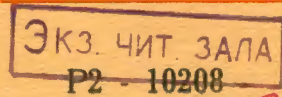


ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



10208



Б.С.Гетманов

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ
КОМПЛЕКСНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
КЛЕЙНА - ГОРДОНА

1976

P2 - 10208

Б.С.Гетманов

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СОЛИТОНОВ
КОМПЛЕКСНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
КЛЕЙНА - ГОРДОНА

Направлено в "Physics Letters"

ОИЯИ
БИБЛИОТЕКА

Взаимодействие солитонов комплексного нелинейного уравнения
Клейна-Гордона

В численных экспериментах исследуются свойства взаимодействия солитонов при столкновениях в двумерном пространстве-времени. Выявлена слабая неупругость взаимодействия. Обнаружены долгоживущие осциллирующие связанные состояния.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1976

Getmanov B.S. P2 - 10208

The Soliton Interaction of the Nonlinear Complex
Klein-Gordon Equation in Two Space-Time
Dimensions

The soliton interaction has been investigated in computer experiments. The slight inelasticity of the interaction is found. The long-lived oscillating bound states are discovered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

© 1976 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

В большинстве работ, посвященных исследованию нелинейных систем с решениями солитонного типа, рассматриваются системы с тривиальной динамикой солитонов, обладающие свойством вполне интегрируемости^{/1,2/}. Следуя Т.Д.Ли^{/3/}, мы будем трактовать термин "солитон" в более широком смысле, чем принято в^{/1,2/}, а именно: как решение нелинейных уравнений поля, локализованное в конечной области пространства при всех $-\infty < t < \infty$. О взаимодействии солитонов в системах, не являющихся вполне интегрируемыми, известно очень немного ввиду отсутствия регулярных методов аналитического описания; пока единственным надежным путем остается численное моделирование. В работах^{/4/} изложены результаты численных экспериментов по взаимодействию солитонов в модели действительного скалярного поля, а в^{/5/} намечен путь аналитического описания взаимодействия солитонов в некотором классе полиномиальных моделей теории поля в двумерном пространстве-времени, основанной на свойстве "близости" рассматриваемых систем к вполне интегрируемой.

Настоящая работа посвящена изучению взаимодействия солитонов комплексного скалярного нелинейного уравнения Клейна-Гордона

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + m^2\psi(1 - 2\lambda^2|\psi|^2) = 0. \quad /1/$$

Локализованное решение этого уравнения суть

$$\psi = \frac{A}{\lambda} \frac{\exp\{\pm i[\gamma m \sqrt{1 - A^2}(\gamma x - t) + \delta]\}}{\text{ch}[\gamma A(x - x_0 - \gamma t)]}, \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2}, \quad /2/$$

$$|A| \leq 1.$$

Решение /2/ представляет собой "нетопологический" солитон по терминологии Т.Д.Ли^{/3/}; существование области устойчивости этого решения^{/6/}

$$A < \sqrt{\frac{1+v^2}{2}} \quad /3/$$

связано с наличием дополнительного /наряду с энергией и импульсом/ интеграла движения - заряда. Значения интегралов движения на решении /2/ суть

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx [|\psi_t|^2 + |\psi_x|^2 + m^2 (|\psi|^2 - \lambda^2 |\psi|^4)] = M\gamma,$$

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} dx (\psi_t \psi_x^* + \psi_t^* \psi_x) = Mv\gamma,$$

$$Q = i \int_{-\infty}^{\infty} dx (\psi \psi_t^* - \psi_t^* \psi) = \pm 4\lambda^{-2} A \sqrt{1-A^2} = \pm \bar{Q}. \quad /4/$$

Здесь $M = 4m\lambda^{-2} A(1 - \frac{2}{3}A^2)$ - масса солитона, знак заряда соответствует знаку $\frac{2}{3}$ в экспоненте /2/. Очевидно, /2/ описывает объект со свойствами релятивистской частицы /в частности, $E^2 = p^2 + M^2$ /. Отметим, что M и \bar{Q} как функции параметра A имеют экстремум в точке $\sqrt{2}/2$, как раз в которой происходит потеря устойчивости /2/ /в системе покоя/.

