ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P2 - 10263

П.Экснер, М.Гавличек, В.Ласснер

КАНОНИЧЕСКИЕ РЕАЛИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ. I

1977

Р2 - 10263

П.Экснер*, М.Гавличек, В.Ласснер

КАНОНИЧЕСКИЕ РЕАЛИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ. I

Направлено в "Czech. Journ. of Phys."

* Центр ядерной физики физико-математического факультета Карлова университета в Праге, ЧССР.

Экснер П. и др. P2 - 10263

Канонические реализации классических алгебр Ли. Часть I.

Определяются множества канонических реализаций классических алгебр Ли A_n, B_n, C_n, D_n. Эти реализации зависят от d параметров, $d = 1,2,...,n$ и все операторы Казимира в них кратны единице.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1977

Exner P. et al. P2 - 10263

Canonical Realizations of Classical Lie Algebra. 1

The sets of the canonical realizations of the classical Lie algebras A_n, B_n, C_n, D_n are defined. These realizations depend on d parameters, $d = 1,2,...,n$, and all Casimir operators are realized by constant multiples of identity element.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1977

1. Введение

Под канонической реализацией алгебры Ли L понимается, грубо говоря, некоторое выражение элементов алгебры L в виде функции квантовых канонических переменных p_i , q_i . Класс этих функций нужно, конечно, определить; в наиболее простом случае берется набор всех полиномов /с комплексными коэффициентами/ по некоторому числу N канонических пар p_i , q_i. Заметим, что этот набор фактически образует алгебру Вейля W_{2N} .

Итак, мы можем сказать, что наша проблема, в общем, это проблема алгебраического вложения L в другую алгебраическую структуру. Этой структурой может быть алгебра Вейля, но успешно используются также более широкие структуры, например, матричная алгебра Вейля, локализация алгебры Вейля или тело частных /определение см. в гл. 3 и 5[/12/]/.

Канонические реализации находят большое применение в квантовой теории, а также в теории представлений и в теории специальных функций. За последние годы резко возросло число публикаций по этой теме. Здесь мы не будем обсуждать их разнообразные применения, заинтересованного читателя отсылаем к работам[/1,2/].

Цель настоящей статьи - резюмировать наши предыдущие результаты[/3-9/] и описать некоторые общие свойства проблемы алгебраического вложения. Сперва при помощи простого рекуррентного метода построим наборы канонических реализаций для всех комплексных классических алгебр Ли /см. *табл. 1*/. Метод пригоден также и для вещественных форм этих алгебр, однако в этом случае нужно расширять класс используемых

Таблица 1

Классические алгебры Ли			
комплексная простая алгебра Ли	вещественные формы	размерность	Ограничение
A_n	$su(n+1)$ компактная $su(n+1-s,s)$, $s=1,2,\ldots[\frac{n}{2}]$ $s\ell(n+1,\mathbb{R})$ $s\ell(\frac{1}{2}(n+1),Q)$, $n+1$ – четное (Q кватерионы)	$n(n+2)$	$n \geq 1$
B_n	$so(2n+1)$ компактная $so(2n+1-s,s)$ $s=1,2,\ldots,n$	$n(2n+1)$	$n \geq 2$
C_n	$sp(2n)$ компактная $sp(2n-2s,2s)$, $s=1,\ldots,[\frac{n}{2}]$ $sp(2n,\mathbb{R})$	$n(2n+1)$	$n \geq 3$
D_n	$so(2n)$ компактная $so(2n-s,s)$, $s=1,2,\ldots,n$ $so(n,Q)$	$n(2n-1)$	$n \geq 4$

функций /для $o(m,n)$ используется матричное расширение W_{2N}, для $u(p,q)$ - матричное расширение локализации W_{2N} и т.д./. Полученные нами реализации имеют следующие свойства:

1. Все операторы Казимира реализуются кратными единичного элемента; это - то, что мы называем шуровскими реализациями или шур-реализациями.

2. Реализации вещественных алгебр Ли - антиэрмитовы; по существу, это означает, что, выбирая p_i , q_i в шредингеровском представлении, мы получаем антисимметричное представление соответствующей алгебры.

Все наши реализации зависят от определенного числа параметров /комплексных или действительных/, общепринятых как сигнатура реализации. Набор всех таких реализаций обладает следующим свойством:

3. Реализации L, различные по сигнатуре, являются "неэквивалентными" с точностью до эндоморфизма используемой нами структуры / W_{2N} и т.д./.

