СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10138

В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий

К ВОПРОСУ О ДЛИТЕЛЬНОСТИ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ В ОБЛАСТИ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ

1976

P2 - 10138

В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий

К ВОПРОСУ О ДЛИТЕЛЬНОСТИ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ В ОБЛАСТИ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ

Любошиц В.Л., Подгорецкий М.И. Р2 - 10138

К вопросу о длительности ядерных реакций в области перекрываюшнхся резонансов

Вычислены среднее значение и дисперсия времени задержки τ в предположении, что сильно перекрывающиеся резонансы распределены не по закону Пуассона. Показано, что полученный в предыдущей работе [1] вывод о малости относительной флуктуации τ остается в силе и в этом случае.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Lyuboshitz V.L., Podgoretsky M.I. P2 - 10138

About the Nuclear Reactions Duration in the Overlapping Resonances Region

The average value of the delay time and its dispersion are calculated. It is assumed that the strongly overlapping resonances are not distributed according to the Poisson law. It is shown that the conclusion about the relative fluctuation smallness[1] is correct in this case too.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

1. В работе [1] рассматривался вопрос о длительности τ процесса упругого рассеяния бесспиновых частиц в области перекрывающихся резонансов, имеющих один и тот же угловой момент ℓ; предполагалось также, что упругое рассеяние является единственным возможным типом взаимодействия. Тогда его амплитуда

$$f(E,\theta) = \frac{2\ell+1}{2ik}\{\prod_n \frac{E_n - E + \frac{1}{2} i\Gamma_n}{E_n - E - \frac{1}{2} i\Gamma_n} - 1\} P_\ell(\cos\theta), \qquad /1/$$

где E - суммарная энергия в системе центра инерции, k - волновое число, θ - угол рассеяния, E_n - положение соответствующего резонанса, Γ_n - его ширина. Формулу /1/ можно также записать в виде

$$f(E,\theta) = \frac{2\ell+1}{2ik}(e^{2i\sum_n \delta_n} - 1) P_\ell(\cos\theta), \qquad /2/$$

$$\delta_n = \operatorname{arctg}\frac{\Gamma_n}{2(E_n - E)}. \qquad /3/$$

Далее предполагалось, что точки E_n распределены вдоль оси энергии случайным образом в соответствии с законом Пуассона с постоянной плотностью ρ и что амплитуда $f(E,\theta)$ является по этой причине случайной функцией E.

Момент образования компаунд-системы фиксируется с точностью $\Delta x/v$, где v - скорость рассеивающихся частиц, а Δx - продольные размеры волнового пакета. Поэтому время задержки τ имеет квазиклассический операциональный смысл /т.е. может быть в принципе измерено в опытах с запаздывающими совпадениями/, если характерные для рассматриваемого процесса значения τ велики по сравнению с $\Delta x/v$; как следствие, связанная с наличием конечного Δx немонохроматичность частиц должна быть велика по сравнению с величиной энергетического интервала, на котором происходит существенное изменение амплитуды $f(E,\theta)$. При выполнении указанного условия можно поставить также вопрос о виде закона распределения $P(\tau)$.

В работе [1] было показано, что

$$P(\tau) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\epsilon,\theta)\,e^{-i\epsilon\tau/\hbar}\,d\epsilon, \qquad /4/$$

где $\phi(\epsilon,\theta)$ - функция корреляции амплитуд, т.е.

$$\phi(\epsilon,\theta) = \frac{\langle f(E,\theta)f^*(E-\epsilon,\theta)\rangle}{\langle |f(E,\theta)|^2\rangle}. \qquad /5/$$

Знак $\langle\ \rangle$ означает среднее по случайным положениям резонансов при фиксированной энергии E*. С помощью соотношений, полученных в работе [2], далее было показано, что при сильном перекрывании, т.е. при выполнении дополнительного условия

$$\rho\Gamma \gg 1, \qquad /6/$$

$$\phi(\epsilon) = \frac{1}{2}\left[1 + \exp\left(-\frac{2\pi\rho\Gamma\epsilon^2 - 2\pi i\rho\epsilon\Gamma^2}{\epsilon^2+\Gamma^2}\right)\right]. \qquad /7/$$

При выводе /7/ все ширины Γ_n для простоты предполагались одинаковыми ($\Gamma_n = \Gamma$). В рассматриваемом частном случае функция корреляции не зависит от угла θ, поскольку все резонансы имеют совпадающие орбитальные моменты ℓ и общая угловая зависимость $P_\ell^2(\cos\theta)$ выпадает.

