СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10155

В.Н.Стрельцов

О ПЛОТНОСТИ ТОКА ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2

1976

Р2 - 10155

В.Н.Стрельцов

О ПЛОТНОСТИ ТОКА ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 1/2

Стрельцов В.Н. Р2 - 10155

О плотности тока вероятности для частиц со спином 1/2

Отмечается, что поскольку каждая из компонент биспинора Дирака ψ удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона, то плотность тока вероятности частиц со спином 1/2 может быть также определена с помощью известного выражения $j_i^{KG} = A[\bar{\psi}(\partial\psi/\partial x_i) - (\partial\bar{\psi}/\partial x_i)\psi]$. Отмеченная неоднозначность устраняется в рамках представления Майорана.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Strel'tsov V.N. P2 - 10155

On the Probability Current Density for Spin 1/2 Particles

It is pointed out that since each of the components of the Dirac bispinor ψ satisfies the Klein-Gordon equation, then the density of the probability current for particles with spin 1/2 can be determined using the known expression $j_i^{KG} = A[\bar{\psi}(\partial\psi/\partial x_i) - (\partial\bar{\psi}/\partial x_i)\psi]$. The ambiguity mentioned is eliminated within the Majorana representation.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

1. Как известно, в теории Дирака плотность тока вероятности для частиц со спином 1/2 определяется 4-вектором следующего вида:

$$j_i = \bar{\psi}\gamma_i\psi . \qquad /1/$$

Здесь, как обычно, $\bar{\psi} = \psi^+\gamma_4$, $\psi^+ = (\psi^*)^T$, $c = h = 1$, а для γ-матриц используется представление Дирака-Паули. При этом, в частности,

$$\bar{\psi}\psi = \mathrm{inv} . \qquad /2/$$

С другой стороны, каждая из четырех компонент волновой функции ψ /а также ψ^* /, фигурирующей в уравнении Дирака, подчиняется уравнению Клейна-Гордона. Но коль скоро это так, то, казалось бы, должна иметь физический смысл величина, определяемая выражением вида

$$j_i^{KG} = \frac{1}{2mi}\left(\bar{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_i}\psi\right) \qquad /3/$$

и также описывающая плотность тока вероятности частиц со спином 1/2. Отметим при этом, что возможность построения 4-вектора j_i^{KG} непосредственно обусловлена существованием скаляра /2/.

Что касается различия между j_i и j_i^{KG}, то оно будет выражаться следующей величиной:

$$\Delta j_i = j_i - j_i^{KG} = \frac{1}{2mi}\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\bar{\psi}\gamma_i\gamma_k\psi - \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\psi}\psi)\right]. \qquad /4/$$

Поскольку у нас, в общем, нет никаких оснований для отбрасывания выражений /3/ /или /1//, то мы вынуждены признать существование неоднозначности в определении 4-плотности тока вероятности для частиц со спином 1/2.

Однако, как будет показано ниже, использование другого представления уравнения Дирака позволяет устранить отмеченную трудность.

2. Перейдем для этого к представлению Майорана [1], характеризующемуся следующим выбором матриц γ:

$$\gamma_1 = \gamma_4^{(p)},\ \gamma_2 = \gamma_2^{(p)},\ \gamma_3 = \gamma_5^{(p)},\ \gamma_4 = \gamma_1^{(p)},\ \gamma_5 = \gamma_3^{(p)},$$

где $\gamma^{(p)}$ - матрицы в представлении Дирака-Паули, или в явном виде:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix},\quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}. \qquad /5/$$

Здесь σ_a $(a = 1,2,3)$ - спиновые матрицы Паули, а I - единичная матрица:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что в данном представлении γ_a являются эрмитовыми и действительными матрицами, поэтому они симметричны; γ_4 и γ_5 - эрмитовыми и чисто мнимыми матрицами, поэтому они антисимметричны. Вследствие отмеченных особенностей оператор $[\gamma_i(\partial/\partial x_i) + m]$ и оператор, определяющий преобразование волновой функции при преобразованиях Лоренца, становятся действительными. При этом, в частности, для

комплексной волновой функции ψ ее действительная и мнимая части будут удовлетворять уравнениям /Дирака/ одного и того же вида*.

В рассматриваемом представлении для плотности тока вероятности будем иметь

$$j_i = \tilde{\psi}\gamma_i\psi, \qquad /6/$$

где $\tilde{\psi} = \psi^T(\gamma_4/i)$, или в явном виде:

$$\begin{aligned} j_1 &= 2(\psi_1\psi_4 + \psi_2\psi_3), \\ j_2 &= \psi_1^2 - \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2, \\ j_3 &= 2(\psi_1\psi_2 - \psi_3\psi_4), \\ j_4 &= -i(\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \psi_4^2). \end{aligned} \qquad /6a/$$

При этом для скаляра $\tilde{\psi}\psi$ получим

$$\tilde{\psi}\psi = 0. \qquad /7/$$

Если теперь на основании высказанных в п.1 соображений по аналогии с /3/ мы построим величину

$$j_i^{KG} = a\left(\tilde{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_i}\psi\right), \qquad /8/$$

то /в соответствии с /7// найдем, что

---

* Иными словами, это означает, что поведение частиц со спином 1/2 может быть фактически полностью описано четырьмя реальными волновыми функциями.

$$\dot{j}_i^{KG} = 0. \qquad /8a/$$

Но это означает, что в представлении Майорана, характеризующемся отмеченными выше особенностями, плотность тока вероятности может быть естественным образом определена вполне однозначно. Этот факт следует считать аргументом в пользу предпочтительного применения данного представления.

Литература

1. E.Majorana. Nuovo Cim., 14, 171 /1937/.

*Рукопись поступила в издательский отдел
6 октября 1976 года.*