СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 10154

В.Н.Стрельцов

ТЕНЗОР МОЩНОСТИ-СИЛЫ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

1976

P2 - 10154

В.Н.Стрельцов

ТЕНЗОР МОЩНОСТИ-СИЛЫ И РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА

Summary

The questions concerning the definition of force and work in special relativity are discussed.

For a continuous distribution of mass and charge, the tensor θ_{ik} of power-force is introduced (in particular, its components, $\theta_{\alpha 4}$ and θ_{44}, describe the densities of relativistic force and relativistic power, respectively). Taking as an illustration the electromagnetic field with charges and currents, it is shown that the use of the introduced tensor leads to conventional equations which describe the energy and momentum conservation laws as a 4-divergence of energy-momentum tensor.

In addition, the relativistic equation of motion for an ideal fluid is discussed. In particular, it is noted that the conventional equation for a fluid in motion cannot be assumed to be reasonable as, e.g., the value of proper normal pressure appears in it although the pressure is only a 3-scalar.

В последнее десятилетие некоторые аспекты специальной теории относительности, среди которых можно выделить проблемы релятивистской формулировки статики и термодинамики, снова стали предметом обсуждения. При этом в значительной степени оказались затронутыми вопросы, связанные с определением релятивистской силы и ее работы.

Ниже мы также коротко обсудим указанные вопросы. Вместе с тем, на примере электромагнитного поля с зарядами и токами будет рассмотрено действие релятивистских сил в случае непрерывного распределения заряда и массы. При этом мы коснемся также релятивистского уравнения движения для идеальной жидкости.

1. СИЛА И РАБОТА В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В рамках специальной теории относительности сила представляет собою 4-вектор F_i $(i, k, \ell, m = 1, 2, 3, 4)$. Отметим, что именно использование величины F_i вместо 3-силы позволяет устранить ряд противоречий, возникающих при релятивистской формулировке статики (см., в частности, /1/).

Следуя Меллеру /2/, будем называть величину

$$F_i^* = \frac{dp_i}{d\tau}, \tag{1.1}$$

где τ – собственное время, определяющую скорость изменения 4-импульса p_i, обобщенной силой, а величину

$$F_i = m_0 \frac{du_i}{d\tau}, \qquad (1.2)$$

определяющую изменение 4-скорости u_i частицы, – истинной механической силой.

На основании (1.1) и (1.2) будем иметь

$$F_i^* = m_0 \frac{du_i}{d\tau} + u_i \frac{dm_o}{d\tau} = F_i + \Pi_i . \qquad (1.3)$$

А, кроме того,

$$F_i u_i = 0 \qquad (1.4)$$

и

$$F_i^* u_i = \Pi_i u_i = -\frac{dm_o}{d\tau}, \qquad (1.5)$$

где $C = 1$.

При этом работа обобщенной силы будет определяться формулой

$$dA_4^* = i\,dA^* = F_4^* d\tau = -\frac{u_\alpha}{u_4} F_\alpha^* d\tau - \frac{1}{u_4} dm_o \qquad (1.6)$$

$(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$, а работа истинной механической силы – формулой

$$dA_4 = i\,dA = F_4 d\tau = -\frac{u_\alpha}{u_4} F_\alpha \, d\tau , \qquad (1.7)$$

где F_4^* и F_4 – релятивистские мощности обобщенной и механической сил, соответственно. Последнее выражение можно также переписать в известной форме

$$dA = \vec{v}\, d\vec{p}, \qquad (1.7a)$$

подчеркнув, что в данном случае изменение импульса $d\vec{p}$ не связано с изменением массы.

Здесь уместно затронуть вопрос, касающийся определения количества (переданного некоторому телу) тепла dQ с точки зрения несобственной системы отсчета при условии, что в собственной системе отсчета K° в результате указанной передачи тепла данное тело

