ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 10264

П.Экснер, М.Гавличек, В.Ласснер

КАНОНИЧЕСКИЕ РЕАЛИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ. II

1977

P2 - 10264

П.Экснер,* М.Гавличек, В.Лассне

КАНОНИЧЕСКИЕ РЕАЛИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ. II

Направлено в Czech. Journ. Phys.

* Центр ядерной физики физико-математического факультета Карлова университета в Праге, ЧССР.

Экснер П., Гавличек М., Ласснер В. P2 - 10264

Канонические реализации классических алгебр Ли. Часть II

Изучена связь частных случаев предложенных в первой части работы канонических реализаций классических алгебр Ли с реализациями минимальными, с одной стороны, и с гипотезой Гельфанда-Кириллова - с другой.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

Exner P. et al. P2 - 10264

Canonical Realizations of the Classical Lie Algebras. II

The connection of the special cases of canonical realizytions of the classical Lie algebras, presented in the first part of this paper, with minimal realizations A_n, B_n , C_n , D_n , and with Gelfand-Kirillov conjecture is studied.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

Предлагаемая работа, которая является продолжением [1], посвящена обсуждению ранее определенных реализаций с точки зрения общих свойств проблемы алгебраического вложения. Особый интерес для нас представляют оба экстремальных случая, т.е. реализации с минимальным и максимальным числом канонических пар.

Вначале рассматриваются различные общие характеристики минимальных реализаций. Наши максимальные реализации представляют особый интерес с точки зрения гипотезы Гельфанда-Кириллова /эта гипотеза кратко рассматривается в гл. 2/. Мы покажем, что реализация Гельфанда-Кириллова алгебры Ли A_n "эквивалентна" некоторой реализации A_n многочленами по q_i и p_i .

1. *Минимальные реализации*

Рассмотрим теперь описанные реализации комплексных классических алгебр Ли относительно числа канонических пар и используемых параметров.

Существуют общие ограничения на число используемых канонических пар и параметров. Эти ограничения, определяющие нижние границы, существенно зависят от ранга алгебры Ли, что будет ясно из последующего.

Минимальное число $n_D(L)$ канонических пар, такое, что в теле частных $D_{2n_D(L)}$ существует нетривиальная реализация алгебры Ли L , выписано в нижеследующей таблице для комплексных классических алгебр Ли* /см. ссылку [2] и приведенную там литературу/

Таблица 1

	L	A_n	B_n	C_n	D_n
$n_D(L)=\min\limits_{m\in Z}\{m \mid$	$\exists$ нетривиальная реализация для L в $D_{2m}\}$	n	2n–2	n	2n–3

В теле частных $D_{2n_D(L)}$ существует, с точностью до "эквивалентности" (mod End $D_{2n_D(L)}$), только одна реализация, если $L=B_n, C_n, D_n$, и однопараметрический набор r_α, $\alpha\in C$ "неэквивалентных" реализаций для $L=A_n$.

Для минимального числа $n_W(L)$ канонических пар, для которого существует нетривиальная реализация для L полиномами по каноническим переменным, имеем /см. работы [2,3] /:

Таблица 2

	L	A_n	B_n	C_n	D_n
$n_W(L)=\min\limits_{m\in Z}\{m \mid$	$\exists$ нетривиальная реализация для L в $W_{2m}\}$	n	2n–1 или 2n–2	n	2n–2 или 2n–3

Реализация в $D_{2n_D(L)}$ и в $W_{2n_W(L)}$ называются минимальными реализациями. Напомним, что неопределенность, появляющуюся в последней таблице, можно устранить для $B_2 \sim C_2$, где $n_W(B_2)=2$. Важное свойство минимальных реализаций - это то, что они являются шур-реализациями [2]. Возникает вопрос, имеет ли это место также и для реализаций с большим числом используемых канонических пар. Ответ мы даем для реализаций в алгебре Вейля. Максимальное число $n_W^s(L)$

* Мы всегда полагаем $n\geq 1$ для A_n, $n\geq 2$ для B_n, $n\geq 3$ для C_n и $n\geq 4$ для D_n.