Вторая часть нашей работы /12/ посвящена обсуждению наших реализаций с точки зрения общих свойств проблемы алгебраического вложения. Особый интерес для нас представляют оба экстремальных случая, т.е. реализации с минимальным и максимальным числом канонических пар. С одной стороны, рассматриваются различные общие характеристики минимальных реализаций. С другой стороны, наши максимальные реализации представляют особый интерес с точки зрения гипотезы Гельфанда-Кириллова /см. гл. 2 /12//. Мы покажем, что реализация Гельфанда-Кириллова алгебры Ли A_n "эквивалентна" некоторой /полиномиальной/ реализации A_n многочленами по p_i и q_i .

Канонические реализации представляют собой продуктивный метод для построения представлений. Наиболее простой способ - это замена в реализации L в алгебре Вейля W_{2N} алгебраических элементов p_i , q_i их шредингеровским представлением. Тогда сразу же получаем представление L на соответствующем гильбертовом пространстве. Конечно, мы могли бы использовать какое-то другое представление для p_i , q_i и получить посредством этого дальнейшие представления для L. Этот способ построения представлений обладает двумя основными преимуществами:

1. Все алгебраические свойства представлений рассматриваются в "реализационной части" построения, аналитические же свойства можно тогда рассматривать отдельно;

2. В отличие от общепринятых построений этот метод не ограничен никаким условием интегрируемости, что представляет особый интерес, поскольку неинтегрируемые представления также могут быть полезны в физике.

Мы, однако, не будем следовать этой программе. Все рассмотрения в этой работе чисто алгебраического характера.

2. *Канонические реализации комплексных классических алгебр Ли*

Начнем с более точного определения наипростейшего набора функций, который будем использовать в дальнейшем.

Определение 1. /Комплексная/ алгебра Вейля W_{2N} - это ассоциативная алгебра с единичным элементом I, порожденная элементами q_i, p^j, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, для которых выполняются канонические коммутативные соотношения

$$[p^i, p^j] = [q_i, q_j] = 0, \quad [p^i, q_j] = \delta^i_j \, I. \qquad /1/$$

Используется обычная тензорная запись $p_i = g_{ij} p^j$, $q^i = g^{ij} p_j$; это особенно удобно с точки зрения вещественных форм. В этой главе /посвященной комплексным алгебрам/ принято, что $g_{ij} = \delta_{ij}$, поэтому можно использовать только нижние индексы.

Теперь рассмотрим более тщательно основные понятия, о которых шла речь во введении.

Определение 2. Каноническая реализация алгебры Ли L является гомоморфизмом* $\tau : L \to W_{2N}$. Отображение τ естественным образом продолжается до гомоморфизма $UL \to W_{2N}$ /UL - обвертывающая алгебра алгебры L /, обозначаемого тем же символом.

Определение 3. Каноническая реализация $\tau : L \to W_{2N}$ называется шуровской или шур-реализацией, если любой

---

*Заметим, что для простых алгебр L /которыми мы в основном интересуемся/ гомоморфное отображение $\tau : L \to W_{2N}$ или инъективно, или тривиально.

центральный элемент из UL реализуется кратным единичного элемента W_{2N}.

Определение 4. Пусть заданы две реализации τ и τ' алгебры L в W_{2N}. Мы говорим, что τ' связано с τ, если существует такой эндоморфизм θ алгебры W_{2N}, что $\theta \circ \tau = \tau'$. Далее, τ и τ' называются связанными реализациями, если либо τ' связано с τ, либо τ' с τ.

Реализации, которые будем строить в дальнейшем, определяются так называемыми сигнатурами:

Определение 5. Для любого натурального n и $d = 1, 2, \dots, n$ определим сигнатуру как конечную последовательность $\tilde{a}_{n,d} = (d; 0, \dots, 0, a_{n-d+1}, \dots, a_n)$, где $a_i \in \mathbf{C}$, $i = n-d+1, \dots, n$*.

Ниже дана таблица умножения классических алгебр Ли в базисах, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Теперь мы можем сформулировать нашу первую теорему.

