ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10251

Н.А.Черников

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО КАК ФИЗИЧЕСКАЯ НАУКА

1976

P2 - 10251

Н.А.Черников

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО КАК ФИЗИЧЕСКАЯ НАУКА

Направлено в сборник "Материалы Всесоюзной научной конференции по неевклидовой геометрии. 150 лет геометрии Лобачевского".

Черников Н.А.

Р2 - 10251

Геометрия Лобачевского как физическая наука

Освещается роль геометрии Лобачевского в развитии современной теоретической физики.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Chernikov N.A.

P2 - 10251

The Lobachevsky Geometry as a Physical Science

A role of the Lobachevsky geometry in the development of the modern theoretical physics is analysed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

К тому времени, когда геометрии Лобачевского исполнилось сто тридцать лет, выяснилось, что законы сохранения импульса и энергии при столкновениях релятивистских частиц эквивалентны паре архимедовых законов рычага /если рассматривать рычаг в пространстве скоростей Лобачевского/. Выяснилось, что в предельном случае, когда треугольник вырождается в рычаг Архимеда, формула Лобачевского для дефекта углов треугольника дает формулу $\Delta E = \Delta m c^2$ для дефекта массы, где скорость света c есть константа Лобачевского для пространства скоростей. Выяснилось также, что формулы Лобачевского для длины окружности и площади круга по сути дела являются формулами для импульса и кинетической энергии релятивистской частицы. Наконец, выяснилось, что наряду с законами Архимеда для рычага достаточно знать тригонометрию Лобачевского, чтобы научиться без большого труда выполнять так называемый кинематический расчет любой ядерной реакции.

Скажу сильнее: в своей бесспорной и завершенной части релятивистская механика оказалась изоморфной геометрии Лобачевского.

В результате двадцатилетней пропаганды этих знаний геометрия Лобачевского все чаще становится рабочим инструментом в руках физиков, изучающих микромир, а сам Лобачевский становится понятным, как понятен Архимед.

Поэтому вместе с геометрами и физики отмечают стопятидесятилетие геометрии Лобачевского как великий праздник мировой науки.

Поначалу приходилось преодолевать психологический барьер: зачем еще изучать геометрию Лобачевского, когда и так все можно подсчитать по известным формулам теории относительности. Однако изучение геометрии Лобачевского окупается сторицей. Объясняется это тем, что геометрия Лобачевского приводит к глубокому пониманию теории относительности, наделяет ее сильными и еще не известными ей методами, а также устанавливает тесную связь теории относительности с многовековой историей проблемы параллельных.

Известно, что к концу прошлого века геометрия Лобачевского завершила свое триумфальное шествие и ее идеи, как говорится, носились в воздухе. Поэтому уже в ранних работах по теории относительности замечалось, что в ее основе лежит геометрия Лобачевского. Так, в 1909 году релятивистский закон сложения скоростей был истолкован А.Зоммерфельдом /1/ на основе геометрии сферы мнимого радиуса. Но еще создатели новой геометрии - Лобачевский и Бойяи независимо друг от друга отмечали, что она совпадает с геометрией мнимой сферы. В 1910 году В.Варичак /2/ уже прямо указал на аналогию между сложением релятивистских скоростей и сложением отрезков на плоскости Лобачевского. На то же самое обратили внимание Г.Герглотц /3/ и А.А.Роб /4/. С точки зрения геометрии Лобачевского Варичак интерпретировал преобразования Лоренца и формулы Эйнштейна для аберрации, эффекта Допплера и отражения света от движущегося зеркала. Затем Ф.Клейн /5/ доказал, что группа Лоренца изоморфна группе изометрий пространства Лобачевского.

