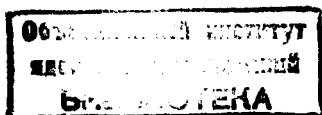


P2 - 10169

Б.М.Барбашов, А.Л.Кошкарлов, О.М.Федоренко

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

Направлено в ТМФ



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



31-74

Б-246

P2 - 10169

5155/2-76

Б.М.Барбашов, А.Л.Кошкарлов, О.М.Федоренко

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТРУНЫ

1976

Введение

В последнее время появился ряд указаний /1,2/ на то, что фиксирование калибровки в теории релятивистской струны в виде $ix = \rho\tau$ не позволяет рассмотреть некоторые ее виды движения (так называемое продольное движение). Однако авторы этих работ изучали продольное движение только на частных примерах.

В данной заметке эта проблема исследуется на основе общего решения задачи Коши для конечной релятивистской струны. Решение получено на основании общего решения задачи Коши для бесконечной струны /3/.

В § 1 исследуется возможность выбора различных калибровок в зависимости от начальных данных. В § 2 приводится метод продолжения начальных данных для конечной струны и сведения задачи к случаю бесконечной струны. На примерах изучаются конфигурации струны в отдельные моменты времени, траектории и скорости различных точек струны. В § 3 решается аналогичная задача для заряженной струны, помещенной в постоянное и однородное электромагнитное поле.

§ 1. Возможность выбора калибровки в зависимости от начальных условий

С помощью вариационного принципа уравнения движения для свободной струны можно получить из функции действия

$$S_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_{\sigma_1(\tau)}^{\sigma_2(\tau)} d\sigma \mathcal{L}_0(\dot{x}, x'); \quad \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2} \quad (1)$$

Здесь $x_\mu(\sigma, \tau)$ - вектор в $(K+1)$ -мерном пространстве, описывающий положение струны в пространстве; $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial \tau}$, $x' = \frac{\partial x}{\partial \sigma}$. Функции

$\sigma_1(\tau)$ и $\sigma_2(\tau)$ определяют положение концов струны на плоскости σ, τ и задаются выбором калибровки [4].

Как известно, уравнения движения, получаемые из (I), в ортонормальной калибровке

$$\dot{x}(\sigma, \tau) \cdot x'(\sigma, \tau) = 0, \quad \dot{x}^2(\sigma, \tau) + x'^2(\sigma, \tau) = 0, \quad (2)$$

переходят в уравнения Даламбера (далее положим $\frac{1}{2\pi\alpha'} = 1$).

$$\ddot{x}_\mu(\sigma, \tau) - x''_\mu(\sigma, \tau) = 0. \quad (3)$$

Пусть заданы параметрически произвольные начальные данные $\rho_\mu(\lambda)$ и $\sigma_\mu(\lambda)$, определяющие положение и скорость точек струны в начальный момент. Параметр λ изменяется в бесконечных пределах, если струна бесконечна. Согласно [3], решение задачи Коши для уравнения (3) дается формулой

$$x_\mu(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}\rho_\mu(\sigma - \tau) + \frac{1}{2}\rho_\mu(\sigma + \tau) + \frac{1}{2} \int_{\sigma - \tau}^{\sigma + \tau} \pi'_\mu(\lambda) d\lambda; \quad \pi'_\mu = \frac{\rho'_\mu \sigma'_\mu - \rho''_\mu \sigma'_\mu}{\sqrt{\rho'^2 \sigma'^2 - \rho''^2 \sigma'^2}} \quad (4)$$

В случае конечной струны начальные данные заданы на конечном отрезке $\sigma_1(0) < \lambda < \sigma_2(0)$, и из действия (I) следуют граничные условия

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x'^i}(\sigma_i, \tau) = \sigma_i(\tau) \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^i}(\sigma_i, \tau), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

С помощью (5) можно продолжить начальные данные на все значения λ и воспользоваться затем формулой (4).

Для продолжения $\rho_\mu(\lambda)$ и $\pi'_\mu(\lambda)$ удобно выбрать калибровку так, чтобы функции $\sigma_i(\tau)$ были константами. Для выбора калибровки вводится постоянный вектор $n^\mu = (n^0, n^1, \dots, n^4)$ такой, что хотя бы одна составляющая его $n^i \neq 0$. Вектор n^μ может быть временноподобным или изотропным. Проектируя (5) на вектор n^μ и учитывая (2), найдем $n x^i = -\sigma_i n \dot{x}$. Если теперь калибровку задать уравнениями $n x^i = 0, n \dot{x} = \rho$, где ρ — не равная нулю константа, то

$$\sigma_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

После интегрирования уравнений калибровки получим

$$n x(\sigma, \tau) = \rho \tau. \quad (6)$$

В калибровке (6) уравнения границы $\sigma_1(\tau) = 0, \sigma_2(\tau) = \ell$, ℓ — некоторая константа.

Запишем решение задачи Коши в калибровке (6). Для этого воспользуемся инвариантностью уравнений (2) и (3) относительно

преобразований [3].

$$\begin{aligned} \beta &= \sigma + \tau \rightarrow f(\sigma + \tau) = \tilde{\sigma} + \tilde{\tau} = \tilde{\beta}(\beta), \\ \alpha &= \sigma - \tau \rightarrow \varphi(\sigma - \tau) = \tilde{\sigma} - \tilde{\tau} = \tilde{\alpha}(\alpha), \end{aligned} \quad (7)$$

$\tilde{\beta}'(\beta) \cdot \tilde{\alpha}'(\alpha) \neq 0$, φ и f — произвольные функции; и перейдем в формуле (4) к новым параметрам (от α, β к $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$) с помощью следующего преобразования:

$$P\tilde{\beta}(\beta) = n\rho\beta + \int_a^\beta n\pi(\lambda) d\lambda, \quad P\tilde{\alpha}(\alpha) = -n\rho\alpha + \int_a^\alpha n\pi(\lambda) d\lambda. \quad (8)$$

Вычитая второе равенство из первого, находим

$$P \frac{\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}}{2} = P\tau = n x(\alpha, \beta).$$

Таким образом, в новых параметрах решение удовлетворяет калибровке (6). Преобразование формулы (4) к параметрам $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ выполнено в приложении А.