Теорема 1 /рекуррентная теорема/. Пусть M_{ij} - генераторы алгебры Ли $g\ell(n, \mathbf{C})(B_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1})$, реализованные в W_{2m}. Тогда для любого $a \in \mathbf{C}$ полиномиальные выражения

$$K_{\mu\nu} = \mathcal{P}_{\mu\nu}(M_{ij}, q_1, p_1, \dots, q_N, p_N, a) \qquad /2/$$

являются генераторами алгебры Ли, $g\ell(n+1, \mathbf{C})$, B_n, C_n, D_n, реализованными в $W_{2(m+N)}$ /полиномы $\mathcal{P}_{\mu\nu}$ и числа N канонических пар всех четырех случаев приведены в *табл. 3*/. Данные реализации /2/ обладают следующими свойствами:

1/ Если M_{ij} генерирует шур-реализацию, то же самое делает и $K_{\mu\nu}$.

2/ Какие-либо две реализации /2/ с различными значениями параметра a не являются связанными.

3/ Две реализации /2/, отличающиеся лишь по реализации $g\ell(n, \mathbf{C})(B_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1})$, являются связанными

*Чтобы определить сигнатуру единым образом для всех классических алгебр Ли, мы используем определение, отличное от определения, используемого в работе /6/.

Таблица 2 **Базисы комплексных классических алгебр Ли**

алгебра Ли L	Базис
$A_n \simeq s\ell(n+1, C)$	$A_{ij}, A_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{n+1} E\delta_{ij}, \; E = \sum_{k=1}^{n+1} E_{kk}$ $[E_{ij}, E_{k\ell}] = \delta_{kj} E_{i\ell} - \delta_{i\ell} E_{kj}$ * $i, j, k, \ell = 1, 2, \ldots, n+1$.
$B_n \simeq o(2n+1, C)$	$L_{ij}, \; L_{ij} = -L_{ji}$ $[L_{ij}, L_{km}] = \delta_{jk} L_{im} - \delta_{i\ell} L_{jm} + \delta_{jm} L_{ki} -$ $- \delta_{im} L_{kj}$ $i, j, k, m = 1, 2, \ldots, 2n+1$
$C_n \simeq sp(2n, C)$	$X_{ij}, X_{ij} = -\epsilon_i \epsilon_j X_{-j\,-i}, \quad \epsilon_i = \operatorname{sgn} i$ $[X_{ij}, X_{km}] = \delta_{kj} X_{im} - \delta_{im} X_{kj} + \epsilon_i \epsilon_j \delta_{-jm} X_{k-i} +$ $+ \epsilon_i \epsilon_j \delta_{k-i} X_{-jm}$ $i, j, k, m = -n; n+1, \ldots, -1, 1, \ldots, n$
$D_n \simeq o(2n, C)$	Для L_{ij} имеют место те же перестановочные соотношения, что и для B_n $i, j = 1, 2, \ldots, 2n$

* E_{ij} образует базис $g\ell(n+1, C) = s\ell(n+1, C) + \{E\}$.

тогда и только тогда, когда соответствующие реализации связаны.

Доказательство этой теоремы можно найти в работе [6] для $g\ell(n+1, C)$, в работе [4], для B_n и D_n и в работе [8] для C_n. Фактически, эти доказательства проведены для вещественных форм соответствующих алгебр Ли, тем не менее, можно рассматривать их комплексификацию и считать, что параметр a принимает комплекс-

Таблица 3

Рекуррентные формулы

алгебра	N	$K_{\mu\nu} = \mathcal{P}_{\mu\nu}(M_{ij}, q_1, \ldots, p_N, \alpha)$
$g\ell(n+1, \mathbf{C})$	n	$E_{ij} = q_i p_j + M_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}$ $E_{n+1,i} = -p_i$ $E_{i,n+1} = q_i(q_j p_j + \frac{n+1}{2} - i\alpha) + q_j M_{ij}$ $E_{n+1,n+1} = -q_j p_j - (\frac{n}{2} - i\alpha)$ $i, j = 1, 2, \ldots, N = n$
$o(2n+1, \mathbf{C})$ $\simeq B_n$ $o(2n, \mathbf{C})$ $\simeq D_n$	2n–1 2n–2	$L_{ij} = q_i p_j - q_j p_i + M_{ij}$ $L_{k,N+1} = \frac{i}{2}(1 + q_j q_j) p_k - i q_k R - i q_j M_{jk}$ $L_{k,N+2} = -\frac{1}{2}(1 - q_j q_j) p_k - q_k R - q_j M_{jk}$ $L_{N+1,N+2} = -iR = i q_j p_j + (-\alpha + \frac{i}{2} N)$ $i, j, k = 1, 2, \ldots, N$
$sp(2n, \mathbf{C})$ $\simeq C_n$	2n –1	$X_{ij} = q_i p_j - \epsilon_i \epsilon_j q_{-j} p_{-i} + M_{ij}$ $X_{jn} = q_j(q_i p_i + n - i\alpha) - \epsilon_j q_0 p_{-j} + M_{jk} q_k$ $X_{nj} = -p_j - \epsilon_j q_{-j} p_0$ $X_{n\,-n} = -2p_0$ $X_{-n\,n} = 2q_0(q_j p_j + n - i\alpha) + \epsilon_k M_{-k\,j} q_k q_j$ $X_{nn} = -q_0 p_0 - q_j p_j - (n - i\alpha)$ $i, j, k = -n+1, -n+2, \ldots, -1, 1, \ldots, n-1$

