СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10320

Н.Б.Скачков, И.Л.Соловцов

ТРЕХМЕРНОЕ ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2.

Парциальные уравнения

1976

P2 - 10320

Н.Б.Скачков, И.Л.Соловцов

ТРЕХМЕРНОЕ ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2.

Парциальные уравнения

Скачков Н.Б., Соловцов И.Л. P2 - 10320

Трехмерное описание взаимодействия двух релятивистских частиц со спином 1/2. Парциальные уравнения

На основе формулировки квазипотенциального метода в релятивистском конфигурационном пространстве развит парциальный формализм для релятивистской системы двух фермионов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

Skachkov N.B., Solovtsov I.L. P2 - 10320

Three-Dimensional Description of Two Interacting Relativistic Particles with Spin 1/2. Partial Equations

A partial wave formalism is developed for a two-fermion system on the basis of the quasipotential method in the relativistic configurational space.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

Настоящая работа продолжает начатое в /1-3/ исследование задачи о взаимодействии двух релятивистских фермионов. С этой целью используется квазипотенциальный подход к квантовой теории поля в формулировке Кадышевского /4/. Этот формализм обладает существенным свойством - тесной геометрической и теоретико-групповой связью с хорошо разработанным нерелятивистским аппаратом квантовой механики /5-7/. Так, согласно /5/, квазипотенциальные уравнения в импульсном пространстве для амплитуды и волновой функции имеют вид, аналогичный виду нерелятивистских уравнений Липпмана-Швингера и Шредингера:

$$T^{\sigma_1'\sigma_2'}_{\sigma_1\sigma_2}(\vec{p},\vec{q}) = V^{\sigma_1'\sigma_2'}_{\sigma_1\sigma_2}(\vec{p},\vec{q};E_q) + \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\Omega_k \frac{V^{\sigma_1''\sigma_2''}_{\sigma_1\sigma_2}(\vec{p},\vec{k};E_q)\, T^{\sigma_1'\sigma_2'}_{\sigma_1''\sigma_2''}(\vec{k},\vec{q})}{E_k(E_k-E_q-i\epsilon)} \qquad /1/$$

$$E_p(E_p-E_q)\,\Psi_q(\vec{p})_{\sigma_1\sigma_2} = \frac{1}{(2\pi)^3}\sum_{\sigma_1''\sigma_2''}\int d\Omega_k\, V^{\sigma_1''\sigma_2''}_{\sigma_1\sigma_2}(\vec{p},\vec{k};E_q)\,\Psi_q(\vec{k})_{\sigma_1''\sigma_2''}. \qquad /2/$$

Близость к нерелятивистской теории состоит не только во внешней аналогии между формой квазипотенциальных уравнений и уравнений квантовой механики, но и в подобии формы членов взаимодействия. Как показано в [1], ковариантные фейнмановские матричные элементы в приближении однобозонного обмена, играющие роль квазипотенциалов, с помощью предложенного в [1] преобразования могут быть представлены в виде трехмерного геометрического обобщения /в смысле геометрии Лобачевского/ хорошо известных потенциалов квантовой механики /см. *Дополнение*/. Аналогия с нерелятивистскими потенциалами сохраняется и при переходе к релятивистскому конфигурационному пространству [2,3], введенному с помощью разложения по унитарным неприводимым представлениям группы Лоренца в [6] /см. *Дополнение*/.

Настоящая работа посвящена построению парциального формализма для описания системы двух релятивистских фермионов. При этом, благодаря достигнутому в [1-7] подобию релятивистского аппарата нерелятивистскому формализму, возникает возможность существенно использовать аналогию с методами квантовой механики.

Согласно [3], система двух взаимодействующих фермионов описывается квазипотенциальным уравнением, имеющим в релятивистском r -пространстве вид

$$(2E_q - 2\hat{H}_0)\,\Psi_q(\vec{r};\sigma)_\mu = \sum_{\mu'} \hat{V}(\vec{r})_{\mu\mu'}\,\Psi(\vec{r};\sigma)_{\mu'}\,, \qquad /3/$$

где $2E_q$ - полная энергия системы, а матрица квазипотенциала $\hat{V}(\vec{r})$ находится согласно описанной в [1-3] процедуре. При учете центральных, спин-орбитальных и тензорных сил квазипотенциал $\hat{V}(\vec{r})$ можно представить в виде [2,3]

$$\hat{V}(\vec{r}) = \hat{V}\ (r) + \hat{V}\ (r)(\vec{S}\vec{L}) + \hat{V}\ (r)\,S_{1,2}\,, \qquad /4/$$

где $\vec{S} = (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)/2$ - полный спин, а $S_{1,2} = 6(\vec{S}\vec{n}) - 2\vec{S}^2$ - оператор тензорных сил.