Преобразования (8) не существует, если $\tilde{\beta}'(\beta) \cdot \tilde{\alpha}'(\alpha) = 0$, или, с учетом (8),

$$n\rho' \pm \pi n = 0. \quad (9)$$

Из (9) следует, что в некоторых калибровках типа (6) теряется определенный класс движений струны — именно те, для которых выполнено (9). Для уяснения физического смысла ограничения (9) разложим векторы ρ'_μ и π'_μ по некоторому базису, взяв в качестве одного из базисных ортов вектор n^μ . Пусть n^μ изотропен, т.е. $n^2 = 0$. Тогда можно разложить ρ'_μ и π'_μ по неортогональному базису [5] (см. приложение А):

$$\rho'_\mu = \delta_\mu(\epsilon\rho') - \frac{[n_\mu - (\epsilon n)\delta_\mu][n\rho' - (\epsilon n)(\epsilon\rho')]}{(\epsilon n)^2} - \sum_{i=2}^4 e_\mu^{(i)}(e^{(i)}\rho'), \quad (10)$$

$$\pi'_\mu = \delta_\mu(\epsilon\pi') - \frac{[n_\mu - (\epsilon n)\delta_\mu][n\pi' - (\epsilon n)(\epsilon\pi')]}{(\epsilon n)^2} - \sum_{i=2}^4 e_\mu^{(i)}(e^{(i)}\pi').$$

Здесь $(e^{(i)}n) = (e^{(i)}\delta) = 0$, $(e^{(i)}e^{(j)}) = -\delta^{ij}$, $\epsilon^2 = 1$.

Учитывая условия $(\rho' \pm \pi')^2 = 0$ и (9), с помощью (10) находим

$$e^{(i)}(\rho' \pm \pi') = 0. \quad (11)$$

Это значит, что векторы $(\rho'_\mu \pm \pi'_\mu)$, удовлетворяющие (9), располагаются вдоль времениподобного направления.

Рассмотрим теперь случай времениподобного вектора n^μ , т.е. $n^2 > 0$. Раскладывая ρ'_μ и π'_μ по ортогональному базису (см. Приложение А)

$$\rho'_\mu = \frac{n_\mu}{n^2} (n \rho') - \sum_{i=1}^K e_\mu^{(i)} (e^i \rho'), \quad \pi'_\mu = \frac{n_\mu}{n^2} (n \pi') - \sum_{i=1}^K e_\mu^{(i)} (e^i \pi'), \quad (10a)$$

и учтя условия (2) и (9), получим

$$e^{(i)} (\rho'^\mu \pm \pi'^\mu) = 0.$$

Отсюда и из (9) следует, что $\rho'_\mu \pm \pi'_\mu = 0$. Поскольку геометрически $\rho'_\mu(\lambda)$ и $\pi'_\mu(\lambda)$ являются касательной и нормалью к кривой $\rho_\mu(\lambda)$, то равенство $\rho'_\mu \pm \pi'_\mu = 0$ невозможно, и поэтому в случае времениподобного вектора n^μ всегда можно выбрать калибровку (6).

Назовем соотношение (9) при изотропном векторе n^μ условием продольности. Таким образом, в поперечных калибровках (6) (с изотропным n^μ) не учитываются продольные движения. Рассмотрим пример. Пусть $e_\mu^{(1)} = (0, 0, 1, 0)$, $e_\mu^{(2)} = (0, 0, 0, 1)$ являются ортами осей y и z , а $\zeta_\mu = (1, 0, 0, 0)$ лежит вдоль оси времени. Вектор n^μ выберем в виде $n^\mu = (1, 1, 0, 0)$. Условия (9) и (II) теперь запишутся

$$(t'_0 - x'_0) \pm (\pi'_t - \pi'_x) = 0, \quad y'_0 \pm \pi'_y = z'_0 \pm \pi'_z = 0.$$

Подберем начальные данные так, чтобы выполнялись эти соотношения. Например, $t_0 = y_0 = z_0 = \bar{t} = 0$, $\sigma_x = 1$, $x_0 = \pm 1$. Это соответствует тому, что в начальный момент струна в форме отрезка прямой покинется вдоль оси x . Движение струны с такими начальными данными нельзя рассмотреть в калибровке $t - x = \tau$.

§ 2. Продолжение начальных данных для конечной струны

Пусть в начальный момент заданы положение $\rho_\mu(\lambda)$ и скорость $\rho'_\mu(\lambda)$ конечной струны ($0 < \lambda < l$). Решение задачи Коши для уравнения (3) дается формулой (4). Это решение справедливо до тех пор, пока аргументы $\zeta \pm \tau$ не выйдут за пределы промежутка $0 < \zeta \pm \tau < l$. Правила продолжения функций $\rho_\mu(\lambda)$ и $\pi_\mu(\lambda)$ следуют из граничных условий (5), которые при учете калибровки (2) и (6) приобретают вид:

$$x'_\mu(\zeta_i, \tau) = 0, \quad \zeta_i = 0, l, \quad i = 1, 2. \quad (12)$$

Подставляя (4) в граничные условия, найдем

$$\frac{1}{2} [\rho'_\mu(\zeta_i + \tau) + \rho'_\mu(\zeta_i - \tau) + \pi'_\mu(\zeta_i + \tau) - \pi'_\mu(\zeta_i - \tau)] = 0, \quad i = 1, 2.$$