П р и м е ч а н и е: Суммирование, если не выписано в явном виде, подразумевается по каждой паре повторяющихся индексов. Исключение составляет алгебра $sp(2n, \mathbf{C})$, где индексы ϵ_i не принимаются во внимание.

ные значения, и тогда можно непосредственно использовать эти доказательства /ограничение действительными параметрами для реализаций вещественных форм обусловлено лишь антиэрмитовостью, см. след. гл./.

Схема рекуррентного построения реализаций теперь очевидна. Для примера, возьмем $o(2n+1, \mathbb{C}) \sim B_n$: сначала введем $a = a_n$ в /2/, где соответствующая реализация для $o(2n-1, \mathbb{C})$ получается из /2/ с $a = a_{n-1}$ и т.д. Если на d-вом этапе введем тривиальную нулевую реализацию $o(2n-2d+1, \mathbb{C})$ в /2/, то процедура закончена и мы получим реализацию B_n, характеризуемую d комплексными числами, которые мы вводим в сигнатуру $(d; 0, \ldots, a_{n-d+1}, \ldots, a_n)$. Подобная простая индукция ведет к реализациям C_n и D_n.

Построение реализаций A_n несколько отличается: реализации $g\ell(n+1, \mathbb{C})$ строим аналогично предыдущему, но теперь на d-вом этапе вводим "тривиальную реализацию"

$$E_{ij} = i \frac{a_{n-d+1}}{n-d+1} \delta_{ij} I$$

для $g\ell(n+1-d, \mathbb{C})$. Окончательная реализация $g\ell(n+1, \mathbb{C})$ характеризуется сигнатурой $\tilde{a}_{n+1,d+1} = (d+1; 0, \ldots, a_{n+1-d}, \ldots, a_{n+1})$.

Соответствующая реализация подалгебры $s\ell(n+1, \mathbb{C})$ дана генераторами $A_{ij} = E_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{n+1} \sum_\ell E_{\ell\ell}$. Различные сигнатуры, дающие в соответствии с теоремой 1 несвязанные реализации $g\ell(n+1, \mathbb{C})$, могут приводить, тем не менее, к связанным реализациям подалгебры $s\ell(n+1, \mathbb{C}) \subset g\ell(n+1, \mathbb{C})$. В работе [6] доказано, что достаточно ограничиться сигнатурами $\tilde{a}_{n+1,d+1}$, для которых выполняется условие $a_{n+1-d} + \ldots + a_{n+1} = 0$; такие сигнатуры дают несвязанные реализации подалгебры $s\ell(n+1, \mathbb{C})$, а любая оставшаяся реализация $g\ell(n+1, \mathbb{C})$ дает реализацию $s\ell(n+1, \mathbb{C})$, которая связана с одной реализацией этого типа. Чтобы получить формальное согласие с классификациями остальных классических алгебр Ли, далее в тексте мы будем характеризовать реализацию $s\ell(n+1, \mathbb{C})$, заданную реализацией $g\ell(n+1, \mathbb{C})$ с сигнатурой $\tilde{a}_{n+1,d+1} = (d+1; 0, \ldots, a_{n-d+1}, \ldots, a_{n+1})$, причем $a_{n-d+1} + \ldots$

