_0}{x} \left[x - m_0^2 \ln \frac{m_0^2 + x}{m_0^2} \right] + m_0 \lim_{y \rightarrow \infty} \ln \frac{m_0^2 + y}{m_0^2 + x}. \quad (2.10)$$

Присутствующая здесь логарифмическая расходимость трактовалась авторами работ /2/ как указание на невозможность построения конечной квантовой электродинамики с $m_0 \neq 0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только однородное интегральное уравнение (2.6) ($m_0 = 0$) и соответствующую однородную дифференциальную краевую задачу (2.7), (2.8). Такая задача может давать нетривиальные конечные функции Грина /2, 3/, особенности которых во времениподобной области определяли бы массу электрона. Заметим, что наличие инфракрасных особенностей "размазывает" полюс пропагатора в электродинамике, и масса электрона должна определяться ближайшей к нулю точкой ветвления пропагатора.

§ 3. Общие свойства решений нелинейных интегрального и дифференциального уравнений

В этом параграфе мы остановимся на некоторых свойствах решений, которые могут быть получены либо непосредственно из интегрального уравнения, либо из анализа дифференциального уравнения (2.7).

Если $\alpha(x)$ является решением интегрального уравнения

$$\alpha(x) = g^2 \left[\frac{1}{x} \int_0^x \frac{y \alpha(y) dy}{\alpha^2(y) + y} + \int_x^\infty \frac{\alpha(y) dy}{\alpha^2(y) + y} \right], \quad (3.1)$$

то $-\alpha(x)$ также будет решением. Уравнение (3.1), очевидно, всегда имеет тривиальное решение $\alpha(x) = 0$. Нетрудно показать, что при

любых предположениях относительно поведения $\alpha(x)$ при $x \rightarrow 0$ существует предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{y \alpha(y)}{\alpha^2(y) + y} dy = 0. \quad (3.2)$$

Переходя в уравнении (3.1) к пределу $x \rightarrow 0$, получаем

$$\alpha(0) = g^2 \int_0^{\infty} \frac{\alpha(y) dy}{\alpha^2(y) + y}. \quad (3.3)$$

На основе равенства (3.3) интегральное уравнение (3.1) можно переписать в более удобной форме:

$$\alpha(x) = \alpha(0) + g^2 \int_0^x \frac{\alpha(y)}{\alpha^2(y) + y} \left(\frac{y}{x} - 1 \right) dy. \quad (3.4)$$

Если $\alpha(0) = 0$, то уравнение (3.4) имеет только тривиальное решение. Действительно, предположим, что $\alpha(0) = 0$ и существует некоторый интервал $[0, \varepsilon]$, такой, что $\alpha(x) > 0$, $x \in [0, \varepsilon]$. Тогда из (3.4) следует

$$\alpha(\varepsilon) = g^2 \int_0^{\varepsilon} \frac{\alpha(y)}{\alpha^2(y) + y} \left(\frac{y}{\varepsilon} - 1 \right) dy < 0, \quad (3.5)$$

а это противоречит предположению $\alpha(\varepsilon) > 0$ (конечно, здесь существенно предположение о монотонности поведения решения в некоторой окрестности точки $x=0$, см. далее). При любом $\alpha(0) \neq 0$ уравнение (3.4) можно решать по теории возмущений, получая выражения типа (2.9), (2.10), но теперь конечные. В любом порядке по g^2 $\alpha(x)$ имеет точку ветвления при $x = -\alpha^2(0)$. Таким образом, параметр $\alpha(0)$ играет роль конечной затравочной массы электрона. Заметим, однако, что при $x \approx -\alpha^2(0)$ обычная теория возмущений неприменима. Как мы покажем ниже, точное решение в этой точке особенности в действительности не имеет.