Еще более глубокие результаты получил в 1923 г. А.П.Котельников /6/. Представив скорость частицы в виде бесконечно удаленной точки пространственно-временного мира, он определил проективное пространство скоростей. В этом пространстве скорости частиц с нулевой массой покоя располагаются на абсолюте - поверхности второго порядка. Скорости частиц с массой покоя, большей нуля, изображаются точками внутри абсолюта. Область проективного пространства скоростей, лежащая внутри абсолюта, есть пространство Лобачевского с характерной константой, равной скорости света c. Точки вне абсолюта представляют скорости частиц с мнимой массой покоя, недавно получивших удачное название тахионов. В нерелятивистском пределе $c \to \infty$ абсолют вырождается в плоскость, и различие между тахионами и частицами с нулевой массой покоя пропадает. Пространство же скоростей частицы с массой покоя, большей нуля, становится евклидовым.

В течение трех-четырех десятилетий мало кто из физиков обращал внимание на эти результаты. К середине пятидесятых годов во всей физической литературе память о них сохранилась лишь в монографии В.Паули /7/, где говорится, что связь теории относительности с геометрией Лобачевского становится очевидной, если рассматривать геометрию в проективной схеме Кэли-Клейна. Результаты же Котельникова, опубликованные после того, как была написана монография Паули, в физической литературе и вовсе не упоминались. Не известной физикам оставалась и замечательная статья П.А.Широкова /8/.

Однако пространство скоростей Лобачевского - слишком важное физическое понятие, чтобы его можно было похоронить в библиотеках. К началу 1956 года вышла в свет книга В.А.Фока /9/, в которой оно снова появилось. К нему Фок пришел, исходя из формулы Эйнштейна-Пуанкаре для относительной скорости частиц и опираясь на известную модель Бельтрами. В то же время в Институте ядерных проблем АН СССР я докладывал о независимо полученных мною результатах, с изложения которых начинается данный обзор. Наряду с другими эти результаты опубликованы в работах /10/.

Неоправданный разрыв между физиками и геометрами продолжает существовать. Ведь и сейчас далеко не все специалисты знают, что, применяя теорию относительности к физике высоких энергий, по существу имеют дело с геометрией Лобачевского. Незнание этого зачастую приводит к непроизводительной затрате сил: заново открывать геометрию Лобачевского - дело трудное и, конечно, лавров уже не приносящее. Проще ее изучить по хорошим учебникам.

Надо всеми мерами стараться ликвидировать этот разрыв. Поэтому пользуюсь случаем и перехожу к сути дела.

Пространственно-временной мир есть гладкое четырехмерное многообразие M. Мировая траектория частицы есть гладкая кривая в M. Касательная прямая к мировой траектории частицы в некоторой точке x есть мировая скорость частицы в точке $x \in M$. Таким образом, пространство скоростей в точке $x \in M$ есть трехмерное проективное пространство $V(x)$. Семимерное многообразие $F = V(M) = \bigcup\limits_{x \in M} V(x)$ всех скоростей есть расслоенное пространство /косое произведение/ с базой M и со слоем $V(x)$ над точкой $x \in M$. Причем, если x^{α} - координаты на многообразии M, то дифференциалы dx^{α} являются однородными координатами в проективном пространстве $V(x)$.

Выделим обычные частицы, указывая область $V^{+}(x)$ в $V(x)$, которая для них доступна, и считая, что в этой области действует абсолютная геометрия. Так условно называют ту часть элементарной геометрии, которая не зависит от постулата о параллельных. Столь же условно говорим, что имеем дело с нерелятивистским случаем, если вопрос о параллельных в $V^{+}(x)$ решается в пользу Евклида, и с релятивистским случаем, если он решается в пользу Лобачевского.

В релятивистском случае область $V^{+}(x)$ задаем с помощью квадратичной формы

$$d\tau^2 = \theta_{\alpha\beta}(x)\, dx^{\alpha} dx^{\beta} \qquad /1/$$

нормального гиперболического типа. Это значит, что можно так выбрать координаты

$$x^0 = t\ , \ x^1 = x\ , \ x^2 = y\ , \ x^3 = z, \qquad /2/$$

что в рассматриваемой точке $x \in M$ форма /1/ будет равняться

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad /3/$$

Для обычных частиц $d\tau^2 > 0$. Определяемая таким образом область $V^+(x)$ есть пространство Лобачевского с характерной константой c. Интеграл от $d\tau$ по некоторому отрезку мировой траектории обычной частицы называется собственным временем этой частицы и является мерой ее старения. Частицы, мировые скорости которых удовлетворяют условию $d\tau^2 = 0$, называются частицами с нулевой массой покоя. К их числу относятся фотоны и нейтрино. Частицы, мировые скорости которых удовлетворяют условию $d\tau^2 < 0$, называются тахионами или частицами с мнимой массой покоя. Как обычно в римановой геометрии, элемент объема dM в мире M полагаем равным

$$dM = c^3 \sqrt{-\det(\theta_{\alpha\beta})}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \qquad /4/$$