Заменим здесь τ на $-\tau$

$$\frac{1}{2} [\rho'_\mu(\zeta_i - \tau) + \rho'_\mu(\zeta_i + \tau) + \pi'_\mu(\zeta_i - \tau) - \pi'_\mu(\zeta_i + \tau)] = 0, \quad i = 1, 2.$$

Складывая и вычитая последние два уравнения, получим

$$\rho'_\mu(\zeta_i - \tau) = -\rho'_\mu(\zeta_i + \tau) \quad \text{или} \quad \rho_\mu(\zeta_i - \tau) = \rho_\mu(\zeta_i + \tau) + C_i,$$

$$\pi'_\mu(\zeta_i - \tau) = \pi'_\mu(\zeta_i + \tau), \quad i = 1, 2.$$

Можно убедиться, что константы C_i равны нулю, если подставить в проинтегрированное верхнее соотношение $\tau = 0$.

Таким образом, имеем

$$\rho_\mu(\zeta_i - \tau) = \rho_\mu(\zeta_i + \tau), \quad \pi_\mu(\zeta_i - \tau) = \pi_\mu(\zeta_i + \tau), \quad i = 1, 2.$$

Получаем условие четности для $\rho_\mu(\lambda)$ и $\pi_\mu(\lambda)$, подставляя $\zeta_i = 0$ в эти соотношения. Из этих же уравнений следует периодичность функций $\rho_\mu(\lambda)$ и $\pi_\mu(\lambda)$. Действительно, сделав замену $\tau \rightarrow \tau + l$ при $\zeta_i = l$ и воспользовавшись четностью $\rho_\mu(\lambda)$ и $\pi_\mu(\lambda)$, находим

$$\rho_\mu(\tau + 2l) = \rho_\mu(\tau), \quad \pi_\mu(\tau + 2l) = \pi_\mu(\tau).$$

Будем продолженные начальные данные обозначать $\tilde{\rho}_\mu(\lambda)$ и $\tilde{\pi}_\mu(\lambda)$, а $\rho_\mu(\lambda)$ и $\pi_\mu(\lambda)$ - начальные данные на отрезке $(0, l)$. $\tilde{\rho}_\mu(\lambda) = \rho_\mu(\lambda)$, $\tilde{\pi}_\mu(\lambda) = \pi_\mu(\lambda)$, если $0 < \lambda < l$.

Функции $\tilde{\rho}_\mu$ и $\tilde{\pi}_\mu$ можно выразить через ρ_μ и π_μ (см. Приложение Б): $\tilde{\rho}_\mu(\lambda) = \rho_\mu(\lambda + 2l\psi(\lambda))$, $\tilde{\pi}_\mu(\lambda) = \pi_\mu(\lambda + 2l\psi(\lambda))$, где $\psi(\lambda)$ - ступенчатая функция, определенная равенствами

$$\psi(\lambda) = 0, \quad 0 < \lambda < l,$$

$$\psi(\lambda) = -\psi(\lambda), \quad \psi(\lambda) \neq 1 = \psi(\lambda \pm 2l). \quad (13)$$

Теперь начальные данные продолжены на всю ось, и справедливо решение в форме (4)

$$x_\mu(\zeta, \tau) = \frac{1}{2} [\rho_\mu(\zeta + \tau + 2l\psi(\zeta + \tau)) + \rho_\mu(\zeta - \tau + 2l\psi(\zeta - \tau))] + \int_{\zeta - \tau}^{\zeta + \tau} \pi_\mu(\lambda + 2l\psi(\lambda)) d\lambda. \quad (14)$$

В Приложении Б показано, что решение (I4) удовлетворяет уравнению Даламбера, нелинейным дополнительным условиям и граничным условиям и является, следовательно, решением задачи Коши для конечной струны.

Рассмотрим несколько характерных свойств движения струны. Будем считать, что при $t=0$ струна находится в плоскости $t=0$ и не имеет начальных скоростей, т.е. $t(\lambda) = \bar{\sigma}(\lambda) = 0$; положим $\sigma_2 = 1$. При изучении движения струны с нулевой начальной скоростью удобно за параметр λ на начальной кривой выбрать длину кривой, т.е. $\bar{\rho}'(\lambda) = 1$ [3]. Очевидно, что для продолженной кривой это соотношение остается в силе $\bar{\rho}'(\lambda) = 1$. Выбрав таким образом параметр λ и начальные данные, из (4) получим

$$t(\sigma, \tau) = \tau, \quad x(\sigma, \tau) = \frac{1}{2} [\bar{\rho}(\sigma + \tau + 2e\psi(\sigma + \tau)) + \bar{\rho}(\sigma - \tau + 2e\psi(\sigma - \tau))] \quad (I5)$$

Из решения (I5) следует несколько общих выводов.

1. Струна пульсирует в пространстве с периодом $T = 2e$

$$\bar{x}(\sigma, t + 2e) = \frac{1}{2} [\bar{\rho}(\sigma + t + 2e + 2e\psi(\sigma + t + 2e)) + \bar{\rho}(\sigma - t - 2e + 2e\psi(\sigma - t - 2e))] = \\ = \frac{1}{2} [\bar{\rho}(\sigma + t + 2e\psi(\sigma + t)) + \bar{\rho}(\sigma - t + 2e\psi(\sigma - t))] = \bar{x}(\sigma, t).$$

Здесь использованы свойства функции $\psi(\lambda)$ (I3). Полученный вывод справедлив и при $\sigma(\lambda) \neq 0$, если центр масс струны покоится.