Рассмотрим поведение решений дифференциального уравнения (2.7) в окрестности точек $x=0, \infty$. При малых x будем искать решение в виде степенного ряда

$$\alpha(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (3.6)$$

Подставляя (3.6) в (2.7), получаем, что λ может принимать следующие значения: 1) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \alpha_0$ - произвольная постоянная; 2) $\lambda_3 = \frac{1}{2}, \alpha_0^2 = -(1 + \frac{4}{3}g^2)$. При этом коэффициенты a_n удовлетворяют определенным нелинейным рекуррентным соотношениям. Решения дифференциального уравнения, соответствующие λ_2 и λ_3 , не удовлетворяют граничным условиям (2.8) и поэтому не являются решениями краевой задачи (2.7), (2.8), и, следовательно, интегрального уравнения (3.1). Обратимся к решению с $\lambda_1 = 0$, которое, очевидно, удовлетворяет граничному условию в нуле (2.8) и может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g^2, \alpha_0) x^n = \alpha_0 - \frac{g^2}{2\alpha_0} x + \frac{g^2(2-g^2)}{12\alpha_0^2} x^2 - \frac{g^2(3-5g^2+g^4)}{36\alpha_0^3} x^3 + \dots \\ &= \alpha_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(g^2, 1) \left(\frac{x}{\alpha_0^2} \right)^n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, рассматриваемое решение зависит от одной произвольной постоянной $\alpha_0 = \alpha(0)$, причем если $\alpha(x, g^2)$ есть некоторое решение уравнения, то $\alpha_0 \alpha\left(\frac{x}{\alpha_0^2}, g^2\right)$ также будет решением (этот вывод можно получить также и непосредственно из дифференциального уравнения (2.7)). Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только степенные ряды с $\alpha_0 = 1$, что соответствует выбору в качестве единицы массы величины $\sqrt{\alpha(0)}$. При $x \rightarrow \infty$ решения могут иметь следующее поведение: $\alpha(x) \sim B x^\delta$, причем δ может принимать следующие значения: 1) $\delta_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - g^2}$, B - произвольная постоянная; 2) $\delta_3 = \frac{1}{2}, B^2 = -(1 + \frac{4}{3}g^2)$. Решение, соответствующее δ_3 , очевидно, не удовлетворяет граничному условию на бесконечности (2.8) (заметим, что $B x^{\frac{1}{2}}$ есть точное решение уравнения (2.7)).

В заключение отметим, что из сходимости степенного разложения (3.7) (см. §4) следует, что равенство (3.3)

$$\frac{1}{g^2} = \int_0^{\infty} \frac{\lambda(y, g^2) dy}{\lambda^2(y, g^2) + y} \quad (3.8)$$

тождественно выполняется при всех g^2 . Для того, чтобы тождество (3.8) выполнялось при $g^2 \rightarrow 0$, необходимо, чтобы в асимптотике $\lambda(x)$ содержался член $\chi^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - g^2}}$.

§ 4. Исследование сходимости степенных рядов и аналитические свойства решений

Наиболее принципиальным вопросом в дальнейшем изучении решений краевой задачи (2.7), (2.8) является исследование сходимости построенных в §3 степенных разложений в окрестности точки $x=0$, что позволит: 1) получить важную информацию об аналитических свойствах решений (конечный или бесконечный радиус сходимости); 2) численно определить с любой точностью $\lambda(x, g^2)$; 3) правильно поставить задачу аналитического продолжения решений на всю действительную ось (особенно интересна временноподобная область импульсов) и на комплексную плоскость.

Подставляя степенной ряд (3.7) в уравнение (2.7) нетрудно получить следующие нелинейные рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = - \frac{\sum_{i=0}^n c_i b_{n-i} + \{n(n+1) + g^2\} a_n}{(n+1)(n+2)}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $b_n = (n+1)(n+2)a_{n+1}$, $c_n = \sum_{i=0}^n a_i a_{n-i}$. Сложная структура этих нелинейных разностных уравнений не позволяет получить в явном виде их решения или хотя бы асимптотику a_n при $n \rightarrow \infty$,

которой в принципе было бы достаточно для ответа на вопрос о сходимости степенного ряда (3.7). Поэтому мы воспользуемся несколько иным аналитическим методом, позволяющим найти верхнюю оценку для $|a_n|$ и использовать рекуррентные соотношения (4.1) в целом, не решая их. Затем мы проведем численное исследование нелинейных уравнений (4.1), что позволит нам оценить радиус сходимости ряда (3.7) и установить его зависимость от g^2 .