Взаимодействие солитонов /2/ изучалось в серии численных экспериментов по столкновению двух солитонов во всей области параметров $A_i, v_i, \delta_i (i=1,2)$. Во всех случаях выбиралась система координат, в которой $v_1 = -v_2$. При этом установлены следующие факты.

1. При выполнении неравенства /3/ "с запасом" для обоих солитонов наблюдалось слабонеупругое взаимодействие солитонов в том смысле, что после столкновения солитоны в значительной степени сохраняли независимо от соотношения знаков заряда \bar{Q} свою индивидуальность и форму и с высокой точностью - скорость. Типичный процесс столкновения солитонов показан на рис. 1.

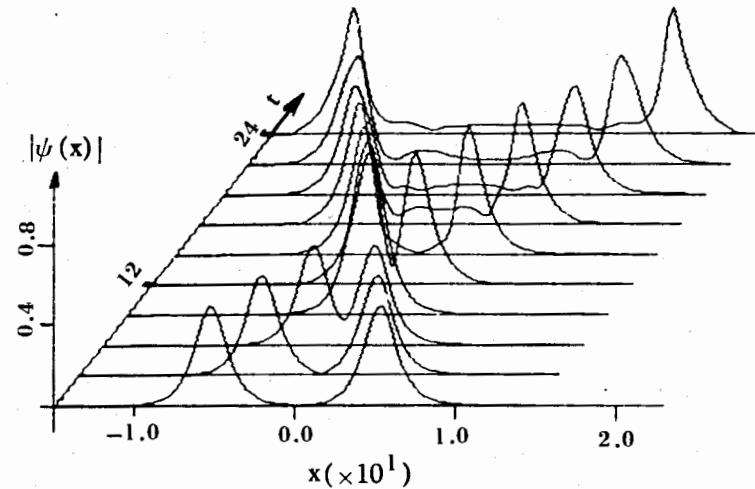


Рис. 1. Столкновение солитонов ($A_1 - A_2 = 0,5; v_1 = -v_2 = 0,9; x_{01} = -x_{02} = -6,0; \bar{Q}_1 = \bar{Q}_2; \Delta\delta = 0$).

2. При соотношениях между A_i и v_i , близких к равенству в /3/, в момент столкновения развивалась неустойчивость, аналогичная неустойчивости одного солитона при невыполнении неравенства /3/.

3. Принципиально важную роль играет разность фаз $\Delta\delta = |\delta_1 - \delta_2|$ рассеивающихся солитонов/результаты, изложенные в этом пункте, относятся к случаю $A_1 = A_2$ /. При $\Delta\delta = \pi$ солитоны отталкиваются; в частности, волновые пакеты вообще не перекрываются при столкновении. При $\Delta\delta \neq \pi$ возникает область перекрывания и притяжение между солитонами, эти эффекты максимальны при

$$\Delta\delta = 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

4. Весьма важным является вопрос о возможности существования связанных состояний солитонов. В^{/4/} наблюдалось образование осциллирующих слабоизлучающих связанных состояний при скоростях $v_i \leq 0,2$.

Нам не удалось получить связанные состояния в области скоростей $v_i \geq 0,03$ в чистых экспериментах по столкновению, т.е. когда при $t=0$ солитоны находятся столь далеко друг от друга, что начальная функция $\psi(0) = \psi_1 + \psi_2 / \psi_i$ дается /2// приближает точное решение $\psi(0) = \psi_1 |_{x=-\infty} + \psi_2 |_{x=\infty}$ с точностью $\leq 0,01$. При малых v "чистый" численный эксперимент требует больших затрат машинного времени, т.к. обеспечение условия устойчивости /3/ приводит к сильному расширению области локализации солитона. Однако нам удалось получить осциллирующее состояние двух солитонов с противоположными знаками зарядов \bar{Q} , помещая их при $t=0$ близко друг к другу, фактически в общей потенциальной яме. Осцилляции носят чрезвычайно регулярный характер; период колебаний с основной частотой, модулированной сложным образом, стремится к 2π при