Наряду с $\theta_{\alpha\beta}$ оказывается удобным тензор

$$g^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c^2}\theta^{\alpha\beta}, \qquad /5/$$

где $\theta^{\alpha\beta}$ - взаимный с $\theta_{\alpha\beta}$ тензор.

В нерелятивистском случае задаем линейную форму

$$d\tau = \theta_\alpha(x) dx^\alpha, \qquad /6/$$

отличную от нуля в каждой точке $x \in M$. Область $V^+(x)$ по-прежнему задается условием $d\tau^2 > 0$. Существенно, что пропадает различие между тахионами и частицами с нулевой массой покоя: в нерелятивистском случае необычные частицы задаются условием $d\tau = 0$. Благодаря форме /6/ область $V^+(x)$ оказывается трехмерным аффинным пространством. Нужно еще ввести метрику в это пространство. Для этого задаем сопряженную с θ_α квадратичную форму

$$(p, p) = g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \qquad /7/$$

нормального параболического типа. Это значит, что

$$\theta_\alpha(x)\, g^{\alpha\beta}(x) = 0 \qquad /8/$$

и что $g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta \geq 0$, причем, если $g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = 0$, то $p_\alpha = \lambda\, \theta_\alpha$. Можно так выбрать координаты /2/, что в рассматриваемой точке

$$d\tau = dt, \quad g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 . \qquad /9/$$

Элемент объема dM полагаем равным

$$dM = \frac{\theta_o}{\sqrt{\det(g^{ab})}}\, dx^o\, dx^1\, dx^2 dx^3 , \qquad /10/$$

где a , b = 1,2,3, считая, что $\theta_o > 0$.

Выражение /10/ инвариантно относительно преобразований мировых координат, сохраняющих условие $\theta_o > 0$. Действительно, при таком условии ковектор $(0, p_1, p_2, p_3)$ неколлинеарен ковектору θ_α, а значит, квадратичная форма $g^{ab} p_a p_b$ положительно определена. Следовательно, $\det(g^{ab}) > 0$. Из /8/ следует, что

$$g^{oa} = -\, g^{ab} u_b , \quad g^{oo} = g^{ab} u_a u_b ,$$

где

$$u_a = \frac{\theta_a}{\theta_o} .$$

Поэтому, обозначая $A^\mu_\alpha = \partial \bar{x}^\mu / \partial x^\alpha$, находим

$$\bar{g}^{mn} = g^{\alpha\beta} A^m_\alpha A^n_\beta = g^{ab} (A^m_a - u_a A^m_o)(A^n_b - u_b A^n_o).$$

Следовательно,

$$\det(\bar{g}^{ab}) = \det(g^{ab}) \,|A^m_a - u_a A^m_o|^2 .$$

Последний определитель равен

$$|A^m_a - u_a A^m_o| = \frac{1}{\theta_o} \begin{vmatrix} \theta_o & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ A^1_o & A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_o & A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_o & A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{vmatrix} ,$$

а так как $\theta_\alpha = \bar{\theta}_\mu A^\mu_\alpha$, то он равен $\frac{\bar{\theta}_o}{\theta_o} J$, где

$J = |A^\mu_\alpha|$ - якобиан преобразования. Следовательно,

$$\frac{\theta_o \theta_o}{\det(g^{ab})} = \frac{\bar{\theta}_o \bar{\theta}_o}{\det(\bar{g}^{ab})} J^2, \qquad /11/$$

что и доказывает инвариантность.

