СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10285

Ю.В.Катышев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ДВУХПОЛЕВЫХ СОЛИТОНОВ

1976

Р2 - 10285

Ю.В.Катышев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ДВУХПОЛЕВЫХ СОЛИТОНОВ

Катышев Ю.В. P2 - 10285

Об устойчивости некоторых двухполевых солитонов

Исследована поперечная устойчивость одномерных двухполевых солитонов моделей Фридберга-Ли-Сирлина и Монтонена.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Katyshev Yu.V. P2 - 10285

On Stability of Some Two-Field Solitons

Transversal stability of one-dimensional two-field Friedberg-Lee-Sirlin and Montonen soliton solutions is studied.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

Методом, изложенным в наших работах /I/, исследуем поперечную устойчивость одномерных скалярных солитонов, описываемых системой Фридберга-Ли-Сирлина /2/

$$\Box\chi + 2\varkappa^2\chi|\psi|^2 + \frac{1}{2}\chi(\chi^2-1) = 0,$$
$$\Box\psi + 2\varkappa^2\psi\chi^2 - \mu^2\psi = 0. \qquad \text{(I)}$$

При $\mu^2 = \varkappa^2/2$ солитонные решения системы (I) могут быть получены в явном виде

$$\chi_s = th(\mu x),$$
$$\psi_s = \sqrt{\frac{1-4\mu^2}{4\mu^2}}\, sch(\mu x)\, e^{-i\mu t}. \qquad (2)$$

В этом случае система (I) осуществляет экстремум действия

$$S = \int \mathcal{L}\, dx\, dt = -\frac{1}{2}\iint\Big[-|\psi_t|^2 + |\psi_x|^2 - \chi_t^2 + \qquad (3)$$
$$+\chi_x^2 + 2\mu^2\chi^2|\psi|^2 + \frac{1}{4}(\chi^2-1)^2\Big]dx\, dt.$$

Для исследования поперечной (в направлении У) устойчивости солитонных решений (2) выберем солитоноподобные пробные функции в виде

$$\chi = th(ax),$$
$$\psi = \sqrt{\frac{1-4a^2}{4a^2}}\, sch(ax)\, e^{-i\Phi}, \qquad (4)$$

где a и Φ являются функциями поперечной координаты y и времени t.

Подставляя пробные функции (4) в выражение для плотности лагранжиана

$$\mathcal{L}^{(y)} = -\frac{1}{2}\Big[-|\Psi_t|^2 + |\Psi_x|^2 + |\Psi_y|^2 - \chi_t^2 + \chi_x^2 + \chi_y^2 + 2\mu^2\chi^2|\Psi|^2 + \frac{1}{4}(\chi^2-1)^2 \Big], \tag{5}$$

интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$ и варьируя получающееся действие по a и Φ, получим систему уравнений движения

$$\left(\frac{1}{a^3} - \frac{4}{a}\right)(\Phi_{yy} - \Phi_{tt}) + \frac{\mu}{a^2}\left(\frac{3}{a^2} - 4\right) a_t = 0,$$

$$-\Phi_t^2\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{a^4} + \frac{2}{a^2}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}\mu^2\right)\frac{1}{a^2} + \frac{2}{3} - \frac{\mu^2}{a^4} + \tag{6}$$

$$+2(a_{tt} - a_{yy})\left(\frac{8a^7}{1-4a^2} + 2a + \frac{11}{36a^5} - \frac{7}{9}\frac{1}{a^3}\right) = 0.$$

Для исследования дисперсионных свойств системы уравнений (6) линеаризуем её вблизи солитонного решения (2) для возмущений типа плоской волны

$$a = \mu + \delta a \exp(-i\omega t + i k_y y), \quad \Phi = \mu t + \delta\Phi \exp(-i\omega t + i k_y y). \tag{7}$$

В линейном по возмущению приближении имеем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = k_y^2 + \frac{\mathcal{D}_1^2 \pm \sqrt{\mathcal{D}_1^4 + 2\mathcal{D}_2^2\mathcal{D}_3^2 k_y^2}}{\mathcal{D}_2^2}, \tag{8}$$