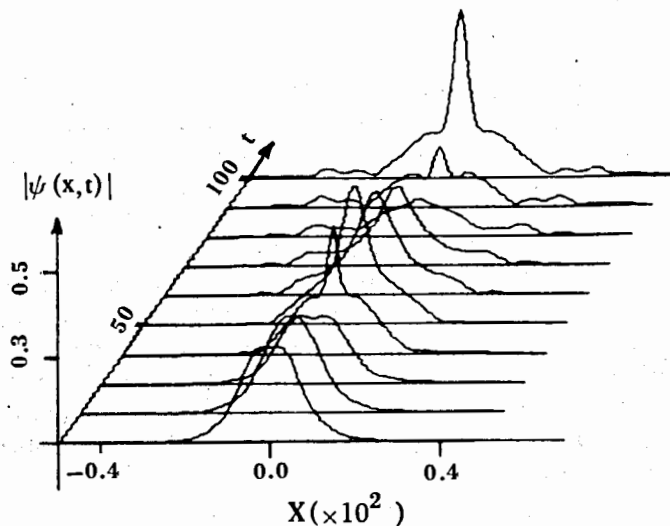


Рис. 2. Эволюция связанного состояния двух солитонов с противоположными зарядами ($A_1 = A_2 = 0,34$; $v_1 = v_2 = 0,0$; $x_{01} = -x_{02} = -4,0$; $\bar{Q}_1 = -\bar{Q}_2$; $\Delta\delta = 0,0$).

$t \rightarrow \infty$. Колебания сопровождаются слабым излучением линейных волн; время жизни связанного состояния значительно больше периода колебаний. Эволюция связанного состояния показана на рис. 2.

Во всех экспериментах интегралы движения /4/ сохранялись с точностью не хуже 10^{-4} .

Полученные экспериментальные результаты, в духе концепции, изложенной в /5/ можно интерпретировать как следствие "близости" изучаемой системы к найденной нами в /7/, описывающейся уравнением

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + \lambda^2 \psi * \frac{\psi_t^2 - \psi_x^2}{1 - \lambda^2 |\psi|^2} + m^2 \psi (1 - \lambda^2 |\psi|^2) = 0, \quad /5/$$

которое имеет точные многосолитонные решения и, вероятно, может быть проинтегрировано методом обратной задачи теории рассеяния.

Точные решения уравнения /5/ могут служить первым приближением при описании решений /1/ /одно-солитонные решения этих уравнений тождественно совпадают/. С другой стороны, уравнение /1/, на наш взгляд, может служить более адекватной основой для конструирования моделей физической реальности.

Автор признателен Д.В.Ширкову за критические замечания и поддержку, И.О.Боголюбскому, В.Г.Маханькову за полезные обсуждения и В.Е.Захарову, указавшему на возможность интерпретации полученных результатов как следствия "близости" системы к вполне интегрируемой.

Литература

1. A.C.Scott, F.Y.F.Chu, D.W.McLaughlin. Proc. of IEEE, 61, 1443 /1973/.
2. В.Е.Захаров. Глава в книге И.А.Кунина Теория упругих сред с микроструктурой, Наука, М., 1976.
3. T.D.Lee. Phys. Rep., 23C /1976/.

4. А.Е.Кудрявцев. Письма в ЖЭТФ, 22, 176 /1975/;
Б.С.Гетманов. Письма в ЖЭТФ, 24, 323 /1976/.
5. Б.С.Гетманов. ОИЯИ, Р2-9996, Дубна, 1976.
6. Л.Г.Заставенко. ПММ, 29, 430 /1965/;
Yu.V.Katyshev, V.G.Makhankov. Phys. Lett.,
57A, 10 /1976/.
7. Б.С.Гетманов. Письма в ЖЭТФ, 25, 2 /1976/.

*Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября 1976 года.*