канонических пар, такое, чтобы все реализации L в $W_{2n^s_W(L)}$ были бы шур-реализациями, имеет следующие значения:

Таблица 3

		A_n	B_n	C_n	D_n
$n^s_W(L) = \max\limits_{m \in Z} \{ m$ |	Все реализации для L в W_{2m} являются шур-реализациями $\}$	n	$2n-1$	$2n-1$	$2n-2$

Значения, приведенные в таблице, вытекают из следующего утверждения.

Утверждение. Пусть $n_{min}(L)$ - минимальное число канонических пар, используемых в реализациях, описанных в гл. 2 [1] /см. *табл. 4*/. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$n_{min}(L) = n^s_W(L).$$

Это утверждение можно доказать следующим образом /см. ссылку [4] /: Для любой классической комплексной алгебры Ли существует в $W_{2n_{min}(L)}$ однопараметрический набор шур-реализаций /см. гл. 2/, а этот параметр существенен в том смысле, что от него зависят операторы Казимира. Теперь $n^s_W(L)$ не может быть больше $n_{min}(L)$: если бы добавить одну пару q', p' и заменить вышеупомянутый параметр, например, на q' , то получится не-шур-реализация в $W_{2(n_{min}(L)+1)}$. Это значит, что $n^s_W(L) \leq n_{min}(L)$. С другой стороны, $n_{min}(L)$ равно $n^s_W(L)$, для $L = A_n$, и поэтому остается только доказать, что $n^s_W(L) = n_{min}(L)$ также и для B_n , D_n и C_n. Доказательство для этих случаев несколько громоздко, поэтому мы не приводим его здесь. Отсылаем читателя к работе [3] относительно B_n , D_n и к работе [4] относительно C_n .

Отметим значительную разницу между числом пар для минимальных реализаций $n_D(C_n) = n_W(C_n)$ и $n_W^s(C_n)$. Разность $k(L) = n_W^s(L) - n_D(L)$ зависит от ранга n только для $L = C_n$.

Таблица 4

L	A_n	B_n	C_n	D_n
$k(L) = n_W^s(L) - n_D(L)$	0	1	$n-1$	1

Отметим еще, что в работе /4/ указано, что все реализации для C_n в $D_{2(2n-2)}$ связаны /в естественно обобщенном для D_{2N} смысле, см. /4/ / с некоторой стандартной минимальной реализацией в $D_{2n} \subset D_{2(2n-2)}$.

Реализация любой вещественной формы комплексной алгебры Ли L в $W_{2n_W^s(L)}$ должна тоже быть шур-реализацией. /В противном случае можно получить не-шур-реализацию алгебры Ли путем комплексификации этой вещественной формы, но это противоречит определению $n_W^s(L)$ /.

Как отмечено в гл. 3 /1/, не существует антиэрмитовых шур-реализаций компактной алгебры Ли в алгебре Вейля. Поэтому антиэрмитова реализация компактной действительной формы алгебры Ли L может иметь место в W_{2m} только, когда $m > n_W^s(L)$.

Поскольку в $W_{2(n_W^s(L)+1)}$ существует антиэрмитова реализация компактной действительной формы , то наименьшее m равно именно $n_W^s(L)+1$. Так, мы имеем:

Таблица 5

		A_n	B_n	C_n	D_n
$n_W^c(L) = \min\limits_{m \in Z} \{m \mid$	$\exists$ антиэрмитова реализация компактной действительной формы для L в W_{2m}. $\}$	$n+1$	$2n$	$2n$	$2n-1$

Для полноты картины и в качестве иллюстрации мы выпишем вышеупомянутые реализации в $W_{2n_W^c}(L)$, хотя они, вероятно, общеизвестны.