Доказательство сходимости степенного ряда (3.7) проведем методом математической индукции. Очевидно, что $|a_0| = 1 = \rho^0$. Предполагая, что

$$|a_n| \leq \frac{\rho^n}{(n+1)^q}, \quad q \geq 3, \quad (4.2)$$

докажем, что $|a_{n+1}| \leq \rho^{n+1} / (n+2)^q$. Из рекуррентных соотношений (4.1) нетрудно получить, что неравенство

$$|a_{n+1}| \leq \frac{\sum_{i=0}^n |c_i| |b_{n-i}| + \{n(n+1) + g^2\} |a_n|}{(n+1)(n+2)} \leq \frac{\rho^{n+1}}{(n+2)^q} \quad (4.3)$$

выполняется при условии, что

$$\rho \geq \frac{\mathcal{K}^{(q)}}{1 - \mathcal{X}^{(q)}}, \quad (4.4)$$

где $\mathcal{K}^{(q)}$ и $\mathcal{X}^{(q)}$ ограничивают функции ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$\mathcal{K}_n^{(q)} = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^q \frac{n(n+1) + g^2}{(n+1)(n+2)}, \quad (4.5)$$

$$\mathcal{X}_n^{(q)} = \frac{(n+2)^{q-1}}{(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{(n-k+2)^{q-1}} \sum_{i=0}^k \frac{1}{(i+1)^q (k-i+1)^q} \quad (4.6)$$

сверху, т.е. $\mathcal{K}_n^{(q)} \leq \mathcal{K}^{(q)}$, $\mathcal{X}_n^{(q)} \leq \mathcal{X}^{(q)}$. Если верхнюю оценку для $\mathcal{X}_n^{(q)}$ удастся найти такой, чтобы $\mathcal{X}^{(q)} < 1$, то мы тем самым получим нетривиальное неравенство для ρ : $\rho \geq \varphi(g^2)$, и для всех $\rho(g^2)$, удовлетворяющих этому неравенству, по индукции будет доказана мажорантная оценка для коэффициентов (4.2), т.е. $|a_n| \leq \varphi^n(g^2) / (n+1)^q$,

которая означает абсолютную и равномерную сходимость степенного ряда (3.7) в круге с радиусом $R = \sqrt[q]{\rho}$. Таким образом, доказательство по индукции возможно лишь при условии, что

$$\chi^{(q)} \equiv \max_{0 \leq n < \infty} \chi_n^{(q)} < 1. \quad (4.7)$$

При этом наилучшая (нижняя) оценка радиуса сходимости получается, если выбрать $\chi^{(q)} = \chi^{(q)}$ и $\mathcal{K}^{(q)} = \mathcal{K}^{(q)} \equiv \max_{0 \leq n < \infty} \mathcal{K}_n^{(q)}$. Нетрудно оценить максимум $\mathcal{K}_n^{(q)}$:

$$\mathcal{K}^{(q)} < \mathcal{K}_0^{(q)} = 2^q \begin{cases} q^{1/2}, & q \geq 2; \\ 1, & q < 2. \end{cases} \quad (4.8)$$