где
$$\mathcal{D}_1^2 = \frac{8}{3}\,\frac{(3-4\mu^2)(1-\mu^2)}{1-4\mu^2},$$

$$\mathcal{D}_2^2 = 4\left(\frac{8\mu^{10}}{1-4\mu^2} + 2\mu^4 + \frac{11}{36}\frac{1}{\mu^2} - \frac{7}{9}\right),$$

$$\mathcal{D}_3^2 = \frac{(3-4\mu^2)^2}{1-4\mu^2},$$

то есть для солитонных решений величины $Д_I$, $Д_2$, $Д_3$ всегда положительны. При Ку=0 из уравнения (8) имеем

$$\omega^2 = \frac{2\mathcal{D}_1^2}{\mathcal{D}_2^2} > 0,$$

что указывает на то, что двухполевой солитон (2) устойчив относительно продольных возмущений довольно общего вида (7).

Что касается его поперечной неустойчивости, то она имеет место лишь при

$$0 < K_y^2 < \frac{1}{6}\,\frac{3-4\mu^2}{\frac{8\mu^{10}}{1-4\mu^2} + 2\mu^4 + \frac{11}{36}\frac{1}{\mu^2} - \frac{7}{9}},$$

где μ – величина, определяющая ширину солитонов (2), причём $0 < \mu < \frac{I}{2}$. Тот факт, что даже такое частное солитонное решение (2) системы (I) оказывается поперечно устойчивым, говорит в пользу устойчивости сферически-симметричных солитонов ФЛС /2/ высших мод $n \neq I$ по отношению к несимметричным возмущениям (продольная устойчивость этих солитонов изучалась в работе /2/).

Аналогичным методом можно показать, что дисперсионное уравнение, описывающее устойчивость солитонных решений /3/

$$\chi = th(\mu x), \tag{9}$$

$$\psi = \sqrt{1-2\mu^2}\,\mathrm{sch}(\mu x)\, e^{-i\nu t}$$

системы уравнений

$$\begin{aligned} &\Box\psi + m^2\psi + (\chi^2-1)\psi + \psi|\psi|^2 = 0, \\ &\Box\chi + (|\psi|^2-1)\chi + \chi^3 = 0 \end{aligned} \tag{I0}$$

имеет вид, подобный дисперсионному уравнению (8), именно

$$\omega^2 = k_y^2 + \frac{E_1^2 \pm \sqrt{E_1^4 + 4E_2^2 E_3^2 k_y^2}}{E_2^2},$$

где положительные величины E_I^2, E_2^2, E_3^2 равны

$$E_1^2 = 2(1+2\mu^2)\left[\mu^2(1-2\mu^2) + \nu^2(1+2\mu^2)\right],$$

$$E_2^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{44}{3}\mu^4 - \frac{16}{3}\mu^2 + 5\right),$$

$$E_3^2 = \nu^2(1+2\mu^2)^2.$$

Двухполевой солитон (9) устойчив как в продольном, так и в поперечном направлениях.

Автор выражает свою искреннюю признательность В.Г.Маханькову за постановку задачи и плодотворные обсуждения, Е.П.Жидкову за постоянное внимание и поддержку, а также И.П.Недялкову за многочисленные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА:

I. Ю.В.Катышев, В.Г.Маханьков. ОИЯИ, Р4-9507, Дубна, 1976;
Yu.V.Katyshev and V.G.Makhankov, Phys.Letters 57A(1976) 10;
И.Л.Боголюбский, Е.П.Жидков, Ю.В.Катышев, В.Г.Маханьков, А.А.Расторгуев. ОИЯИ, Р2-9673, Дубна, 1976.

2. R.Friedberg, T.D.Lee and A.Sirlin, Phys.Rev. D13, 2739(1976).

3. C.Montonen, Nucl.Phys. B112, 349(1976).

Рукопись поступила в издательский отдел
8 декабря 1976 года.