2. При $\sigma(\lambda) = 0$ концы струны движутся вдоль начального ее положения. Рассмотрим движение конца $\sigma_1 = 0$, тогда

$$\bar{x}(0, t) = \frac{1}{2} [\bar{\rho}(t + 2e\psi(t)) + \bar{\rho}(1 - t + 2e\psi(1 - t))] = \bar{\rho}(1 + 2e\psi(1)).$$

На рис. I изображены траектории некоторых точек струны за половину периода $\Delta t = e$. Начальное положение есть окружность радиуса R .

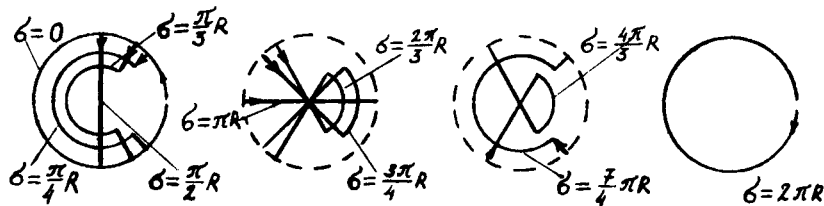


Рис. I

Формула (I4) позволяет изучать профили струны в произвольные моменты времени, траектории и скорости отдельных точек струны. В приложении В описан метод, который дает возможность исследовать профили струны и траектории ее точек в общем виде. Рассмотрим, например, разрывы скорости точек струны, используя решение (I4). Зафиксируем любое значение σ из интервала

$0 < \sigma < e/2$ и разобьем отрезок времени $0 < t < e$ на 3 области: а) $0 < t < \sigma$ б) $\sigma < t < e - \sigma$ в) $e - \sigma < t < e$. Ввиду того, что на стыках областей а), б), в) решение меняет характер, скорость будет испытывать скачки в моменты $t = \sigma, e - \sigma$. Решение в областях а) и б):

$$а) 0 < \sigma \pm t < e, \quad \psi(\sigma \pm t) = 0.$$

$$\bar{x}(\sigma, t) = \frac{1}{2} [\bar{\rho}(\sigma + t) + \bar{\rho}(\sigma - t)] = \frac{1}{2} [\bar{\rho}(\sigma + t) + \bar{\rho}(\sigma - t)].$$

$$б) 0 < \sigma + t < e, \quad -e < \sigma - t < 0, \quad \psi(\sigma \pm t) = 0,$$

$$\bar{x}(\sigma, t) = \frac{1}{2} [\bar{\rho}(\sigma + t) + \bar{\rho}(\sigma + t)].$$

В момент $t = \sigma$ скорость от значения $\dot{\bar{x}}(\sigma, t = \sigma) = \frac{1}{2} [\bar{\rho}'(2\sigma) - \bar{\rho}'(0)]$ скачком изменяется до величины $\dot{\bar{x}}(\sigma, t = \sigma) = \frac{1}{2} [\bar{\rho}'(2\sigma) + \bar{\rho}'(0)]$. Таким образом, скачок скорости равен $\Delta \dot{\bar{x}} = \bar{\rho}'(0)$ и $(\Delta \dot{\bar{x}})^2 = \bar{\rho}'(0)^2 = 1$, так как при движении струны из состояния покоя параметр λ на начальной кривой есть длина кривой, т.е. $\bar{\rho}'(\lambda) = 1$ (см. [3]).

Рассмотрим еще несколько примеров.

1. Струна в форме окружности радиуса R , покоящаяся в начальный момент. В этом случае начальные данные параметрически задаются следующим образом:

$$x_0(\lambda) = R \cos \frac{\lambda}{R}, \quad y_0(\lambda) = R \sin \frac{\lambda}{R}, \quad \sigma_1 = \pi_1 = 1,$$

$$t_0(\lambda) = z_0(\lambda) = \bar{\sigma}(\lambda) = \bar{\pi}(\lambda) = 0, \quad e = 2\pi R.$$

Поскольку $\bar{\sigma} = 0$, то и $\bar{\pi}$, согласно (4), равно 0.

Продолженные начальные данные имеют вид:

$$\bar{x}_0(\lambda) = R \cos \left| \frac{\lambda + 4\pi R \psi(\lambda)}{R} \right| = R \cos \frac{\lambda + 4\pi R \psi(\lambda)}{R} = R \cos \frac{\lambda}{R},$$

$$\bar{y}_0(\lambda) = R \sin \left| \frac{\lambda + 4\pi R \psi(\lambda)}{R} \right|,$$

$$\bar{t}_0(\lambda) = \bar{z}_0(\lambda) = \bar{\pi}(\lambda) = 0, \quad \bar{\pi}_1(\lambda) = 1.$$

Решением будет

$$t(\sigma, \tau) = \tau,$$

$$x(\sigma, \tau) = \frac{R}{2} \left[\cos \frac{\sigma+t}{R} + \cos \frac{\sigma-t}{R} \right] = R \cos \frac{\sigma}{R} \cos \frac{t}{R},$$

$$y(\sigma, t) = \frac{R}{2} \left[\sin \left| \frac{\sigma+t+4\pi R \psi(\sigma+t)}{R} \right| + \sin \left| \frac{\sigma-t+4\pi R \psi(\sigma-t)}{R} \right| \right].$$

Можно подсчитать импульс, момент и массу струны

$$P^\mu = \int_0^{\ell} d\sigma \dot{x}^\mu(\sigma, \tau) = [2\pi R, 0, 0, 0],$$

$$J^z = \int_0^{\ell} d\sigma (\bar{x} \dot{y} - y \dot{\bar{x}}) = 0,$$

$$M^2 = P^\mu P_\mu = 4\pi^2 R^2.$$

На рис.2 изображены профили струны в некоторые моменты времени. Видно, что через промежуток времени $\Delta t = 2\pi R$ струна приняла форму окружности, однако концы a и b поменялись местами. Еще через $\Delta t = 2\pi R$ струна вернется в начальное положение.