остается в покое. Поскольку в этом случае механическая сила $F_i = 0$, то, будучи 4-вектором, она, а следовательно, и производимая ею работа, будет равна нулю и во всех других инерциальных системах отсчета. Поэтому в планковском определении количества тепла как количества энергии за вычетом механической работы dA последнее слагаемое на самом деле будет равно нулю. В результате чего на основании (1.6) для закона преобразования тепла получим /3/:

$$dQ = \frac{u_4}{i} dQ^\circ . \qquad (1.6a)$$

Выразим далее работу силы, которая вызывает изменение энергии некоторого тела (системы), через тензор энергии-импульса T_{ik} этого тела. В собственной системе отсчета рассматриваемого тела для работы обобщенной силы, в частности, будем иметь

$$dA_4^{*\circ} = T_{44}^\circ dV_4^\circ = -T_{\alpha\alpha}^\circ dV_4^\circ - \mu^\circ dV_4^\circ . \qquad (1.8)$$

Здесь dV_4 – компонента 4-вектора элемента объема, который в K° определяется величиной $dV_i^\circ (0,0,0,-i\,dx^\circ dy^\circ dz^\circ)$, а μ° – собственная плотность массы.

Полученное таким образом уравнение (1.8) соответствует выражению (1.6).

В принципе можно также определить работу, связанную с изменением кинетической энергии тела, как

$$dA_4^\circ = T_{44}^\circ dV_4^\circ + \mu^\circ dV_4^\circ = -T_{\alpha\alpha}^\circ dV_4^\circ . \qquad (1.9)$$

В случае идеальной жидкости последнее выражение может быть переписано в виде

$$dA^\circ = 3p^\circ dV^\circ, \qquad (1.9a)$$

которое в частном случае одного пространственного измерения сводится к известной формуле

$$dA^\circ = p^\circ dV^\circ . \qquad (1.9б)$$

2. ТЕНЗОР МОЩНОСТИ-СИЛЫ

Как уже отмечалось выше, релятивистская сила, действующая на тело малых размеров (частицу), представляет собою 4-вектор. При этом, например, 4-сила Лоренца определяется выражением

$$F_i = e(F_{ik} \ u_k), \tag{2.1}$$

где e – заряд частицы, а F_{ik} – тензор электромагнитного поля.

Вместе с тем в теории относительности пространственный объем или фактически обратная ему величина – плотность в единице объема – являются временными компонентами 4-вектора объема и 4-вектора плотности тока, соответственно.

Сказанное позволяет утверждать, что в случае непрерывного распределения материи (массы, заряда), например, плотность X -компоненты релятивистской силы в единице пространственного объема должна определяться компонентой θ_{14} 4-тензора второго ранга *.

В частности, для релятивистской силы Лоренца при этом будем иметь

$$\theta_{14} = (F_{1k} \ u_k) j_4 . \tag{2.2}$$

В то же время, например, компонента θ_{41} будет определяться выражением

$$\theta_{41} = (F_{4k} \ u_k) j_1 . \tag{2.3}$$

---

* В то время как, напомним, плотность 3-силы является компонентой 4-вектора. В связи с этим возникает вопрос о возможности записи релятивистских законов сохранения энергии и импульса в виде дивергенции тензора энергии-импульса. Однако, как следует из рассмотренного ниже примера электромагнитного поля, прежняя форма записи указанных законов сохраняется в этом случае и при использовании тензора плотности силы.

Отсюда можно заключить, что $\theta_{14} \neq \theta_{41}$, т.е. вводимый таким путем тензор θ_{ik} мощности-силы, несимметричен *.

Таким образом, в рассматриваемом специальном случае, когда электромагнитное поле и 4-скорость можно считать постоянными внутри данного элемента объема, тензор плотности релятивистской силы Лоренца будет определяться выражением

$$\theta_{ik} = F_{i\ell} \ u_\ell \, j_k . \tag{2.4}$$

Если далее мы воспользуемся уравнениями Максвелла-Лоренца, то, например, для компонент θ_{14} и θ_{41} получим

$$\theta_{14} = - \frac{\partial T_{1m}}{\partial x_m} u_4 , \tag{2.5}$$

$$\theta_{41} = - \frac{\partial T_{1n}}{\partial x_k} u_1 , \tag{2.6}$$

где T_{ik} – тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Или в общем случае

$$\theta_{ik} = - \frac{\partial T_{i\ell}}{\partial x_\ell} u_k . \tag{2.7}$$

С учетом того, что величины j_i, в частности, могут быть представлены в виде

$$j_i = \rho^\circ u_i , \tag{2.8}$$

где ρ° – собственная плотность зарядов, придем к общеизвестным выражениям

$$- \frac{\partial T_{1m}}{\partial x_m} = (F_{1k} \ u_k)\rho^\circ = F_{1k} \, j_k , \tag{2.9}$$