По определению, данному выше, пространство $V^\circ(x)$ скоростей частицы с нулевой массой покоя двумерно, а пучок $F^\circ = V^\circ(M)$ - шестимерен. В релятивистском случае $V^\circ(x)$ является конформной плоскостью. В нерелятивистском же случае, пока не задана форма /7/, $V^\circ(x)$ является проективной, а после задания этой формы - римановой /в узком смысле/ плоскостью.

Семимерный пучок $F^+ = V^+(M)$ скоростей обычной частицы есть косое произведение со слоем $V^+(x)$ над точкой $x \in M$. В релятивистском случае в слое действует группа изометрий пространства Лобачевского, изоморфная ортохронной группе Лоренца. В нерелятивистском случае в слое действует ортохронная группа Галилея.

Предполагая, что метрическая структура мира M непрерывна, допускаем существование непрерывного векторного поля на M, удовлетворяющего условию

$$\theta_{\alpha\beta}(x)\,\omega^\alpha(x)\,\omega^\beta(x) = 1 \qquad /12/$$

в релятивистском случае и условию

$$\theta_\alpha(x)\,\omega^\alpha(x) = 1 \qquad /13/$$

в нерелятивистском случае. Благодаря этому пучок F^+ оказывается ориентируемым многообразием независимо от того, ориентируемо или нет многообразие M.

Можно вообразить среду, движущуюся с полем мировых скоростей, представляемых $\omega^\alpha(x)$. Например, можно рассмотреть газ, средняя скорость частиц которого представляется полем $\omega^\alpha(x)$. Поведение газа хорошо описывается кинетическим уравнением Больцмана, задаваемым в пучке F^+. В релятивистском случае уравнение Больцмана дает наиболее последовательный из существующих подходов к микроскопическому описанию среды. Сформулировать в релятивистском случае уравнение Больцмана автору удалось благодаря изложенным выше представлениям о пространстве скоростей $V^+(x)$ и о пучке скоростей $V^+(M)$, в основе которых, как мы видели, лежит геометрия Лобачевского.

Понятно, что нерелятивистский случай получается из релятивистского в результате предельного перехода $c \to \infty$. При этом геометрия Лобачевского в слое $V^+(x)$ переходит в евклидову геометрию. Если в той или иной задаче играет роль лишь малая область в пространстве скоростей $V^+(x)$ обычной частицы, настолько малая, что геометрические формулы Лобачевского можно заменить евклидовыми, то с той же степенью точности релятивистские формулы можно заменить нерелятивистскими. В пределе должно выполняться равенство

$$\lim_{c\to\infty} \theta_{\alpha\beta}(x) = \theta_{\alpha}(x)\,\theta_{\beta}(x). \qquad /14/$$

Например, наряду с тождеством

$$\frac{\theta_{oo}}{\det(g^{ab})} = -c^6 \det(\theta_{\alpha\beta}) \qquad /15/$$

равенством /14/ нужно воспользоваться для того, чтобы получить предельное выражение /10/ для элемента объема /4/. Надо, однако, иметь ввиду, что предельный переход /14/ сам по себе неоднозначен. С этим тесно связано то обстоятельство, что в нерелятивистском случае метрическая структура мира хотя и накладывает сильные ограничения на выбор геодезических в M, но не определяет их однозначно. С этим тесно связан и спорный вопрос о понятии системы отсчета.

На пути разработки релятивистских теорий в результате предельного перехода $c \to \infty$ может открыться неведомая область нерелятивистской физики. Нечто похожее уже случилось с теорией пространственно-временного мира. После Ньютона и Лобачевского сильно продвинутая трудами Римана и Пуанкаре, в своей релятивистской части она достигла известного совершенства в общей теории относительности Эйнштейна. Лишь затем была поставлена задача о нерелятивистском пределе общей теории относительности *.

Изложенный материал можно рассматривать как современное введение в общую теорию относительности, в которой, как видно, основную роль играет геометрия Лобачевского.