Легко проверить, что, если $X^a \in L$, $a = 1, 2, \ldots, N$, N - базисные элементы алгебры Ли L, (X^a_{ij}), $i,j = 1, 2, \ldots, m$ - матричное представление для X^a, а E_{ij} - любая реализация базисных элементов $g\ell(m, R)$ /см. *табл. 2*/ /1/, то формула

$$\hat{X}^a = \sum_{i,j} X^a_{ij} E_{ij}$$

дает каноническую реализацию L. Если (X^a_{ij}) - действительные матрицы, то имеет место антиэрмитова реализация ($\hat{X}^{a+} = -\hat{X}^a$) при $E^+_{ij} = -E_{ij}$. Тогда для $o(m)$ - компактной действительной формы B_n /и D_n /, $m = 2n+1$ $(m = 2n)$ получаем антиэрмитову реализацию, если в качестве X^a_{ij} взять стандартное $m \times m$-матричное представление, а в качестве E_{ij} - генераторы антиэрмитовой реализации $g\ell(m, R)$ в $W_{2(m-1)}$, например, в следующем виде:

$$E_{\mu\nu} = q_\mu p_\nu + \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} 1, \quad E_{m\mu} = -p_\mu,$$

$$E_{\mu m} = q_\mu (q_\nu p_\nu + \frac{m}{2}), \quad E_{mm} = -q_\nu p_\nu - \frac{m-1}{2} 1$$

/см. *табл. 3*/ /1/. Для компактных действительных форм $su(n)$ /соотв., $sp(2n)$ /, если взять стандартные представления, являющиеся антиэрмитовыми, генераторы $\hat{X}^a$ будут антиэрмитовыми при $E^+_{ij} = E_{ji}$, например, $E_{ij} =$

$$= \frac{1}{2}(p_i p_j + q_i p_j - q_j p_i - q_i q_j) \quad i,j = 1, 2, \ldots, n \text{/соотв., } 2n \text{ /.}$$

Характеристические числа канонических пар, рассмотренных в этой главе, приведены в *табл. 6*.

Таблица 6
Некоторые важные характеристики минимальных реализаций

L	A_n $n\geq 1$	B_n $n\geq 2$	C_n $n\geq 3$	D_n $n\geq 4$
$n_D(L)$	n	$2n-2$	n	$2n-3$
$n_W(L)$	n	$2n-1$ или $2n-2$	n	$2n-2$ или $2n-3$
$n_W^s(L)=n_{min}(L)$	n	$2n-1$	$2n-1$	$2n-2$
$n_W^c(L)$	$n+1$	$2n$	$2n$	$2n-1$

2. Гипотеза Гельфанда-Кириллова

В предыдущей главе анализировались реализации алгебр L, приведенные в гл.2 /1/, с сигнатурами $(1;0,\dots,0,a_n)$, т.е. с наименьшим числом канонических пар, и сравнивались с минимальными реализациями L. Теперь же мы хотим сравнить с известными результатами реализации с "противоположного конца" данного набора, т.е. реализации с максимальным числом $N(d_{max})=N(n)$ /см. /1/, *табл. 4*/ канонических пар.

С этой целью вкратце опишем так называемую гипотезу Гельфанда-Кириллова о структуре тела частных $D(G)$ алгебраической алгебры Ли G над коммутативным полем нулевой характеристики.

Сначала объясним некоторые алгебраические понятия, содержащиеся в этой гипотезе, но без несколько громоздких сложных подробностей, требуемых для доказательства существования рассматриваемых структур /см. /5,9,10/ /.

Пусть A - /некоммутативная/ ассоциативная алгебра без ненулевых делителей нуля. Предположим далее, что в A выполняется так называемое /левое/ оре-условие для любой пары (a,b) элементов, отличных от нуля, существуют элементы $c,d \in A$ такие, что $ca = db \neq 0$.

Тогда для A существует тело частных $D(A)$: Возьмем все формальные выражения $a^{-1}b$ и ba^{-1} , где $a,b \in A$, $a \neq 0$ и идентифицируем $a^{-1}b$ и cd^{-1} , если $ac = bd$; тогда из условия Орэ следует, что любое правое частное ba^{-1} можно переписать как левое частное $c^{-1}d$ и для двух левых частных $a^{-1}b$ и $c^{-1}d$ существует общий знаменатель. Таким образом, используя обычные определения ($a^{-1}b + a^{-1}c = a^{-1}(b+c)$ $(a^{-1}b)^{-1}(a^{-1}c) = b^{-1}c$ и т.д./ в теле частных можно формально проводить расчеты, как с обычными частными, если только тщательно сохранять порядок элементов в произведениях и частных.