Оператор релятивистского свободного гамильтониана $\hat{H}_0$, найденный в [6], имеет конечно-разностную природу и состоит из операторов сдвига по мнимой оси в комплексной плоскости координаты r с шагом, пропорциональным комптоновской длине волны частицы $1/M$:

$$\hat{H}_0 = M\,\mathrm{ch}\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{i}{r}\,\mathrm{sh}\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\Delta_{\theta,\phi}}{2Mr^2}\exp\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right). \qquad /5/$$

Собственные функции оператора /5/ $\xi(\vec{q};\vec{n},r)$, удовлетворяющие условию $\hat{H}_0\,\xi(\vec{q};\vec{n},r) = E_q\,\xi(\vec{q};\vec{n},r)$, имеют вид [8]

$$\xi(\vec{q};\vec{n},r) = \left(\frac{q_0 - \vec{q}\,\vec{n}}{M}\right)^{-1-irM}. \qquad /6/$$

В нерелятивистском пределе функции /6/ очевидным образом переходят в обычные плоские волны $\exp(i\vec{q}\vec{r})$. Парциальное разложение релятивистской плоскости волны имеет вид [6,7]:

$$\xi(\vec{q};\vec{n},r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell\,(2\ell+1)\,p_\ell(\mathrm{ch}\,\chi_q, r)\,P_\ell\left(\frac{\vec{q}\,\vec{r}}{q\,r}\right), \qquad /7/$$

где $\chi_q = \mathrm{Arch}\,(q_0/M)$.

Функции

$$p_\ell(\mathrm{ch}\,\chi, r) = (-i)^\ell \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{sh}\,\chi}}\,\frac{(irM+\ell+1)}{\Gamma(irM+1)}\,P^{-1/2-\ell}_{-1/2+irM}(\mathrm{ch}\,\chi)$$

$$= i^\ell\,\frac{\Gamma(-irM+1)}{\Gamma(-irM+\ell+1)}\,(\mathrm{sh}\,\chi)^\ell \left(\frac{d}{d\,\mathrm{ch}\,\chi}\right)^\ell p_0(\mathrm{ch}\,\chi, r) \qquad /8/$$

с нулевой гармоникой

$$p_0(\mathrm{ch}\,\chi, r) = \frac{\sin rM\chi}{rM\,\mathrm{sh}\,\chi} \qquad /9/$$

являются релятивистским обобщением сферических функций Бесселя $j_\ell(qr)$.

Введем теперь собственные функции операторов квадрата полного спина S^2 и проекции спина на ось Z $\chi^{(S)}_\mu(\sigma)$

/в нашем случае $S=0,1$ /. Тогда с учетом /7/ для релятивистских плоских волн со спином будем иметь

$$\xi(\vec{q};\vec{n},r)\,\chi_{\mu}^{(S)}(\sigma)=$$

$$=4\pi\sum_{j\ell M} i^{\ell}\, p_{\ell}\;(\mathrm{ch}\chi_{q},r)\,\{\overset{*}{\Omega}{}^{(S)}_{j\ell M}(\vec{n}_{q})\}_{\sigma}\{\Omega^{(S)}_{j\ell M}(\vec{n})\}_{\mu}\,, \qquad /10/$$

где $\Omega^{(S)}_{jem}$ - шаровые спиноры, компоненты которых имеют обычный вид:

$$\{\Omega^{(S)}_{j\ell M}(\vec{n})\}_{\alpha}=<\ell M-\alpha\, S\,\alpha\,|\,jM>\;Y_{\ell,M-\alpha}(\vec{n})\,. \qquad /11/$$

Таким образом, угловая часть парциального разложения для плоской волны со спином /10/ в данном подходе имеет тот же вид, что и в нерелятивистском формализме. Изменению подвергнуты лишь радиальные функции, что позволяет использовать хорошо разработанные методы нерелятивистской квантовой механики.