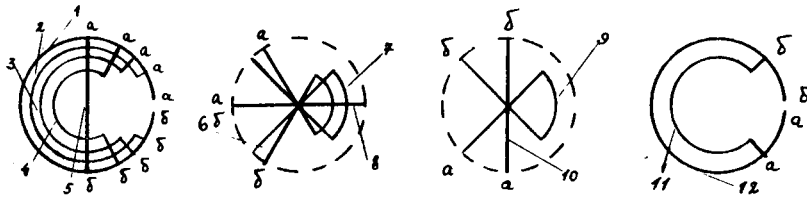


Рис.2

- I. $t = 0$, 2. $t = \frac{\pi}{6} R$, 3. $t = \frac{\pi}{4} R$, 4. $t = \frac{\pi}{3} R$, 5. $t = \frac{\pi}{2} R$,
 6. $t = \frac{2\pi}{3} R$, 7. $t = \frac{3\pi}{4} R$, 8. $t = \pi R$, 9. $t = \frac{5\pi}{4} R$, 10. $t = \frac{3\pi}{2} R$,
 II. $t = \frac{7\pi}{4} R$, 12. $t = 2\pi R$, а - конец $b, \sigma = 0$, б- конец $a, \sigma = 2\pi R$.

2. Покоящаяся в начальный момент струна в форме отрезка прямой:

$$x(\lambda) = \lambda, t_0 = y_0 = z_0 = \bar{\sigma} = \bar{\pi} = 0, \sigma_t = \pi_t = 1.$$

Продолжая начальные данные

$$\bar{x}_0(\lambda) = |\lambda + 2\ell \psi(\lambda)|, \bar{t}_0 = \bar{y}_0 = \bar{z}_0 = \bar{\pi} = 0, \bar{\pi}_t = 1,$$

решение получим в виде

$$t(\sigma, \tau) = \tau,$$

$$x(\sigma, t) = \frac{\ell}{2} \left[|\sigma+t+2\ell \psi(\sigma+t)| + |\sigma-t+2\ell \psi(\sigma-t)| \right].$$

Рис.3 поясняет движение отрезка

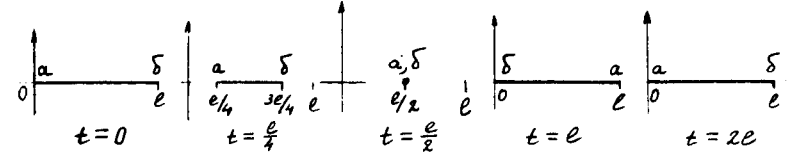


Рис.3

3. Струна в форме отрезка прямой, вращающаяся в начальный момент вокруг своего центра: $x_0(\lambda) = \lambda, \sigma_y = \omega \lambda, -\ell < \lambda < \ell, \omega \ell < 1$. Этот пример интересен наличием ненулевого углового момента у струны. Здесь возможны два случая:

а) $\omega \ell = 1$, и струна вращается вокруг своего центра как жесткий стержень, не изменяя своей длины; концы движутся со скоростью света.

б) $\omega \ell < 1$, и характер движения сложнее (см.рис.4).

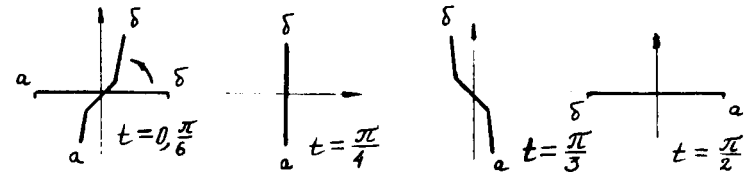


Рис. 4

Скорость концов, вначале меньшая скорости света, скачком достигает единицы. Значения импульса, углового момента и массы в этом случае таковы:

$$J^z = \frac{\ell}{\omega^2} \arcsin \omega \ell - \frac{\ell}{\omega} \sqrt{1 - \omega^2 \ell^2}, P^\mu = \left[\frac{2}{\omega} \arcsin \omega \ell, 0, 0, 0 \right],$$

$$M = \sqrt{P^2} = \frac{2}{\omega} \arcsin \omega \ell.$$

Заметим, что в случае $\omega\ell = 1$ между квадратом масс и моментом есть прямая пропорциональность $J^2 = \frac{\ell}{2\pi} M^2$. Если $\omega\ell < 1$, то $J^2 = \frac{M^2}{4} - \frac{e}{\omega} \sqrt{1 - \omega^2 \ell^2}$. Таким образом, уже при классическом рассмотрении проявляются характерные свойства траекторий Редже.

В заключение параграфа приведем профили струны с закрепленными концами для некоторых моментов времени в случае, когда ее начальная форма - окружность

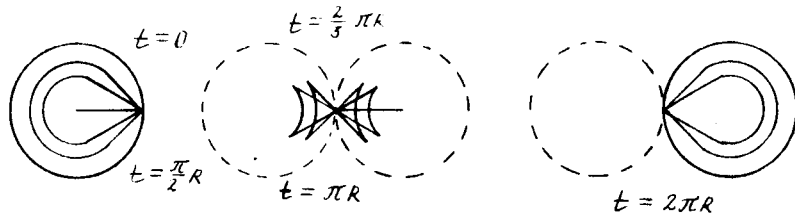


Рис.5

§ 3. Движение струны в постоянном электромагнитном поле.