Теперь пусть A будет обвертывающей алгеброй UG конечномерной алгебры Ли G . В алгебре UG выполняется левое и правое условие Орэ и существует тело частных $D(UG)$, кратко $D(G)$ /см./10/ , гл. 5/.

Затем, в качестве A берем алгебру Вейля $R_{N,n} = W_{2N} \times K[x_1,\dots,x_n]$ над полем K , причем центр алгебры Вейля расширен алгеброй $K[x_1, x_2,\dots,x_n]$ полиномов n коммутирующих переменных. Тело частных для $R_{N,n}$ обозначим $D_{N,n}(K)$ /5/. /Другими словами, $D_{N,n}(K)$ состоит из рациональных функций переменных $q_1,\dots, q_N, p_1,\dots,p_N, x_1,\dots,x_n$, для которых отличны от нуля только коммутаторы $[p_i, q_i] = 1$, $i = 1,2,\dots,N$ /.

Гипотеза Гельфанда-Кириллова: Если G - алгебраическая алгебра Ли над алгебраическим замкнутым коммутативным полем K нулевой характеристики, то $D(G)$ изоморфно $D_{N,n}(K)$, где n - так называемая степень трансцендентности центра и

$$N = \frac{1}{2}(\dim G - n). \qquad /1/$$

Если алгебра G является полупростой, n = рангу G .

Этот изоморфизм был доказан Гельфандом и Кирилловым для алгебр $gl(n,K)$, $sl(n,K)$ и любой нильпотентной алгебры Ли над K, а результаты были опубликованы вместе с гипотезой в 1965-66 гг./5/ Для полупростых алгебр Ли эта гипотеза была доказана в более слабой форме Гельфандом и Кирилловым в 1968 году/6/. /Тело частных $D(G)$ заменялось телом частных $\widetilde{D(G)}$ обвертывающей алгебры UG с конечно-расширенным центром/. Для разрешимых алгебр Ли над C гипотеза была проверена в 1973-74 гг. Иозефом/7/, Боро/8/ и МакКонелом/9/.

Абелланас и Алонсо доказали несуществование изоморфизма Гельфанда-Кириллова для алгебры G над полем R, которое не является алгебраически замкнутым /$G=E(2)$ - алгебра Ли эвклидовой группы плоскости, см. /11//.

3. Максимальные реализации

Под максимальными реализациями понимаются реализации из представленного набора с сигнатурами $n(n\,;\,a_1, \dots, a_n)$, т.е. с максимальным числом канонических пар $N(d_{max})=N(n)$ /см табл. 4/ /1/.

Из табл. 4 и 1 видно, что для всех четырех случаев выполняется следующее соотношение:

$$2N(n)+n=\dim L, \qquad L=A_n, B_n, C_n, D_n. \qquad /2/$$

Так как n = рангу L, $L=A_n, (B_n, C_n, D_n)$, то ясно, что соотношение /2/ совпадает с соотношением /1/ гипотезы Гельфанда-Кириллова, т.е. в обоих случаях используется одинаковое число канонических пар. Случайно ли это совпадение или нет? В этой главе мы попытаемся доказать, какого типа связь имеет место.

В наборе реализаций с сигнатурами $(n\,;\,a_1, \dots, a_n)$ параметры a_i считаются новыми элементами x_i, коммутирующими между собой и со всеми каноническими парами. Такая замена, очевидно, не меняет выводов гл. 2/1/, но теперь набор реализаций с сигнатурами $(n\,;\,a_1, \dots, a_n)$ переходят в одну реализацию алгебры L в алгебре Вейля $R_{N,n}=W_{2N}\otimes \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$, $N=N(n)=N(d_{max})$ с центром, расширенным алгеброй $\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ полиномов n коммутирующих переменных $x_1,\dots,x_n$.