Подставляя /7/ в /4/, получаем закон распределения времени задердки в виде

* В рамках общеприиятой в рассматриваемой области статистической гипотезы и в предположении постоянства ρ такая процедура эквивалентна усреднению по энергии внутри интервала немонохроматичности ΔE.

$$P(\tau) = \frac{1}{2}\delta(\tau) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi\rho\Gamma\epsilon^2 - 2\pi i\rho\epsilon\Gamma^2}{\epsilon^2+\Gamma^2} - \frac{i\epsilon\tau}{\hbar}\right)d\epsilon. \qquad /8/$$

Первый член /8/ соответствует дифракционному рассеянию, которое происходит мгновенно, второй - рассеянию через промежуточную компаунд-систему. Если интересоваться только последним процессом, то соответствующий закон распределения времени задержки

$$\tilde{P}(\tau) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{2\pi\rho\Gamma\epsilon^2 - 2\pi i\rho\epsilon\Gamma^2}{\epsilon^2+\Gamma^2} - i\frac{\epsilon\tau}{\hbar}\right)d\epsilon, \qquad /9/$$

а соответствующая корреляционная функция

$$\tilde{\phi}(\epsilon) = \exp\left(-\frac{2\pi\rho\Gamma\epsilon^2 - 2\pi i\rho\epsilon\Gamma^2}{\epsilon^2+\Gamma^2}\right). \qquad /10/$$

Величины $\bar{\tau} = \int_0^\infty \tau\tilde{P}(\tau)d\tau$ и $\overline{\tau^2} = \int_0^\infty \tau^2\tilde{P}(\tau)d\tau$, как известно, можно вычислить, зная $\tilde{\phi}(\epsilon)$. Поскольку

$$\tilde{\phi}(\epsilon) = \int_0^\infty \tilde{P}(\tau)\,e^{i\epsilon\tau/\hbar}\,d\tau, \qquad /11/$$

для $\bar{\tau}$ и $\overline{\tau^2}$ имеем

$$\bar{\tau} = -i\hbar\frac{d\tilde{\phi}(\epsilon)}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}, \quad \overline{\tau^2} = -\hbar^2\frac{d^2\tilde{\phi}(\epsilon)}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0}. \qquad /12/$$

С помощью /10/ и /12/ для среднего времени задержки $\bar{\tau}$ и дисперсии D_τ получаем выражения

$$\bar{\tau} = \frac{2\pi\hbar}{\bar{\Delta}}, \quad D_\tau = \frac{4\pi\hbar^2}{\Gamma\bar{\Delta}}, \qquad /13/$$

где $\bar{\Delta} = 1/\rho$ - среднее расстояние между резонансами; относительная флуктуация

$$\eta_\tau = \sqrt{\frac{D_\tau}{(\bar{\tau})^2}} = \sqrt{\frac{\bar{\Delta}}{\pi\Gamma}}. \qquad /14/$$

Полученные результаты обладают двумя важными особенностями. Во-первых, $\bar{\tau} \neq \hbar/\Gamma$, и при выполнении условия /6/ величина $\bar{\tau} \gg \hbar/\Gamma$. Во-вторых, из /6/ и /14/ следует, что относительная флуктуация $\eta_\tau \ll 1$, т.е. закон распределения $\tilde{P}(\tau)$ при очень сильном перекрывании приближается к дельта-функции $\delta(\tau-\bar{\tau})$. Возникает вопрос, насколько указанные свойства связаны с исходным предположением о том, что резонансы распределены в соответствии с законом Пуассона? Ниже будет показано, что эти свойства остаются и при других законах распределения резонансов, гораздо более общих, чем закон Пуассона *.