Действие для струны в электромагнитном поле имеет вид ^{16/}

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d\sigma (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}). \quad (16)$$

Здесь \mathcal{L}_0 - лагранжиан свободной струны, а $\mathcal{L}_{int} = g x_\mu \dot{x}_\nu F^{\mu\nu}(x)$, $F^{\mu\nu}(x)$ - тензор электромагнитного поля. Такое взаимодействие соответствует тому, что заряды располагаются на концах струны и имеют разные знаки ^{14/}.

Варибирование действия (16) приводит, при учете дополнительных условий (2), к тем же самым уравнениям движения (3), что и в случае свободной струны, но с измененными граничными условиями:

$$x'_i(\sigma, \tau) + g F_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \delta_i^\nu = \delta_i^\nu [\dot{x}_\nu(\sigma, \tau) + g F_{\mu\nu} x'^\mu(\sigma, \tau)]_{i=1,2} \quad (17)$$

Аналогично тому, как это сделано в параграфе I, можно показать, что в калибровке, введенной в работе ^{14/},

$$n^\mu \dot{x}'_\mu + g n^\mu F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = 0, \quad n^\mu \dot{x}_\mu + g n^\mu F_{\mu\nu} x'^\nu = \mathcal{P}; \quad \mathcal{P} \neq 0, \quad (18)$$

функции $\delta_i(\tau) = 0$ или $\delta_i(\tau) = 0$, $\delta_2(\tau) = \ell$. Здесь величины n^μ, \mathcal{P}, ℓ те же, что и в параграфе I.

Задача состоит в том, чтобы с помощью (18) продолжить начальные данные. Получить правила продолжения $\rho_\mu(\lambda), \pi_\nu(\lambda)$ в общем случае трудно из-за сложного вида граничных условий, и поэтому рассмотрим частный случай постоянного, однородного магнитного поля.

Направим поле вдоль оси x , т.е. $F_{32} = -F_{23} = H$. Остальные компоненты тензора $F_{\mu\nu}$ равны нулю. Вектор n^μ и постоянную \mathcal{P} выберем в виде: $n^\mu = (1, 0, 0, 0)$, $\mathcal{P} = 1$. Теперь условия калибровки и граничные условия выглядят следующим образом:

$$t'(\sigma, \tau) - x'(\sigma, \tau) = 0, \quad \dot{t}(\sigma, \tau) - \dot{x}(\sigma, \tau) = 1. \quad (17a)$$

$$t'(\sigma, \tau) = 0, \quad x'(\sigma, \tau) = 0, \quad y'(\sigma, \tau) = -H z(\sigma, \tau), \quad z'(\sigma, \tau) = H y(\sigma, \tau), \quad (18a) \\ i = 1, 2.$$

Интегрируя (17a), получим $t = \tau$. Граничные условия для $t(\sigma, \tau)$, $x(\sigma, \tau)$ такие же, как и для свободной струны, поэтому функции $\tilde{z}_0, \tilde{x}_0, \tilde{\pi}_z, \tilde{\pi}_x$ должны удовлетворять условиям четности и периодичности. С помощью процедуры, описанной в § 2, можно получить правила продолжения для функций y_0, z_0, π_y, π_x . Вместо условия четности для $\tilde{y}_0, \tilde{z}_0, \tilde{\pi}_y, \tilde{\pi}_x$ из (18a) следует

$$\tilde{y}_0(-\lambda) = \frac{H-1}{H+1} \tilde{y}_0(\lambda) - \frac{2H}{1+H^2} \tilde{\pi}_z(\lambda), \quad \tilde{\pi}_y(-\lambda) = \frac{1-H^2}{1+H^2} \tilde{\pi}_y(\lambda) + \frac{2H}{1+H^2} \tilde{z}_0'(\lambda), \quad (19)$$

$$\tilde{z}_0'(-\lambda) = \frac{H-1}{H+1} \tilde{z}_0'(\lambda) + \frac{2H}{1+H^2} \tilde{\pi}_y(\lambda), \quad \tilde{\pi}_x(-\lambda) = \frac{1-H^2}{1+H^2} \tilde{\pi}_x(\lambda) - \frac{2H}{1+H^2} \tilde{y}_0'(\lambda).$$

Интегрирование этих соотношений приводит к следующему закону продолжения начальных данных на интервал $-\ell < \lambda < 0$:

$$\tilde{y}_0(\lambda) = \frac{1-H^2}{1+H^2} \tilde{y}_0(0) + \frac{2H}{1+H^2} \int_0^\lambda ds \tilde{\pi}_x(s) + \frac{2H}{1+H^2} y_0(0),$$

$$\tilde{y}_0(\lambda + 2\ell) = \tilde{y}_0(\lambda) + \frac{2H^2}{1+H^2} [y_0(\ell) - y_0(0)] - \frac{2H}{1+H^2} \int_0^\ell ds \pi_x(s),$$

$$\tilde{z}_0(\lambda) = \frac{1-H^2}{1+H^2} \tilde{z}_0(\lambda) - \frac{2H}{1+H^2} \int_0^\lambda ds \tilde{\pi}_y(s) + \frac{2H}{1+H^2} z_0(0), \quad (20)$$

$$\tilde{z}_0(\lambda + 2\ell) = \tilde{z}_0(\lambda) + \frac{2H^2}{1+H^2} [z_0(\ell) - z_0(0)] + \frac{2H}{1+H^2} \int_0^\ell ds \pi_y(s).$$

С помощью (19) и (20) можно доказать, что продолженные данные удовлетворяют нелинейным дополнительным условиям:

$$\tilde{\rho}' \tilde{\pi} = 0, \quad \tilde{\rho}'' + \tilde{\pi}' = 0.$$

Эти соотношения справедливы на отрезке $0 < \lambda < \ell$, а из (19) следует, что они выполнены и на отрезке $-\ell < \lambda < 0$. Периодичность входящих в эти уравнения функций позволяет утверждать, что начальные данные удовлетворяют дополнительным условиям на всей числовой оси.