Намного труднее оценить максимум $\chi_n^{(q)}$. Это может быть проделано аналитически, посредством строгих неравенств для двойных сумм, входящих в (4.6), и с использованием свойств ζ -функций Римана. Подобный, довольно сложный, расчет при $q=3$ приводит к оценке

$$\chi^{(3)} < 0,9198. \quad (4.9)$$

Более удобно исследовать $\chi_n^{(q)}$ на максимум численно. Результаты такого исследования для $2,5 \leq q \leq 10$ приведены на рис.1, из которого видно, что в данной области по q имеет место необходимое для доказательства неравенство (4.7). Таким образом, полученные оценки для ρ позволяют заключить, что степенной ряд (3.7) абсолютно и равномерно сходится в круге с радиусом

$$R(q^2) = \frac{1 - \chi^{(q)}}{\mathcal{K}_0^{(q)}}, \quad (4.10)$$

где $\mathcal{K}_0^{(q)}$ определяется уравнением (4.8), а для $\chi^{(q)}$ можно использовать либо аналитические верхние оценки типа (4.9), либо численные результаты (рис.1).

Теоретическая оценка радиуса сходимости (4.10) является весьма грубой и представляет собой лишь нижнюю оценку для истинного радиуса сходимости. Основная цель приведенных выше

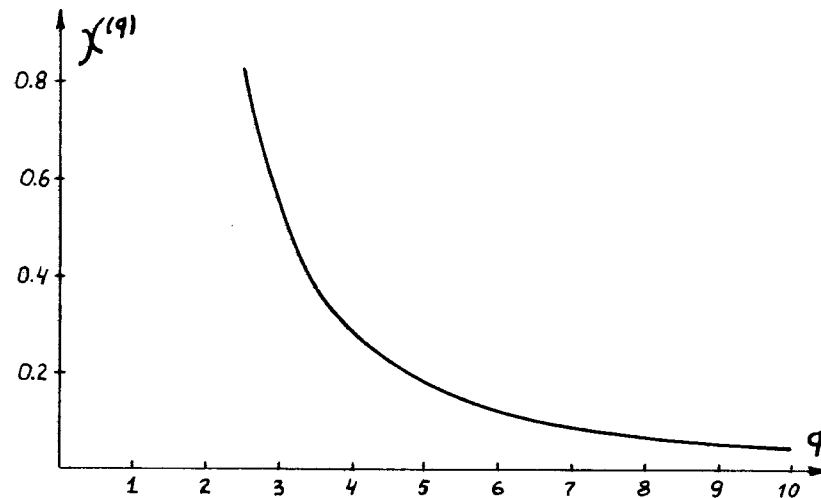


Рис.1

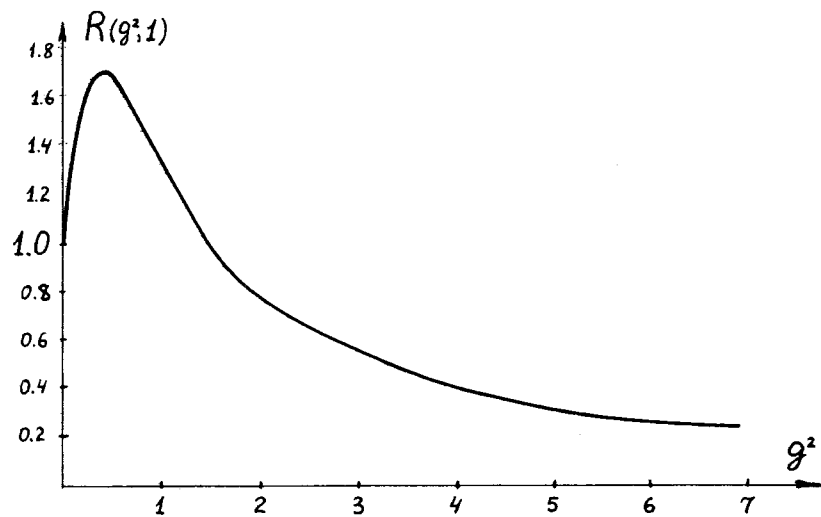


Рис.2

рассуждений состоит отнюдь не в получении наиболее сильной оценки для радиуса, а в строгом доказательстве того принципиального факта, что степенной ряд (3.7), представляющий решение уравнения (2.7), имеет смысл, т.е. при любом g^2 является (абсолютно и равномерно) сходящимся в некотором ненулевом круге. Для точного определения радиуса сходимости был проведен численный анализ $|a_{n+1}|/|a_n|$ и $\sqrt[n]{|a_n|}$ исходя из рекуррентных соотношений (4.1). Для этой цели удобно воспользоваться признаком Коши [6], с помощью которого было получено значение радиуса сходимости