Для этого надо исследовать поведение функции $\tilde{\phi}(\epsilon)$. При выполнении /6/ и с учетом /2/ и /3/ эту функцию можно представить в виде

$$\tilde{\phi}(\epsilon) = 2\phi(\epsilon) - 1 = \langle \prod_n e^{2i\mu_n} \rangle , \qquad /15/$$

$$\mu_n = \mathrm{arctg}\frac{\Gamma_n}{2(E_n - E)} - \mathrm{arctg}\frac{\Gamma_n}{2(E_n + \epsilon - E)} \quad ** . \qquad /16/$$

Рассмотрим положения любых трех смежных резонансов E_{n-1}, E_n и E_{n+1}. В случае закона Пуассона величины $\Lambda_n = E_n - E_{n-1}$ и $\Lambda_{n+1} = E_{n+1} - E_n$ статистически независимы и каждая из них распределена по закону

$$U(\Lambda) = \rho e^{-\rho\Lambda} \qquad /17/$$

Теперь выражение /17/ мы заменим на произвольную положительную функцию $U(\Lambda)$, нормированную на единицу ($\int_0^\infty U(\Lambda)\,d\Lambda = 1$), оставив в силе предположение о статистической независимости смежных интервалов Λ_n и Λ_{n+1}.

---

*Для неперекрывающихся резонансов имеет место т.н. "отталкивание" смежных уровней, и закон Пуассона не выполняется. При сильном перекрывании "отталкивание", по-видимому, исчезает, и можно думать, что это приводит к пуассоновскому распределению /3/. Однако такое утверждение, при всей его естественности, нельзя все же считать доказанным. Поэтому рассмотрение более общего случая представляется вполне целесообразным.

** Предполагается, что при сильном перекрывании выполнено равенство $\langle \prod_n e^{2i\delta_n} \rangle = 0$.

2. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу. Пусть имеется энергетический интервал q, на котором расположено N резонансов. Левый конец интервала предполагается q совпадающим с каким-то резонансом, который в число N не включается. Нас будут интересовать статистические свойства N, а именно $\bar{N}$ и дисперсия D_N. Вероятность того, что ближайший к левому концу интервала q резонанс расположен между Λ и $\Lambda + d\Lambda$, равна $U(\Lambda)d\Lambda$. С такой вероятностью число резонансов на интервале q равно единице плюс число резонансов на оставшемся интервале $(q-\Lambda)$. Отсюда немедленно следует, что величины $\overline{N(q)}$ и $\overline{N^2(q)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\overline{N(q)} = \int_0^q [\overline{N(q-\Lambda)} + 1]\, U(\Lambda)\, d\Lambda , \qquad /18/$$

$$\overline{N^2(q)} = \int_0^q [\overline{N^2(q-\Lambda)} + 2\overline{N(q-\Lambda)} + 1]\, U(\Lambda)\, d\Lambda . \qquad /19/$$

Разобьем интервал q на две части q_1 и q_2, число резонансов в каждой из этих частей обозначим соответственно N и N ,так что $q = q_1 + q_2$ и $N = N_1 + N_2$. Случайные величины N_1 и N_2 были бы статистически независимыми, если бы резонансы распределялись в соответствии с законом Пуассона. В общем случае, т.е. при отступлении от /17/, это уже не так. Вместе с тем ясно, что статистическая зависимость между N_1 и N_2 связана только с теми резонансами, которые расположены вблизи границы раздела q_1 и q_2 и отстоят от этой границы на расстояниях порядка $\bar{\Lambda}$. Поэтому статистическая независимость практически восстанавливается в асимптотических условиях, когда $q_{1,2} \gg \bar{\Lambda}$ или, что то же самое, $\bar{N}_{1,2} \gg 1$. Тогда для среднего и дисперсии можно записать равенства

$$\bar{N} = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 , \quad D_N = D_{N_1} + D_{N_2} ,$$

из которых следует, что эти величины пропорциональны длине интервала q, т.е.

$$\bar{N} = \rho q, \quad D_N = \alpha q . \qquad /20/$$

Поскольку $\overline{N^2} = (\bar{N})^2 + D_N$, можно также записать

$$\overline{N^2} = \rho^2 q^2 + \alpha q . \qquad /21/$$

Дальнейшая задача состоит в вычислении ρ и α. Для этого выражение /20/ для $\bar{N}$ и /21/ для $\overline{N^2}$ надо подставить в уравнения /18/ и /19/, причем верхние пределы в интегралах следует взять бесконечными, поскольку речь идет об асимптотическом режиме. Подставляя $\bar{N} = \rho q$ в /18/, получаем

$$\rho q = \int_0^\infty (\rho q - \rho \Delta + 1)\, U(\Delta) d\Delta = \rho q + 1 - \rho \bar{\Delta},$$