$+\alpha_{n+1} = 0$, сигнатурой $\tilde{\alpha}_{n,d} = (d;0,\dots,0,\dots,\alpha_{n-d+2},\dots,\alpha_{n+1})$.
Просуммируем вышеприведенные построения:
Теорема 2. Для любой сигнатуры

$$\tilde{\alpha}_{n,d} = (d;0,\dots,0,\alpha_{n-d+1},\dots,\alpha_n)$$

существуют канонические реализации всех классических алгебр Ли A_n, B_n, C_n, D_n в $W_{2N(d)}$. Эти реализации получаются рекуррентным способом с помощью выражения /2/ /и ограничением на $s\ell(n+1,\mathbf{C})$ для A_n / и характеризуются d комплексными параметрами этой сигнатуры. В *табл. 4* выписано число N(d) канонических пар для всех 4 случаев. Кроме того, 1/ любая реализация из описанного набора - шуровская, 2/ две такие реализации A_n, B_n, C_n, D_n являются связанными тогда и только тогда, когда их сигнатуры равны.

Таблица 4

	Число канонических пар N(d)			
число параметров	1	d	n	$d-1 \to d$
алгебра	$N(1)=N_{min}$	$N(d)$	$N(n)=N_{max}$	$\Delta N(d)=N(d)-N(d-1)$
A_n	n	$\frac{1}{2}d(2n-d+1)$	$\frac{1}{2}n(n+1)$	$n-d+1$
B_n	$2n-1$	$d(2n-d)$	n^2	$2(n-d)-1$
C_n	$2n-1$	$d(2n-d)$	n^2	$2(n-d)-1$
D_n	$2n-2$	$d(2n-d-1)$	$n(n-1)$	$2(n-d)$

3. *Канонические реализации некомпактных действительных форм*

Результаты, полученные в предыдущей главе, можно легко конкретизировать для различных вещественных форм классических алгебр Ли /см. *табл. 1*/. Определения канонической реализации, шур-реализации и связанных реализаций не изменятся, если комплексную алгебру L заменить одной из ее вещественных форм.

В случае вещественных алгебр Ли, с точки зрения применения в теории представлений и физике, мы будем в основном интересоваться антиэрмитовыми реализациями. Определим инволюцию "+" на W_{2N}, индуцированную соотношениями

$$q_i^+ = q_i \ , \quad p_i^+ = -p_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, N \ .$$

Определение 6. Каноническая реализация r вещественной алгебры Ли L в W_{2N} называется антиэрмитовой, если $r^+(z) = -r(z)$ для всех $z \in L$.

Условие антиэрмитовости значительно усложняет задачу построения реализаций.

Для некоторых вещественных форм имеются серьезные основания необходимости расширения алгебры Вейля, если мы хотим получить богатый набор реализаций аналогично случаю комплексных форм. Проиллюстрируем это для $o(m,n)$, $m+n \geq 3$. Можно построить ее реализации при помощи рекуррентных формул типа /2/ /см. работу /4/ /: $o(m,n) \to o(m-1,n-1) \to \ldots \to o(m-n)$. Последняя алгебра - компактна, и в работе /10/ доказано, что не существует антиэрмитовой шур-реализации компактной алгебры в алгебре Вейля. Поэтому, если мы хотим реализовать $o(m,n)$ в W_{2N} для некоторого N, мы должны прекратить рекуррентный процесс не позднее чем после n этапов. Поэтому, по сравнению с комплексным случаем, мы не получим реализации с сигнатурами с максимальным числом r / r - ранг алгебры Ли/ параметров a_i. Аналогичная ситуация имеет место для $u(m,n)$.

Можно было бы искать расширение W_{2N} в теле частных* D_{2N}, но мы не знаем ни одного примера нетривиальной антиэрмитовой шур-реализации компактной алгебры Ли в D_{2N} /для обычной инволюции/. Поэтому возьмем другое более простое расширение: матричную алгебру Вейля $W_{2N,M} = W_{2N} \otimes \mathfrak{Mat}_M$, где $\mathfrak{Mat}_M$ - ал-

---

* Определение см. в гл. 2 /12/. Здесь символ $D_{N,n}(k)$ определен, а $D_{2N} = D_{N,0}(\mathbb{C})$. Грубо говоря, D_{2N} состоит из рациональных функций канонических пар.