Введем радиальную функцию $\omega^{j}_{\ell',s';\ell s}(r)$ с помощью аналогичного /10/ разложения

$$\Psi^{(S)}_{q,\mu}(\vec{r},\sigma)=\frac{4\pi}{r\,\mathrm{sh}\,\chi_{q}}\sum_{j\ell M\ell'S'}\omega^{j}_{\ell'S';\ell S}(r)\{\overset{*}{\Omega}{}^{(S)}_{j\ell M}(\vec{n})\}_{\sigma}\{\Omega^{(S')}_{j\ell M}(\vec{n})\}_{\mu}\,. \qquad /12/$$

Уравнение /3/ переходит в систему парциальных уравнений, которая в общем случае имеет вид *

$$(2E_{q}-2\hat{H}^{rad}_{0})\,\omega^{j}_{\ell'S';\ell S}(r)=\sum_{\ell''S''}\hat{v}^{j}_{\ell''S'';\ell S}(r;E_{q})\,\omega^{j}_{\ell''S'';\ell S}(r), \qquad /13/$$

где

$$\hat{H}^{rad}_{0}=M\,\mathrm{ch}\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\ell'(\ell'+1)}{2Mr^{(2)}}\exp\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right), \qquad /14/$$

*В /14/ $r^{(2)}$ представляет собой обобщенную степень, введенную в [9]: $r^{(\lambda)}=(i/M)^{\lambda}\,\Gamma(-irM+\lambda)/\Gamma(-irM)$.

$$v^{j}_{\ell'S';\ell S}(r;E_{q})=\int d\omega_{n}\,\overset{*}{\Omega}{}^{(S')}_{j\ell'M}(\vec{n})\,\hat{V}(\vec{r};E_{q})\,\Omega^{(S)}_{j\ell M}(\vec{n})\,. \qquad /15/$$

Матричные элементы $v^{j}_{\ell's';\ell s}(r;E_{q})$ в нашем случае квазипотенциала /2/ легко вычисляются. При этом, благодаря полному соответствию релятивистских спиновых структур квазипотенциала /2/ нерелятивистским спин-структурам, а также соответствию угловых частей парциальных разложений /5/, /7/ матричные элементы будут иметь формально тот же вид, что и в нерелятивистском случае. Отличие заключается в явных выражениях для фyнкций $\hat{V}_{S}$, $\hat{V}_{SL}$ и $\hat{V}_{T}$, которые в рамках модели одибозонного обмена были вычислены в [2].

Искомая система парциальных уравнений, описывающая взаимодействие двух релятивистских фермионов, имеет следующий вид:

$S=0,\ \ell'=j$

$$[2E_{q}-2M\,\mathrm{ch}\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{j(j+1)}{Mr^{(2)}}\exp\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right)]\,\omega_{j,0}=$$

$$=\hat{V}_{S}\,\omega_{j,0} \qquad /16/$$

$S=1,\ \ell'=j$

$$[2E_{q}-2M\,\mathrm{ch}\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{j(j+1)}{Mr^{(2)}}\exp\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right)]\,\omega_{j,1}=$$

$$=[\hat{V}_{S}+2\hat{V}_{T}]\,\omega_{j,1} \qquad /17/$$

$S=1,\ \ell'=j-1$

$$[2E_{q}-2M\,\mathrm{ch}\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{j(j-1)}{Mr^{(2)}}\exp\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right)]\,\omega_{j-1,1}=$$

$$=[\hat{V}_{S}+(j-1)\hat{V}_{SL}-\frac{2(j-1)}{2j+1}\hat{V}_{T}]\,\omega_{j-1,1}-\frac{6\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}\hat{V}_{T}\,\omega_{j+1,1} \qquad /18/$$

$S=1, \quad \ell' = j+1$

$$\left[2E_q - 2M\,\mathrm{ch}\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{(j+1)(j+2)}{M r^{(2)}}\right]\omega_{j+1,1} =$$

$$= \left[\hat{V}_S - (j+2)\hat{V}_{SL} - \frac{2(j+1)}{2j+1}\hat{V}_T\right]\omega_{j+1,1} - \frac{6\sqrt{j(j+1)}}{2j+1}\hat{V}_T\,\omega_{j-1,1}. \qquad /19/$$

Уравнения /16/ и /17/, описывающие взаимодействие в синглетном и в триплетном состояниях с $\ell' = \ell = j$, оказываются несвязанными. Связаны лишь два последних уравнения /18/, /19/ для состояний с $\ell' = j-1$ и $\ell' = j+1$, имеющих одинаковую четность.