откуда после сокращения члена ρq следует, что

$$\rho = 1/\bar{\Delta}, \qquad \bar{N} = q/\bar{\Delta}. \qquad /22/$$

Подстановка $\overline{N^2} = q^2/(\bar{\Delta})^2 + \alpha q$ в /19/ приводит к равенству

$$\frac{q^2}{(\bar{\Delta})^2} + \alpha q = \int \Big[\frac{(q-\Delta)^2}{(\bar{\Delta})^2} + \frac{2(q-\Delta)}{\bar{\Delta}} + \alpha (q - \Delta) + 1 \Big]\, U(\Delta) d\Delta ,$$

из которого следует, что

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{(\bar{\Delta})^2} - 1 - \alpha \bar{\Delta} = 0 .$$

В итоге получаем

$$\alpha = \frac{D_\Delta}{(\bar{\Delta})^3} = \frac{D_\Delta}{(\bar{\Delta})^2} \rho \;\; * . \qquad /23/$$

Для закона Пуассона на основании /17/ получаем $\bar{\Delta} = 1/\rho$, $D_\Delta = 1/\rho^2$ и $\alpha = \rho$. В более общем случае

$$\alpha = \gamma \rho, \qquad /24/$$

---

* Строго говоря, вместо /20/ и /21/ следовало бы записать

$$\bar{N} = \rho q + a, \quad D_N = \alpha q + b, \quad \overline{N^2} = (\rho q + a)^2 + \alpha q + b ,$$

где a и b - дополнительные константы. Легко, однако, убедиться в том, что эти уточнения не изменяют формул /22/ и /23/.

где $\gamma = D_\Delta / (\bar{\Delta})^2$ - безразмерная величина порядка единицы.

Сделаем еще один шаг по пути обобщения, отказавшись от статистической независимости смежных интервалов Δ_n и Δ_{n+1}, но предполагая быстрое затухание статистической зависимости между интервалами Δ_n и Δ_{n+j} с ростом j. Такое предположение является уже очень общим, и вряд ли можно думать, что распределение положений резонансов ему не соответствует. Но тогда полностью остается в силе проведенное выше рассуждение с разбиением достаточно большого интервала на две части , из которого следует асимптотическая аддитивность среднего числа резонансов и дисперсии D_N, т.е. оба равенства /20/. Из соображений размерности ясно, что остается верным и равенство /24/; явное выражение для константы γ определяется характером предполагаемого затухания статистической зависимости между Δ_n и Δ_{n+j}, но естественно ожидать, что в реалистических ситуациях величина γ по-прежнему не слишком отличается от единицы.

3. Вернемся к основной теме. В соответствии с формулами /12/ и /15/ надо вычислить две первые производные от произведения $\prod_n e^{2i\mu_n}$ по ϵ при $\epsilon = 0$ и усреднить полученные результаты по случайным положенням резонансов. Вводя в целях сокращения записи обозначение $\nu = 2\Sigma \mu_n$, получим

$$\prod_n e^{2i\mu_n} = e^{i\nu}, \quad \frac{de^{i\nu}}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = i \frac{d\nu}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0},$$

$$\frac{d^2 e^{i\nu}}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0} = -\Big(\frac{d\nu}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\Big)^2 + i \frac{d^2\nu}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0} .$$

На основании /16/ имеем также

$$\frac{d\nu}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = \sum_n \frac{\Gamma_n}{(E_n - E)^2 + \frac{1}{4}\Gamma_n^2},$$

$$\frac{d^2\nu}{d\epsilon^2}\Big|_{\epsilon=0} = \sum_n \frac{2\Gamma_n(E_n-E)}{[(E_n-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2]^2}\,.$$

Вторая сумма, как и следовало ожидать, обращается после усреднения в нуль /величина $\overline{\tau^2}$ должна быть действительной/. В результате для среднего значения времени задержки получаем выражение

$$\bar{\tau} = \hbar\left\langle\frac{d\nu}{d\epsilon}\Big|_{\epsilon=0}\right\rangle = \hbar\left\langle\sum_n \frac{\Gamma_n}{(E_n-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2}\right\rangle, \qquad /25/$$

а для среднего квадрата τ –

$$\overline{\tau^2} = \hbar^2\left\langle\left[\sum_n \frac{\Gamma_n}{(E_n-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2}\right]^2\right\rangle. \qquad /26/$$