Подстановка в формулу (4) функций $\tilde{\rho}_\mu(\lambda)$ и $\tilde{\pi}_\mu(\lambda)$ дает решение задачи Коши в случае постоянного магнитного поля.

Рассмотрим случай струны в форме отрезка, покоящегося вдоль оси y . Как уже говорилось, концы отрезка заряжены разноименно.

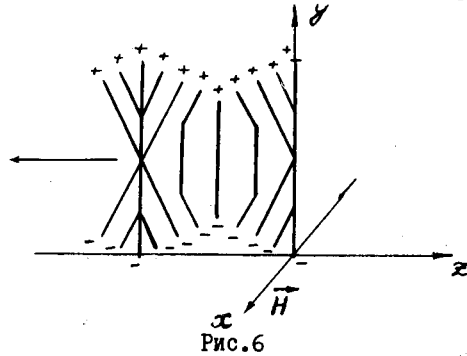


Рис. 6

Струна движется в отрицательном направлении вдоль оси (см. рис. 6), причем в моменты $t = 0, 2\ell, 4\ell, \dots$ она принимает начальную конфигурацию, сместившись на расстояние

$\Delta z = \frac{2H}{1+H^2} \ell$. В моменты $t = \ell, 3\ell, \dots$ струна вытягивается параллельно оси y и имеет длину $\frac{H^2-1}{H^2+1} \ell$.

Заключение

На ряде примеров изучено классическое движение струны в калибровках $n x = \mathcal{P}t$. Нелинейный характер задачи приводит к ряду особенностей в поведении струны. Наиболее характерными из них являются изломы траекторий точек струны и ее профилей. Абсолютная величина скачка скорости, как было показано во втором параграфе, равна скорости света.

Другая особенность движения релятивистской струны — это зависимость ее длины от времени. Струна может, например, стянуться в точку, из окружности превратиться в прямую линию.

Следует отметить и тот факт, что концы струны движутся вдоль кривой, совпадающей с начальным положением струны.

Таким образом, показано, что не всегда удается зафиксировать калибровку посредством соотношения $n x = \mathcal{P}t$. Это невозможно в случае продольных движений с начальными данными, удовлетворяющими условию (9) при изотропном векторе $n \sim (1, 2)$. На это же обстоятельство было обращено внимание в работах [1, 2], где продольные движения струны изучались с другой точки зрения. Авторы этих работ предполагают, что трудности обычной схемы квантования струны в калибровке $t - x = \mathcal{P}t$ [7] связаны с тем, что не учитывается продольное движение струны.

Приложение А

I. Перейдем в (4) к новым параметрам $\tilde{z}, \tilde{\beta}$ посредством преобразования (8). Вводя обозначения $\rho(\beta) = \tilde{\rho}(\tilde{\beta})$, $\rho(\alpha) = \tilde{\rho}(\tilde{\alpha})$, $\sigma(\beta) = \tilde{\sigma}(\tilde{\beta})$, $\sigma(\alpha) = \tilde{\sigma}(\tilde{\alpha})$, перепишем (4) в виде

$$x_\mu(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{\rho}_\mu(\tilde{\beta}) + \tilde{\rho}_\mu(\tilde{\alpha}) + \int_a^{\tilde{\beta}} ds \frac{\tilde{\rho}' \tilde{\sigma}' - (\tilde{\rho} \tilde{\sigma}') \tilde{\rho}'_\mu}{(n \tilde{\rho}') \sqrt{(\tilde{\rho} \tilde{\sigma}')^2 - \tilde{\rho}'^2 \tilde{\sigma}'^2} + \tilde{\rho}' \tilde{\sigma}' - (\tilde{\rho} \tilde{\sigma}') \tilde{\rho}'_\mu} \right\} \quad (IA)$$

$$+ \int_a^{\tilde{\alpha}} ds \frac{\tilde{\rho}'^2 \tilde{\sigma}'_\mu - (\tilde{\rho} \tilde{\sigma}') \tilde{\rho}'_\mu}{(n \tilde{\rho}') \sqrt{(\tilde{\rho} \tilde{\sigma}')^2 - \tilde{\rho}'^2 \tilde{\sigma}'^2} + \tilde{\rho}' \tilde{\sigma}' - (\tilde{\rho} \tilde{\sigma}') \tilde{\rho}'_\mu} \left. \right\}.$$

Если рассмотреть частный случай задачи Коши, когда начальная кривая находится в плоскости $n^\mu x_\mu = 0$, т.е. $n^\mu \rho_\mu = 0$, то формула (IA) приводится к виду (4)

$$x_\mu(\bar{x}, \bar{\beta}) = \frac{\hat{\rho}(\bar{x}) + \hat{\rho}(\bar{\beta})}{2} + \frac{1}{2} \int_{\bar{x}}^{\bar{\beta}} \pi(\sigma) d\sigma,$$

причем параметр σ на начальной кривой $\hat{\rho}(\sigma)$ выбирается из условия $n^\mu \hat{\pi}(\sigma) = P$. Функции $\hat{\rho}_\mu(\sigma)$ и $\hat{\pi}_\mu(\sigma)$ определены соотношениями $x_\mu(\bar{x} = \bar{\beta} = \sigma) = \hat{\rho}_\mu(\sigma)$, $\dot{x}_\mu(\bar{x} = \bar{\beta} = \sigma) = \hat{\pi}_\mu(\sigma)$.