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "i"'] & R_{N,n} \arrow[dd, "k"] \\
UL \arrow[ur, dashed, "\tilde{\tau}_1"] \arrow[dd, "j"'] & \\
 & D_{N,n} \\
D(L) \arrow[ur, "\tilde{\tilde{\tau}}_1"] \arrow[r, shift left, "\tau_0"] & D_{N,n} \arrow[u, "\vartheta"'] \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

Будем считать алгебру Ли $L=A_n(B_n,C_n,D_n)$ естественно вложенной в ее обвертывающую алгебру UL /путем вложения i /, а UL - естественно вложенной в ее тело частных D(L) /путем вложения j /. Символом τ_1 обозначена вышеупомянутая реализация, соответствующая сигнатуре $(n;\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ /см. гл. 2/, где параметры α_i заменены на переменные $x_1,\dots,x_n$. То, что реализации с сигнатурами являются шур-реализациями, означает теперь, что центр Z(UL) алгебры UL реализуется полиномами по $x_1,\dots,x_n$; $\tilde{\tau}_1(Z(UL))\subset Z(R_{N,n})=\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$. Символом $\tilde{\tau}_1$ обозначено продолжение реализации τ_1 алгебры τ_1 на алгебру L. Из определения алгебры UL непосредственно следует существование такого единственного продолжения /см./10/ /. Теперь возникает вопрос, можно ли $\tilde{\tau}_1$ продолжить на D(L). Ответ положителен в случае, когда $\tilde{\tau}_1$ - точная реализация алгебры UL. Тогда продолжение $\tilde{\tilde{\tau}}_1$ реализации $\tilde{\tau}_1$

$$\tilde{\tilde{r}}_1 : D(L) \to D_{N,n}$$

дается формулой

$$\tilde{\tilde{r}}_1 (a^{-1} b) = (\tilde{r}_1 (a))^{-1} \cdot \tilde{r}_1 (b). \qquad /3/$$

/Любой элемент $x \in D(L)$ можно записать в виде $x = a^{-1} b$; $a, b \in UL$ /. Реализация $\tilde{\tilde{r}}_1$ - точная реализация тела частных D(L). Реализация $\tilde{r}_1$ - точная, если ее ограничение к центру остается точной реализацией Z(UL)*. Последнее свойство следует из результатов работы /13/ для A_n и из результатов работы /14/ для B_n и D_n, где доказано, что генерирующие операторы Казимира равны алгебраически независимым симметричным полиномам параметров α_i, т.е. переменных x_i **.

Гипотеза Гельфанда-Кириллова гарантирует существование биективного гомоморфизма /т.е. изоморфизма/ r_0 алгебры D(L) на $D_{N,n}$. Следовательно, r_0^{-1} существует, и имеет место следующий эндоморфизм для $D_{N,n}$:

$$\theta : D_{N,n} \to D_{N,n}$$
$$\theta = \tilde{\tilde{r}}_1 \cdot r_0^{-1} \qquad /4/$$

/ θ - инъективно, поскольку r_0^{-1} и $\tilde{\tilde{r}}_1$ инъективны. Но θ не обязательно является суръективным /т.е. вообще неверно, что $\mathrm{Im}\,\theta = D_{N,n}$ /, что означает, что θ вообще не есть автоморфизм $D_{N,n}$, поскольку уже $\tilde{r}_1$ и даже

---

* Это - следствие того факта, что если L - полупростая алгебра, то любой двусторонний идеал $I \subset UL$ имеет ненулевое пересечение с центром Z(UL)./12/ Мы глубоко благодарны проф. Дж.Диксмье за информацию по этому вопросу.

** В указанных работах параметры α_i предполагались действительными, однако эти результаты справедливы также и для коммутирующих переменных x_i.

$\tilde{\tilde{r}}_1$ не обязательно суръективны для реализаций с сигнатурой $(n; a_1, \ldots, a_n)$, приведенных в гл. 2/[1] .