Итак, предложенный в данной работе парциальный формализм для релятивистской системы двух частиц со спином в своей угловой части полностью аналогичен нерелятивистскому. Это создает определенные удобства для "релятивизации" нерелятивистских расчетов, для чего достаточно радиальные части потенциалов заменить соответствующими релятивистскими выражениями, а дифференциальные операторы - конечно-разностными.

Авторы выражают глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за постоянное внимание к работе, а также В.А.Матвееву, В.А.Мещерякову, Р.М.Мир-Касимову, А.Ф.Пашкову, Л.И.Пономареву, В.Н.Старикову, И.С.Шапиро за обсуждения и интерес к работе.

Дополнение

Приведем ряд потенциалов однобозонного обмена, записанных в терминах элементов пространства Лобачевского /1/.

После отделения вигнеровских вращений $D^{1/2}\{V^{-1}(\Lambda_p, k)\}$, имеющих кинематическую природу, в случае обмена псевдоскалярным и векторным мезонами матричные эле-

менты, отвечающие фейнмановским графам, могут быть записаны следующим образом:

$$g^2 \frac{\bar{u}^{\sigma_1}(\vec{p}_1)\,\Gamma_a\, u^{\sigma_1'}(\vec{k}_1)\;\bar{u}^{\sigma_2}(\vec{p}_2)\,\Gamma_a\, u^{\sigma_2'}(\vec{k}_2)}{\mu^2 - (p_1 - k_1)^2} =$$

$$= \sum_{\sigma_{1p}\sigma_{2p}} \langle \sigma_1 \sigma_2 | V^{(2)}(\vec{k}(-)\vec{p}) | \sigma_{1p}\sigma_{2p} \rangle D^{1/2}_{\sigma_{1p}\sigma_1'}\{V^{-1}(\Lambda_{p_1}, k_1)\} \times$$

$$\times D^{1/2}_{\sigma_{2p}\sigma_2'}\{V^{-1}(\Lambda_{p_2}, k_2)\}, \qquad /1.1/$$

где при

$$V_{PS}(k(-)p) = g^2_{PS} \frac{4(\vec{\sigma}_1\vec{\kappa}_1)(\vec{\sigma}_2\vec{\kappa}_2)}{\mu^2 + 4\vec{\kappa}_1^2}, \qquad /1.2/$$

а при $\Gamma_a = \gamma_\mu$ в системе центра масс ($\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$; $\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 = \vec{k}$)

$$V_V(\vec{k}(-)\vec{p};\vec{p}) = -g^2_V \frac{4M^2}{\mu^2 + 4\vec{\kappa}^2} -$$

$$- g^2_V \frac{4(\vec{\sigma}_1\vec{\kappa})(\vec{\sigma}_2\vec{\kappa}) - 4\vec{\kappa}^2(\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)}{\mu^2 + 4\vec{\kappa}^2} - g^2_V \frac{8p_0\kappa_0}{M^2}\, \frac{i(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)[\vec{p}\times\vec{\kappa}]}{\mu^2 + 4\vec{\kappa}^2}$$

$$- g^2_V \frac{8}{M^2}\, \frac{p_0^2\kappa_0^2 + 2p_0\kappa_0(\vec{p}\vec{\kappa}) - M^4}{\mu^2 + 4\kappa^2} -$$

$$- g^2_V \frac{8}{M^2}\, \frac{(\vec{\sigma}_1\vec{p})(\vec{\sigma}_1\vec{\kappa})(\vec{\sigma}_2\vec{p})(\vec{\sigma}_2\vec{\kappa})}{\mu^2 + 4\vec{\kappa}^2}, \qquad /1.3/$$

где $\vec\kappa$ - полупередача импульса в пространстве Лобачевского, реализуемого на верхнем поле гиперболоида $p_0^2 - \vec p^{\,2} = M^2$, связанная с передачей импульса

$$\vec\Delta = \vec k(-)\vec p = \vec k - \frac{\vec p}{M}\left(k_0 - \frac{\vec k\cdot\vec p}{p_0+M}\right) \qquad /1.4/$$

$$\Delta_0 = (k(-)p)_0 = (k_0 p_0 - \vec k\vec p)/M$$

соотношением

$$\vec\kappa = \vec\Delta\sqrt{\frac{M}{2(\Delta_0+M)}}\,. \qquad /1.5/$$

Форма квазипотенциала /1.2/ полностью аналогична виду соответствующего нерелятивистского потенциала

$$V_{PS}^{\text{нер}}(\vec k-\vec p) = g^2\frac{(\vec\sigma_1\vec\Delta_{1э})(\vec\sigma_2\vec\Delta_{2э})}{\mu + \vec\Delta^2_{1э}} = g^2\frac{4(\vec\sigma_1\vec\kappa_{1э})(\vec\sigma_2\vec\kappa_{2э})}{\mu^2 + 4\vec\kappa^2_{1э}}\,, \qquad /1.6/$$