---

* Вопрос, касающийся свойств симметрии тензора θ_{ik}, мы оставляем здесь в стороне.

$$-\frac{\partial T_{4k}}{\partial x_k} = (F_{4k} u_k)\rho^\circ = F_{4k} j_k . \qquad (2.10)$$

Или, в общем случае,

$$-\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = F_{i\ell} j_\ell . \qquad (2.11)$$

Последнее уравнение можно представить в другом виде, если воспользоваться тензором энергии-импульса электрической материи *

$$S_{ik} = j_i A_k + A_i j_k - \delta_{ik} j_\ell A_\ell . \qquad (2.12)$$

Переписав для этого выражение (2.4) (с учетом (2.8)) в форме

$$\theta_{ik} = \left(\frac{\partial A_\ell}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_\ell}\right) j_\ell u_k \qquad (2.13)$$

и опираясь на равенства

$$\frac{\partial j_\ell}{\partial x_\ell} = 0, \quad \frac{\partial A_\ell}{\partial x_\ell} = 0, \quad \frac{\partial j_\ell}{\partial x_i} - \frac{\partial j_i}{\partial x_\ell} = 0, \; ** \qquad (2.14)$$

представим два члена в скобках соответственно

$$\frac{\partial (j_\ell A_\ell)}{\partial x_i} - A_\ell \frac{\partial j_\ell}{\partial x_i}, \quad -\frac{\partial (A_i j_\ell)}{\partial x_\ell} + A_i \frac{\partial j_\ell}{\partial x_\ell} .$$

Добавляя к ним

$$-j_i \frac{\partial A_\ell}{\partial x_\ell} = -\frac{\partial (A_\ell j_i)}{\partial x_\ell} + A_\ell \frac{\partial j_i}{\partial x_\ell} ,$$

---

* В свое время в литературе обсуждался также несимметричный тензор энергии-импульса, например, следующего вида: $A^k j^\ell - (1/2) A^i j_i \delta^{k\ell}$ (см., в частности, /4/).

** Равенство $\mathrm{rot}_{i\ell}\, j = 0$ можно считать прямым следствием представления 4-плотности тока в виде $j_\ell = \partial Q / \partial V_\ell$, где Q - заряд системы, а V_ℓ-компонента 4-вектора объема.

получим

$$\theta_{ik} = -\frac{\partial S_{i\ell}}{\partial x_\ell} u_k . \qquad (2.15)$$

В результате, привлекая (2.7), придем к равенству

$$\frac{\partial (T_{i\ell} - S_{i\ell})}{\partial x_\ell} = \frac{\partial R_{i\ell}}{\partial x_\ell} = 0. \qquad (2.16)$$

3. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Поскольку в определенных случаях электромагнитное поле может служить достаточно хорошей моделью идеальной жидкости *, а гидродинамическое уравнения очень часто оказываются аналогичными уравнениями электродинамики, то есть достаточные основания для применения полученных выше результатов к релятивистской гидродинамике.

Напомним при этом, что в собственной системе отсчета K° тензор энергии-импульса идеальной жидкости имеет отличными от нуля только диагональные элементы:

$$T^\circ_{ik} = \begin{pmatrix} p^\circ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\epsilon^\circ \end{pmatrix}. \qquad (3.1)$$

Такой вид T°_{ik} является фактическим следствием определения указанного тензора с помощью следующего выражения (см. /5/):

$$T^\circ_{ik} = \frac{1}{2}(t^\circ_{\underset{\rightarrow}{ik}} + t^\circ_{\underset{\leftarrow}{ik}}), \qquad (3.2)$$

---

* Примером тому является термически равновесное электромагнитное излучение, заключенное внутри замкнутой полости.

где в случае T°_{14} например, $\underset{\rightarrow}{t}{}^{\circ}_{14}$ и $\underset{\leftarrow}{t}{}^{\circ}_{14}$ описывают плотности X -компоненты импульса частиц, движущихся в положительном и отрицательном направлениях оси OX, соответственно, а t_{ik}, в частности, – "тензор кинетической энергии".