Из соотношения /4/ для реализации $\tilde{\tilde{r}}_1$ алгебры $D(L)$ в $D_{N,n}$ следует соотношение

$$\tilde{\tilde{r}}_1 = \theta \cdot r_0 . \qquad /5/$$

Таким образом, для алгебры A_n, где доказана гипотеза Гельфанда-Кириллова, сужение соотношения /5/ к алгебре $L = A_n$ ведет к следующему утверждению. Утверждение. Для реализации Гельфанда-Кириллова $r_0(A_n)$ алгебры Ли A_n в $D_{N,n}$ существует такой эндоморфизм θ тела частных $D_{N,n}$, что $\theta r_0(A_n) = r_1(A_n)$ является реализацией A_n в $R_{N,n}$.

Как отмечалось в гл. 2, гипотеза Гельфанда-Кириллова доказывалась в работе[6] для алгебр B_n, C_n, D_n лишь в ослабленном варианте изоморфизма между телом частных $\widetilde{D(L)}$ расширения $\widetilde{UL}$ алгебры UL /порожденного алгебраическим расширением $\widetilde{Z(UL)}$ центра $Z(UL)$/ и $D_{N,n}$. Если же гипотеза Гельфанда-Кириллова не справедлива в ее полном смысле для этих алгебр Ли, то тем не менее можно верить, на наш взгляд, в справедливость утверждения для алгебр $L = B_n, C_n, D_n$ с заменой $D(L)$ на $\widetilde{D(L)}$ при доказательстве.

В заключение авторы хотели бы поблагодарить проф. А.Ульмана за проявленный интерес к этой работе. Мы также благодарны проф. А.А.Кириллову и Д.П.Желобенко за полезные обсуждения и проф. Дж.Диксмье за информацию по вопросу, рассматриваемому в гл. 3. Один из авторов /В.Ласснер/ благодарит проф. И.Улегла за гостеприимство в Центре ядерной физики Пражского университета.

Литература

1. *П.Экснер, М.Гавличек, В.Ласснер. ОИЯИ, Р2-10263, Дубна, 1977.*
2. *A.Joseph.Comm.Math.Phys., 36, 325 /1974/.*
3. *M.Havlíček, P.Exner. Ann.Inst.Henri Poincare, 23 313 /1975/.*

4. M.Havlíček, W.Lassner. JINR, E2-9161, Dubna, 1975. (To appear in Int. Journ. of Theor. Phys.).
5. И.М.Гельфанд, А.А.Кириллов. ДАН СССР, 167, 503 /1966/; препринт математического института им. Стеклова АН СССР, Москва, 1965.
French transl. Publ. Math. France, 31 /1966/.
6. И.М.Гельфанд, А.А.Кириллов. ДАН СССР, 180, 775 /1968/.
Funkcional Ana. i Prilozen. 3, No. 1, 7-21 /1969/.
7. A.Joseph. Proc. Am. Math. Soc., 45, No. 1, 1-10 /1974/.
8. J.C.Mc.Connell, "Representations of Solvable Lie Algebras and the Gel'fand-Kirillov Conjecture", School of Mathematics, Univ. of Leeds, 1973 (preprint).
9. W.Borho, P.Gabriel, R.Rentschler. "Primideale in Einhüllenden Auflösbarer Lie-Algebren, Lecture Notes in Math., Vol. 357, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
10. N.Jacobson. "Lie algebras", Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., No. 10, Interscience, New York, 1962.
11. L.Abellanas, L.Martinez Alonso. Comm.Math.Phys., 43, 69-71 /1975/.
12. J.Dixmier. Algebras enveloppantes. Cahiers Scientifiques, 37, Paris, Gauthier-Villars, 1974, Sect. 4.2.2.
13. M.Havlíček, W.Lassner. Rep.Math.Phys., 9, 45 /1976/.
14. M.Havlíček, P.Exner. JINR, E2-8700, Dubna, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 января 1977 года.