В специальном случае, когда пространственно-временной мир M с самого начала считается аффинным, приходим к специальной теории относительности. В этом случае касательную к M прямую вкладываем в M. Затем с помощью параллельного переноса разбиваем прямые на классы параллельных прямых и каждый такой класс называем просто мировой скоростью. Класс параллельных прямых в M является в проективном смысле бесконечно удаленной мировой точкой, а значит, мировые скорости дополняют аффинный мир M до четырехмерного проективного мира $\bar{M}$. В результате мы получили конструкцию Котельникова: пространство скоростей оказалось проективной гиперплоскостью V в проективном мире $\bar{M}$.

Вернемся, однако, к общему случаю. Ту часть физической теории, которая не зависит от постулата о параллельных в пространстве скоростей, с той же степенью условности, что и в геометрии, назовем абсолютной физической теорией. Можно говорить в этом смысле об абсолютной механике, об абсолютной кинетической теории газов и т.д. Абсолютная физическая теория в равной мере входит в состав как нерелятивистской, так и соответствующей релятивистской теории.

Хорошо установлено, что в действительности геометрия пространства скоростей неевклидова, так что настоящая физическая теория непременно должна быть релятивистской. Тогда зачем же нужны нерелятивистские теории? Необходимость в нерелятивистских теориях сохраняется потому, что круг задач, где играет роль лишь малая область в пространстве скоростей

* Соображение Клиффорда о том, что геометрия должна определяться физическими процессами, в свое время осталось незамеченным.

обычной частицы, не может потерять своего непосредственного значения. Но есть и более глубокие причины проявлять к нерелятивистским теориям неподдельный интерес. Во-первых, в той или иной нерелятивистской теории имеется абсолютная часть, целиком переносимая на соответствующую релятивистскую теорию - соображение, которым не следует пренебрегать при разработке релятивистского аналога уже готовой нерелятивистской теории и которое немало помогло автору при построении релятивистского аналога газокинетической теории Больцмана. Во-вторых, нерелятивистская теория может целиком содержаться в релятивистской теории, подобно тому как планиметрия Евклида содержится в стереометрии Лобачевского. Поэтому, разрабатывая релятивистскую физическую теорию, нелишне рассмотреть ее в нерелятивистском пределе, вдохновляясь великим примером Лобачевского, сумевшего из евклидовой планиметрии орисферы получить новую стереометрию.

Литература

1. *A.Sommerfeld. Phys.Zs., 1909, 10, 826-829.*
2. *V.Varicak. Phys.Zs., 1910, 11, 93, 287, 586. /См. отзыв А.П.Котельникова о работах Варичака: Изв. физ-мат. общества при Казанском университете. Серия 3,2 36-108, 1927/.*
3. *G.Herglotz. Ann. der Phys.,31, 404, 1910.*
4. *A.A.Robb. Optical Geometry of Motion; A New View of the Theory Relativity, Cambridge, 1911.*
5. *Ф.Клейн. О геометрических основаниях лоренцевой группы. В книге: Новые идеи в математике, вып. 5, 144-174, С.-Пб., 1914.*
6. *А.П.Котельников. Принцип относительности и геометрия Лобачевского. Сборник In memoriam Lobatchevskii 2,37-66, Казань, 1927.*
7. *В.Паули. Теория относительности. М.Л., 1947.*
8. *П.А.Широков. "Н.И.Лобачевский как творец новой геометрической системы" /к 150-летию со дня его рождения/. Избр. работы по геометрии, Казань, 1966.*
9. *В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1955.*

10. Н.А.Черников. Научные доклады Высшей школы /физ.-мат. науки/ 2, 158, 1958; Препринт ОИЯИ, Р-723, Дубна, 1961; Международная зимняя школа теоретической физики при ОИЯИ т. 3, 151, Дубна, 1964; Препринт ИТФ-68-44, Киев, 1968; Физика элементарных частиц и атомного ядра, т. 4, вып. 3, 773-810, Атомиздат, М., 1973. Препринт ОИЯИ, Р-1028, Дубна, 1962; Препринт ОИЯИ, Р2-9620, Дубна, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел 25 ноября 1976 года.