$$R(g^2; 1) = [|a_n(g^2; 1)|]^{-1/n}, \quad n \gg 1, \quad (4.11)$$

которое очень плавно и слабо изменялось при увеличении n . В качестве окончательной величины радиуса бралось численное значение (4.11), соответствующее $n \sim 10^3$. Отметим, что при изменении n от $5 \cdot 10^2$ до 10^3 три десятичных знака оставались стабильными. Вычисления проводились при $a_0 = 1$ и $g^2 \in (0, 10]$, и их результат приведен на рис. 2, на котором изображена зависимость $R(g^2; 1)$. Радиус сходимости степенного ряда для произвольного a_0 легко выражается через полученную нами функцию $R(g^2; 1)$:

$$R(g^2; a_0) = a_0^2 R(g^2; 1). \quad (4.12)$$

Конечный радиус сходимости степенного ряда (3.7) указывает на существование особых точек функции $\mathcal{L}(x, g^2)$ на окружности $|x| = R$. Естественно возникают вопросы о положении этих особых точек в комплексной плоскости и об их природе (точки ветвления, полюса). Не располагая окончательными ответами на эти вопросы, мы рассмотрим сейчас некоторые интересные результаты, которые получаются из анализа разложения $\mathcal{L}(x, g^2)$ при малых g^2 .

При малых g^2 по индукции можно получить более сильную мажорантную оценку для коэффициентов степенного ряда (3.7):

$$|a_n| \leq g^2 \frac{g^n}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.13)$$

Для того, чтобы неравенство (4.13) выполнялось для первых коэффициентов (см. (3.7)), например, при $n = n_0$ ($n_0 = 1, 2, 3, \dots$) необходимо, чтобы соответствующее ρ удовлетворяло неравенству

$$\rho > \rho_{n_0} = 1 - \mathcal{A}_{n_0} g^2 + O(g^4), \quad (4.14)$$

где \mathcal{A}_{n_0} легко получается из решений соответствующих неравенств (см. (4.13) и явные выражения для первых коэффициентов (3.7)):

$\mathcal{A}_1 = 0$, $\mathcal{A}_2 = 1/4$, $\mathcal{A}_3 = 5/8, \dots$. Легко показать, что, если неравенство (4.14) имеет место при некотором n_0 , то оно будет справедливо для всех $n < n_0$. Используя рекуррентные соотношения (4.1), можно показать, оценивая сверху двойные суммы, входящие в (4.1), с помощью (4.13), что из справедливости неравенства (4.13) при любом n ($n > n_0$) следует его справедливость и при $n+1$ при условии, что

$$\rho > \tilde{\rho}_{n_0} = 1 - \mathcal{B}_{n_0} g^2 + O(g^4), \quad (4.15)$$

где \mathcal{B}_{n_0} легко получаются из соответствующих верхних оценок и зависят только от n_0 , т.е. от выбора начального шага индукции. Таким образом, мажорантная оценка (4.13) доказана, если неравенства (4.14) и (4.15) соблюдаются одновременно, т.е. при условии, что

$$\rho > 1 - \gamma_{n_0} g^2 + O(g^4), \quad (4.16)$$

где $\gamma_{n_0} = \min\{\mathcal{A}_{n_0}, \mathcal{B}_{n_0}\}$. Из (4.16) получаем нижнюю оценку для радиуса сходимости степенного ряда (3.7) при малых g^2 :

$$R(g^2; 1) \geq 1 + \gamma_{n_0} g^2 + O(g^4). \quad (4.17)$$

Эта оценка является весьма реалистической, так как она доказывает обнаруженный ранее численно (рис. 2) факт $\lim_{g^2 \rightarrow 0} R(g^2, 1) = 1$.