гебра комплексных $M\times M$ матриц. Теперь можно продолжить рекуррентный процесс с помощью $M\times M$ матричного представления компактной алгебры Ли. Еще одним преимуществом этого расширения является то, что здесь в рекуррентном процессе используется известная классификация антиэрмитовых представлений компактных алгебр Ли /в терминах конечно-мерных матриц/. Таким образом, наборы реализаций существенно обогащаются. Для получения антиэрмитовых реализаций $u(m,n)$ мы расширим далее алгебру Вейля W_{2N} в $W_{2N}\otimes \mathfrak{Mat}_M$ к локализации $W^r_{2N}=\underbrace{W^1_2\times\ldots\times W^1_2}_{r-\text{крат}}\times W_{2(N-r)}$, где $W^1_2=\{q^{-k}\cdot x\mid x\in W_2,$ $k=0,1,\ldots\}$ - алгебра полиномов, линейное пространство которой натянуто на базисные элементы $q^k\cdot p^\ell$, $k=0,\pm 1,\ldots$, $\ell=0,1,2,\ldots$ Итак, окончательно получаем расширение алгебры Вейля W в виде

$$W^r_{2N,M}=W^r_{2N}\times\mathfrak{Mat}_M,$$

которое достаточно богато, чтобы допустить антиэрмитову шур-реализацию всех рассмотренных вещественных форм:

Таблица 5

Типы используемых структур

вещественная форма	$s\ell(n,R)$	$u(m,n)$	$o(m,n)$	$sp(2n,R)$
реализация $\flat$	$W_{2N}\simeq W^\circ_{2N,1}$	$W^r_{2N,M}$	$W_{2N,M}=W^\circ_{2N,M}$	W_{2N}
работа	/6/	/11/	/4/	/8/

В *табл. 5* можно было бы также включить и компактные вещественные формы. Но тогда возникает вопрос: существует ли антиэрмитова шур-реализация компактной алгебры Ли, отличная от матричного представления в $W^r_{2N,M}$? Ответ - в следующем утверждении, которое можно доказать путем обобщения доказательства, данного в работе /4/ для частного случая $W^\circ_{2N,M}$.

Утверждение: Любая антиэрмитова шур-реализация компактной алгебры Ли $\mathbb{L}$ в $\mathbb{W}^r_{2N,M}$ /т.е. гомоморфизм $\mathbb{L} \to \mathbb{W}^r_{2N,M}$ / не зависит от канонических переменных. Другими словами, такая реализация является обычным матричным представлением $\mathbb{L}$ в $\mathfrak{Mat}_M \simeq \mathbb{W}^\circ_{0,M} \subseteq \mathbb{W}_{2N,M}$.

Таким образом, проблема нахождения "истинных" канонических антиэрмитовых шур-реализаций в $\mathbb{W}^r_{2N,M}$ существует фактически лишь для некомпактных вещественных форм, в то время как для компактных вещественных форм это сводится к обычным матричным представлениям. Реализации различных вещественных форм подробно рассматриваются в наших предыдущих работах*. Построение всегда проводится при помощи рекуррентных формул аналогично теореме 1.

Не будем повторять эти построения, ограничимся примером построения реализаций для $o(3,2)$ и $o(4,1)$.

Для базисных элементов этих алгебр $L_{\mu\nu}$, $L_{\mu\nu} = -L_{\nu\mu}$, $\mu,\nu = 1,2,..,5$ выполняются следующие перестановочные соотношения:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} L_{\rho\mu} - g_{\mu\sigma} L_{\rho\nu},$$

где $g_{\mu\nu} = (1,-1,1,-1,1)$ для $o(3,2)$ и $g_{\mu\nu} = (1,1,1,-1,1)$ для $o(4,1)$.

В обоих случаях все наши реализации задаются формально теми же формулами, что и приведенные в *табл. 3*:

$$L_{kj} = q_k p_j - q_j p_k + M_{kj},$$

$$L_{k4} = \frac{1}{2}(1+q^2) p_k - q_k (qp + \frac{3}{2} - i\alpha_2) + q^j M_{jk}, \qquad /3/$$

$$L_{k5} = \frac{1}{2}(1-q^2) p_k + q_k (qp + \frac{3}{2} - i\alpha_2) - q^j M_{jk},$$

---

* Мы получили также формулы, дающие в явном виде все генерирующие операторы Казимира в рассматриваемых реализациях. Операторы Казимира выражаются через конкретные симметричные полиномы по линейным функциям параметров α_i сигнатуры /см. работы /5,7/ /.

$$L_{45} = -qp - \frac{3}{2} + i\alpha_2 I \quad , \quad \alpha_2 \in R \quad , \quad j,k = 1,2,3,$$

где $q^j = g^{jk} q_k, q^2 = q^j q_j, qp = q^j p_j$ и $M_{kj} = -M_{jk}$ - генераторы реализации алгебры Ли $o(2,1)$ в случае $o(3,2)$ или $o(3)$ в случае $o(4,1)$, соответственно.