где $\Delta_э = \vec k - \vec p$, $\vec\kappa_э = (\vec k - \vec p)/2$ - эвклидова передача и полупередача импульса.

Квазипотенциал /1.3/ представляет собой релятивистское, геометрическое обобщение потенциала Брейта, который записывается с точностью до членов v^2/c^2.

Образы /1.2/ и /1.3/ в релятивистском конфигурационном пространстве найдены в [2]. Необходимые для нашего случая релятивистские квазипотенциалы, соответствующие спин-орбитальным и тензорным силам, имеют вид

$$V_{SL}(r) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{E}{M}\frac{1}{r+i/M}\frac{1}{2i/M}\left[1-e^{-2\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}}\right](\vec S\vec L)\,V_{юк}(r) \qquad /1.7/$$

$$V_T(r) = \frac{1}{3}\frac{r^2}{(r+i/M)(r+2i/M)}\Big[\mu^2 + \frac{3\mu}{r}\left(1-\frac{\mu^2}{2M^2}\right)\frac{\text{th}\, rMa}{\sqrt{1-\mu^2/4M^2}} + \frac{1}{r^2}\,\frac{3-2\frac{\mu^2}{M^2}(1-\mu^2/4M^2) - \frac{3}{2\,\text{ch}\, rMa}}{1-\mu^2/4M^2}\Big]V_{юк}(r)\,, \qquad /1.8/$$

где $V_{юк}(r)$ - релятивистское обобщение потенциала Юкавы

$$V_{юк}(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi r}\dfrac{\text{ch}\, rMa}{\text{sh}\, rM\pi}\,, & \mu^2 < 4M^2\,, \quad a = \text{acr}\cos\dfrac{\mu^2-2M^2}{2M^2} \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi r}\dfrac{\cos rMb}{\text{sh}\, rM\pi}\,, & \mu^2 > 4M^2\,, \quad b = \text{Arch}\,\dfrac{\mu^2-2M^2}{2M^2}\,. \end{cases} \qquad /1.9/$$

Надо отметить, однако, что в уравнениях /17/, /18/ и /19/ следует использовать в качестве $\hat V_{SL}$ и $\hat V_T$ не просто функции /1.7/ и /1.8/, а несколько модифицированные выражения [3]. Так, например, квазипотенциалу $\hat V_T$ в уравнениях /16/, /17/ и /18/ соответствует сопряженная /1.8/ функция, взятая в точке $r-2i/M$. Спин-орбитальному взаимодействию отвечает оператор

$$\hat V_{SL} = -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{r+i/M}{r-i/M}\frac{1}{r}\frac{1}{i/M}\,\text{sh}\left(\frac{i}{M}\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\hat H_0}{M}\,. \qquad /1.10/$$

Скалярная часть квазипотенциала /4/ $\hat V_S(r)$, на основании /1.3/, определяется релятивистским потенциалом Юкавы /1.9/.

Литература

1. Н.Б.Скачков. ТМФ, 22, 213, 1975.
2. N.B.Skachkov, I.L.Solovtsov. JINR Preprint, E2–9763, Dubna, 1976.
3. N.B.Skachkov, I.L.Solovtsov. JINR Preprint, E2–10260, Dubna, 1976.
4. V.G.Kadyshevsky. Nucl.Phys., B6, 125, 1968.
5. V.G.Kadyshevsky, M.Mateev. Nuovo Cimento, 55A, 275, 1968.
6. V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir–Kasimov, N.B.Skachkov. Nuovo Cimento, 55A, 223, 1968.
7. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. ЭЧАЯ, т.2, вып. 3, 635, 1972.
8. И.С.Шапиро. ДАН СССР, 106, 647, 1956; ЖЭТФ, 43, 1727, 1962.
9. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. ЯФ, 9, 646, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел 24 декабря 1976 года.