χ_{n_0} растет с увеличением n_0 и при $n_0 \leq 3$, $\chi_{n_0} < 2$, поэтому мы их не выписываем, так как ниже, исходя из других соображений, мы получим более сильную оценку (см. (4.21)).

Полученный результат (4.17) означает, что решение $\alpha(x, g^2)$ аналитично в единичном круге и что особые точки могут выходить на единичную окружность при $g^2 \rightarrow 0$. Попытаемся уточнить положение этих особых точек в комплексной плоскости. Наиболее естественным кажется решать уравнение (3.4) по теории возмущений, т.е. получать разложение $\alpha(x, g^2)$ по степеням g^2 с помощью итерирования. Первая итерация приводит к функции

$$\alpha(x, g^2) \simeq 1 + g^2 \left[1 - \frac{(1+x)}{x} \ln(1+x) \right], \quad (4.18)$$

имеющей точку ветвления при $x = -1$. В связи с этим представляет интерес исследовать поведение решений в окрестности этой точки. Это может быть проделано с помощью двухсторонних неравенств для $\alpha(x, g^2)$:

$$\alpha(x, g^2) \leq \left[1 - g^2 \left\{ 1 - \frac{1+x}{x} \ln(1+x) \right\} \right]^{-1}, \quad (4.19)$$

$$\alpha(x, g^2) \geq 1 + g^2 \left[1 + \frac{x + \alpha^2(x, g^2)}{x} \ln \left(1 - \frac{x}{\alpha^2(x, g^2)} \right) \right], \quad (4.20)$$

которые получаются из интегрального уравнения (3.4), справедливой при $x \in (-R(g^2, 1), 0]$ и являются следствием аналитичности $\alpha(x, g^2)$ в круге радиуса (4.17), т.е. имеют место при $g^2 \rightarrow 0$. При $x = -1$ из (4.19), (4.20) получаем $\alpha(-1, g^2) = 1 + g^2 + O(g^4)$, что при подстановке в исходное нелинейное уравнение приводит к выводу о существовании логарифмической точки ветвления на действительной оси: $\chi_0 = -1 - 2g^2 + O(g^4)$ при малых g^2 . Таким образом, построенные двухсторонние оценки позволяют, с

одной стороны, уточнить поведение радиуса сходимости (см. (4.17))

$$R(g^2, 1) = 1 + 2g^2 + O(g^4), \quad (4.21)$$

с другой стороны, — предсказать положение и характер хотя бы одной из особых точек (вопрос о существовании и положении других особых точек на окружности сходимости остается открытым). Из (4.19) и (4.20) также можно получить интересные неравенства для $\alpha'_x(-1, g^2)$ при $g^2 \rightarrow 0$:

$$\alpha'_x(-1, g^2) \geq g^2 \left(\alpha^2(-1, g^2) \left| \ln \left\{ 2g^2 \left(1 - \frac{g^2}{2} \right) \right\} \right| - 1 \right), \quad (4.22)$$

$$\alpha'_x(-1, g^2) \leq g^2 \left(\alpha^2(-1, g^2) \left| \ln \left\{ 2g^2 \left(1 - \frac{g^2}{2} \right) \right\} \right| + \text{const} \right), \quad (4.23)$$

из которых следует, что $\alpha'_x(-1, g^2) \underset{g^2 \rightarrow 0}{\sim} g^2 \ln g^2$. Последнее означает, что стандартная теория возмущений (разложение по степеням g^2) неприменима в качестве метода решения уравнения (3.4) и необходимо использовать ее модифицированный вариант ^{/1/}. Такая ситуация является обычной для неперенормируемых теорий поля, в случае же квантовой электродинамики этот результат кажется несколько неожиданным.