Рассмотрим теперь движение идеальной жидкости. Для этого перейдем в систему отсчета K, которая перемещается вдоль оси $O^{\circ}X^{\circ}$ K°-системы со скоростью $-\beta$. Полагая, что в случае идеальной жидкости также справедливо равенство (2.7), для плотности X -компоненты силы в единице объема будем иметь

$$\theta_{14} = -\left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{14}}{\partial x_4}\right) u_4 . \qquad (3.3)$$

Записывая плотность X -компоненты ньютоновской силы в виде

$$\theta_{14} = J_4 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} , \qquad (3.4)$$

где J_4 – временная компонента 4-плотности тока массы, и принимая во внимание равенство (2.8), справедливое и в случае плотности массы, получим

$$\mu^{\circ} \frac{du_1}{d\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial t} , \qquad (3.5)$$

где μ° – собственная плотность массы жидкости, $p = T_{11}$, $i g_x = T_{14}$. На основании формул преобразования для компонент T_{11} и T_{14} тензора энергии-импульса идеальной жидкости можно выразить g_x через величины μ° и p. При этом будем иметь

$$g_x = \beta \, \frac{\mu^{\circ} + 4p}{1 + 3\beta^2} . \qquad (3.6)$$

Сравним теперь полученное нами уравнение с общепринятым уравнением движения идеальной жидкости (см., например, [6]), X -компонента которого имеет вид

$$(\epsilon^{\circ} + p^{\circ}) \frac{du_1}{d\tau} = -\frac{\partial p^{\circ}}{\partial x_1} - u_1 \frac{dp^{\circ}}{d\tau} \qquad (3.7)$$

или

$$(\mu^{\circ} + 4p^{\circ}) \frac{du_1}{d\tau} = -\frac{\partial p^{\circ}}{\partial x_1} - u_1 \frac{dp^{\circ}}{d\tau} . \qquad (3.7a)$$

Для этого выразим в (3.5) p и g_x через p° и μ°. В результате получим

$$(2\mu^{\circ} + 4p^{\circ}) \frac{du_1}{d\tau} = -\frac{\partial p^{\circ}}{\partial x_1} - u_1 \frac{dp^{\circ}}{d\tau} . \qquad (3.5a)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (3.7a) и (3.5a) отличаются числовым коэффициентом при первом члене в левой части. Однако здесь важно подчеркнуть другое. Запись уравнения движения в K -системе через величины ϵ° и p°, измеряемые в K°-системе, физически оправдана только в том случае, если плотность энергии и давление инвариантны. На самом же деле величины ϵ и p являются только 3-скалярами[5]. В то же время собственная плотность массы μ° может быть введена с помощью следующего инвариантного выражения:

$$\mu^{\circ} = -T_{ii} . \qquad (3.8)$$

Сказанное позволяет утверждать, что в специальном случае уравнение движения идеальной жидкости должно определяться выражением (3.5) с учетом (3.6)*. Если рассмотренная выше K -система движется произвольным образом относительно K°, т.е. переход к ней осуществляется на основе общих преобразований Лоренца, то в уравнении (3.5) появятся дополнительные члены, зависящие от касательных напряжений. Это чисто релятивистский эффект.

В заключение п.3 отметим, что обычное (нерелятивистское) уравнение Эйлера для идеальной жидкости вытекает из (3.5) при условии, что плотность X-компоненты импульса в данной точке пространства слабо зависит от времени. Последнее условие в нерелятивист-

---

*Что касается общепринятой формулы (3.7), то в ней после перехода к p и g_x будет, очевидно, отсутствовать требуемый член, описывающий плотность силы инерции.

ском пределе будет действительно выполнено, поскольку на основании (3.6) второй член в (3.5) может быть представлен в виде $-\beta\,\partial(\beta p)/\partial x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-9509, Дубна, 1976.
2. C.Møller.Physica Norvegica, 5,297,1971.
3. H.Ott. Zeits. f. Phys., 175,70,1963.
4. O.Costa de Beauregard. Précis of Special Relativity,Academic Press,N.Y.&L.,1966,p.67
5. В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-7435, Дубна, 1973.
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, §125, 1954.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 октября 1976 года.