2. Рассмотрим неортогональный базис $n_\mu, e_\mu^{(i)}, \delta_\mu$, где вектор n^μ изотропен, $e_\mu^{(i)}$ — пространственно-подобные единичные векторы, ортогональные между собой и к δ_μ, n_μ , а δ_μ — единичный времениподобный вектор. Согласно [5], соотношение полноты для данного базиса есть:

$$\delta_\mu \delta_\nu - \frac{[n_\mu - (\delta n) \delta_\mu][n_\nu - (\delta n) \delta_\nu]}{(\delta n)^2} - \sum_{i=2}^k e_\mu^{(i)} e_\nu^{(i)} = g_{\mu\nu}.$$

Отсюда сразу следуют разложения (IO).

Если n^μ времениподобен, то можно построить ортогональный базис $n^\mu, e_\mu^{(i)}$ [5], где $(e_\mu^{(i)} e_\nu^{(j)}) = \delta^{ij}$, $(n e_\mu^{(i)}) = 0$. В этом случае соотношение полноты $\frac{n_\mu n_\nu}{n^2} - \sum_{i=1}^k e_\mu^{(i)} e_\nu^{(i)} = g_{\mu\nu}$ приводит к разложениям (IOa).

Приложение Б

Пользуясь свойствами (I3) функции $\psi(\lambda)$, докажем периодичность и четность продолженных с ее помощью функций $\tilde{\rho}_\mu(\lambda)$ и $\tilde{\pi}_\mu(\lambda)$.

$$\tilde{\rho}_\mu(\lambda + 2e) = \rho_\mu(|\lambda + 2e + 2e\psi(\lambda + 2e)|) = \rho_\mu(|\lambda + 2e\psi(\lambda)|) = \tilde{\rho}_\mu(\lambda),$$

$$\tilde{\rho}_\mu(-\lambda) = \rho_\mu(|-\lambda + 2e\psi(-\lambda)|) = \rho_\mu(|\lambda + 2e\psi(\lambda)|) = \tilde{\rho}_\mu(\lambda).$$

Формула (I4) удовлетворяет нелинейным дополнительным условиям, если $\tilde{\rho}'(\lambda) \tilde{\pi}'(\lambda) = 0$ и $\tilde{\rho}'(\lambda) + \tilde{\pi}'(\lambda) = 0$. Эти равенства справедливы на интервале $0 < \lambda < e$. Если же аргумент находится вне промежутка $(0, e)$, то

$$\tilde{\rho}'_\mu(\lambda) = \rho'_\mu(|\lambda + 2e\psi(\lambda)|), \quad \tilde{\pi}'_\mu(\lambda) = \pi'_\mu(|\lambda + 2e\psi(\lambda)|),$$

и, следовательно, дополнительные условия выполняются и в этом случае.

Непосредственной подстановкой (I4) в уравнение Даламбера, нелинейные дополнительные условия и граничные условия, убеждаемся, что решение удовлетворяет всем этим уравнениям.

Приложение В

Для подробного исследования решения предлагается следующий метод. Ввиду наличия в решении разрывной ступенчатой функции $\psi(\lambda)$ плоскость σ, τ удобно разбить на области, где функции $\psi(\sigma + \tau)$ принимают постоянное значение. Разбиение на области представлено на рис. 7.

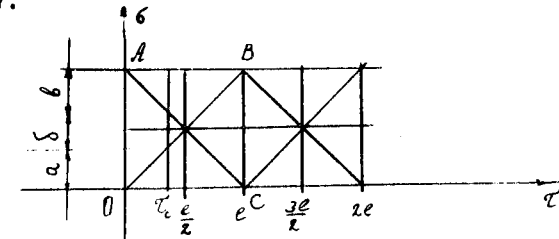


Рис. 7

Если мы хотим изучать профили струны, то можно зафиксировать некоторый момент τ из промежутка $(0, e/2)$ или любого другого, кратного $e/2$. При этом область $0 < \sigma < e$ можно разбить на 3 части:

- а) $0 < \sigma < \tau$,
- б) $\tau < \sigma < e - \tau$,
- в) $e - \tau < \sigma < e$.

При таком разбиении имеем:

- а) $0 < \sigma + \tau < e, -e < \sigma - \tau < 0$,
- б) $0 < \sigma \pm \tau < e$,
- в) $e < \sigma + \tau < 2e, 0 < \sigma - \tau < e$.

Очевидно, что в этих областях функция постоянна, и решение приобретает более простой вид.

С помощью рис.7 области (а), (б), (в) можно находить следующим образом: проводим прямую $\tau_c = const$. Проекции точек пересечения этой прямой с диагоналями квадрата OABC на ось σ делят интервал $0 < \sigma < e$ на 3 выписанных выше области.

Если мы хотим изучать траектории и скорости точек струны, то проводя прямую $\sigma_c = const$, при условии, что σ принадлежит какому-либо из промежутков $(0, e/2)$ $(e/2, e)$ и т.д., разбиваем τ на соответствующие области.

Литература:

1. A.Patrascioiu, Nucl.Phys., B81, 525 (1974).
2. N.Bardeen et al. Phys.Ver., D13, 2364 (1976).
3. Б.М.Барбашов, Н.А.Черников. ОИИИ, P2-7852, Дубна, 1974.
4. Б.М.Барбашов, А.Л.Кожкаров, В.В.Нестеренко. ОИИИ, E2-9975, Дубна, 1976.
5. И.В.Полубаринов, ОИИИ, P-2421, Дубна, 1965.
6. S.Rebbi, Physics Reports, 12C, 1, 1974.
7. P.Goddard et al., Nucl.Phys., B56, 109 (1973).

Рукопись поступила в издательский отдел
14 октября 1976 года.