§ 5. Заключение

В настоящей работе начато последовательное исследование решений уравнения для электронного пропагатора в "конечной" квантовой электродинамике Джонсона и др. ^{/2/}. Конечная цель этого исследования — выяснение проблемы происхождения массы электрона и возможности построения приближенных решений квантовой электродинамики, не содержащих расходимостей. Первым шагом этой программы является полное исследование нелинейного уравнения (2.6) для пропагатора электрона. Если решение имеет особенности только на вещественной оси P^2 , то ближайшая особен-

ность определяет физическую массу электрона. Если существуют особенности при комплексных значениях ρ^2 , то подход работы [2] к построению конечной квантовой электродинамики бесперспективен, т.к. в этом случае не выполнены основные требования, предъявляемые к "хорошей" квантовой теории поля.

Мы показали выше, что решение нелинейной краевой задачи (если оно существует), обязательно голоморфно в некотором круге комплексной плоскости ρ^2 , и численно нашли радиус этого круга при различных значениях затравочного заряда электрона e_0^2 . Отметим существование двух качественно различных областей e_0^2 : при достаточно малых значениях e_0^2 радиус круга растет с ростом e_0^2 , а при больших значениях e_0^2 этот радиус уменьшается. Если особенность, определяющая этот радиус, находится на вещественной оси, то это означает, что в первом случае физическая масса растет с ростом e_0^2 , а во втором - убывает. Можно назвать соответствующие решения "различными фазами": нормальная фаза - при малых e_0^2 и аномальная - при больших e_0^2 . Точка, в которой $\frac{dR(e_0^2)}{de_0^2} = 0$, есть точка "фазового" перехода. Это обстоятельство заслуживает дальнейшего исследования, однако сначала необходимо убедиться, что особенности находятся на вещественной оси. При малых значениях e_0^2 приближенные решения имеют точку ветвления при вещественных значениях ρ^2 , но мы пока не смогли доказать, что эта точка ветвления есть особенность точного решения. Трудность исследования аналитических свойств решения подчеркивается обнаруженной нами особенностью точного решения по e_0^2 при $e_0^2 \rightarrow 0$: точное решение нельзя разложить по степеням e_0^2 .

В последующих работах мы предполагаем продолжить начатое здесь исследование, рассмотрев в первую очередь поведение

решения в бесконечно удаленной точке $\rho^2 \rightarrow \infty$ и положение особенностей в комплексной плоскости ρ^2 . Это исследование должно дать ответ на вопрос о существовании, единственности и аналитических свойствах решения задачи (2.6), (2.7), (2.8).

В заключение авторы выражают свою искреннюю благодарность Р.В.Поляковой, совместно с которой были получены численные результаты, вошедшие в данную работу. Один из авторов (Б.Г.Д.) глубоко благодарен дирекции ОИЯИ и многим сотрудникам ЛФ ОИЯИ за оказанное гостеприимство и создание хороших условий для работы.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Наука, М. 1973.
2. K.Johnson, M.Baker and R.Willey. *Phys.Rev.* **136** (1964), B1111; K.Johnson, R.Willey and M.Baker. *Phys.Rev.* **163** (1967), 1699; M.Baker and K.Johnson. *Phys.Rev.* **183** (1969), 1292; *ibid* **D3** (1971), 2516; *ibid* **D3** (1971), 2541; K.Johnson and M.Baker. *Phys.Rev.* **D8** (1973), 1110;
3. S.Adler. *Phys.Rev.* **D5** (1972), 3021.
4. R.Naag and Th.A.J.Maris. *Phys.Rev.* **132** (1963), 2325; Th.A.J.Maris, V.E.Herscovitz and G.Jacob, *Phys.Rev.Lett.*, **12** (1964), 313;
5. R.Fukuda and T.Kugo, KUNS 350, HE(TH) 76/05, preprint Kyoto;
6. W.Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
7. В.Ш.Гогохия, А.Т.Филиппов. ЯФ, **15** (1972), I294.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1976 года.