Отметим, что все формулы /3/ /с учетом коммутатора /1/ гл. 2/ входит метрический тензор $(g_{\mu\nu})$, чем существенно отличается случай $o(3,2)$ от $o(4,1)$.

1. "Вырожденная" реализация как для $o(3,2)$, так и для $o(4,1)$, которой мы приписываем сигнатуру *$(1;0,\alpha_2)$, следует из уравнений /3/, если положить $M_{jk}=0$. Эта реализация содержится в W_6 и зависит от одного вещественного параметра.

2. "Невырожденная" реализация $o(3,2)$, соответствующая сигнатуре $(2;\alpha_1,\alpha_2)$, следует из уравнений /3/, если заменить M_{ij} /которые порождают теперь $o(2,1)$ алгебру/ на следующую антиэрмитову шур-реализацию в W_2:

$$M_{12} = \frac{1}{2}(1-q_3^2)p_3 - (\frac{1}{2} - i\alpha_1),$$

$$M_{13} = \frac{1}{2}(1+q_3^2)p_3 + q_3(1-i\alpha_1),$$

$$M_{23} = -q_3 p_3 - (\frac{1}{2} - i\alpha_1) I, \quad \alpha_1 \in R.$$

Получающаяся реализация $o(3,2)$ содержится в W_8 и зависит от двух действительных параметров.

3. "Невырожденная" реализация $o(4,1)$, соответствующая сигнатуре $(2;j,\alpha_2)$, $j=0,\frac{1}{2},1,\ldots$, следует из уравнений /3/, если заменить генераторы M_{ij} алгебры Ли $o(3)$ на $(2j+1)$-размерное неприводимое антиэрмитово

---

* Определения сигнатур для действительных форм аналогичны определению 5; их можно найти в цитированных выше работах.

матричное представление. Эта реализация $o(4,1)$ содержится в матричной алгебре Вейля $W_{6,2j+1}$.

Все описанные реализации являются шуровскими и антиэрмитовыми, реализации с различными сигнатурами являются несвязанными.

Литература

1. *P.Cordero, G.C.Ghirardi. Fortschr. d.Phys., 20, 105-133 /1972/.*
2. *K.B.Wolf. The Heisenberg-Weyl Ring in Quantum Mechanics. CIMAS, Cimmunicaciones Technicas Ser. B, vol. 4, No. 50 (See also "Group Theory and its Applications III" Ernest P.Loebl, editor, Academic Press).*
3. *M.Havlíček, P.Exner. Ann.Inst. Henri Poincare, 23, 313 /1975/.*
4. *M.Havlíček, P.Exner. Ann. Inst. Henri Poincare, 23, 335 /1975/.*
5. *M.Havlíček, P.Exner. "Matrix Canonical Realizations of the Lie Algebra* $o(m,n)$. *II. Casimir Operators", JINR, E2-8700, Dubna, 1975.*
6. *M.Havlíček, W.Lassner. Rep. Math. Phys., 8, 391 /1975/.*
7. *M.Havlíček, W.Lassner. Rep.Math.Phys., 9, 45 /1976/.*
8. *M.Havlíček, W.Lassner. "Canonical Realizations of the Lie Algebra* $sp(2n, R)$ *". JINR, E2-9160, Dubna, 1975. (To appear in Int. Journ. of Theor. Phys.).*
9. *M.Havlíček, W.Lassner. "On the Near to Minimal Canonical Realizations of the Lie Algebra* C_n *". JINR, E2-9161, Dubna, 1975. (To appear in Int. Journ. of Theor. Phys.).*
10. *A.Joseph. Journ. Math. Phys., 13, 351 /1972/.*
11. *M.Havlíček, W.Lassner. "Matrix Canonical Realizations of the Lie Algebra* $u(p,q)$ *". JINR, E2-9617, Dubna, 1976 (To appear in Rep . Math. Phys.).*
12. *П.Экснер, М.Гавличек, В.Ласснер. Канонические Реализации классических алгебр Ли. I. ОИЯИ, Р2-10264, Дубна, 1976.*

Рукопись поступила в издательский отдел
30 января 1977 года.