Если ширины всех резонансов совпадают, то

$$\bar{\tau} = \hbar\left\langle\sum_n \frac{\Gamma_n}{(E_n-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2}\right\rangle. \qquad /25'/$$

Разобьем энергетическую ось на большое число интервалов Δq_m, малых по сравнению с шириной Γ. Все слагаемые суммы /25'/, относящиеся к одному и тому же интервалу Δq_m, совпадают по величине и равны $\frac{\Gamma}{(q_m-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma^2}$, где q_m указывает расположение интервала Δq_m. Поэтому величину $\langle\sum_n \frac{\Gamma}{(E_n-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma^2}\rangle$ можно заменить на $\langle\sum_m \frac{\Gamma N_m}{(q_m-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma^2}\rangle$, где N_m - число резонансов, расположенных внутри Δq_m. Если выполнено условие /6/, все N_m можно считать статистически независимыми, причем на основании /20/ имеем также $\bar{N}_m = \rho\Delta q_m$. Можно, следовательно, переписать /25'/ в виде

$$\bar{\tau} = \hbar\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma\rho\, dq}{(q-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma^2} = 2\pi\hbar\rho = \frac{2\pi\hbar}{\bar{\Delta}}\,.$$

Таким образом, для $\bar{\tau}$ мы приходим к прежнему результату /13/ и убеждаемся в том, что он остается справедливым и при отказе от предположения о распределении резонансов по закону Пуассона. Заметим, что $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma dq}{(q-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma^2}$ не зависит от Γ; поэтому, если имеются резонансы нескольких типов с ширинами $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ и соответствующими плотностями $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ и отсутствует корреляция между ширинами резонансов и их энергиями, то аналогичное рассуждение снова дает $\bar{\tau} = 2\pi\hbar\rho$, где $\rho = \rho_1+\rho_2+\dots+\rho_k$. Следовательно, первое равенство /13/ имеет силу и при отказе от предположения об одинаковости всех ширин Γ_n *.

Перейдем теперь к вычислению $\overline{\tau^2}$. Представим /26/ в виде

$$\overline{\tau^2} = \hbar^2\left[\left\langle\sum_n \frac{\Gamma_n}{(E_n-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2}\right\rangle\right]^2 + D_x\,, \qquad /27/$$

$$x = \hbar\sum_n \frac{\Gamma}{(E_n-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2}\,.$$

Сопоставление /25/ и /27/ показывает, что величина D_x равна дисперсии времени задержки D_τ. В дальнейших вычислениях мы будем предполагать все ширины

* Следует отметить, что при вычислении $\bar{\tau}$ мы можем вообще отказаться от статистических предположений и в соответствии с исходными определениями в работе /1/ провести усреднение величины $\sum_n(\Gamma_n/[(E_n-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma_n^2])$ непосредственно по энергии внутри интервала немонохроматичности ΔE. Легко видеть, что при $\Delta E \gg \Gamma_n$

$$\tau = \frac{\hbar}{\Delta E}\int\sum_n(\Gamma_n/[(E_n-E)^2+\frac{1}{4}\Gamma^2])dE = 2\pi\hbar\rho\,,$$

где $\rho = N/\Delta E$, а N - число резонансов в интервале ΔE. Сказанное подтверждает общность соотношения /13/ для $\bar{\tau}$.

Γ_n совпадающими. По аналогии с рассуждениями, проведенными при вычислении $\bar{\tau}$, основываясь на соотношениях /20/ и /24/, получим

$$D_\tau = \hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Gamma}{(q-E)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \right]^2 \gamma\rho dq = \frac{4\pi\gamma\hbar^2}{\Gamma\bar{\Lambda}}, \qquad /28/$$

Таким образом, и здесь мы приходим к прежнему результату /13/ с тем небольшим отличием, что появляется дополнительный множитель γ, близкий к единице. Заметим также, что для большинства реалистических распределений $U(\Lambda)$ соотношение /23/ приводит к значениям $\gamma < 1$; например, т.н. распределению Вигнера, когда

$U(\Lambda) = \frac{\pi\Lambda}{2(\bar{\Lambda})^2} e^{-\pi\Lambda^2/4(\bar{\Lambda})^2}$, соответствует $\gamma = (\frac{4}{\pi} - 1) \approx 0{,}274$. Тем самым основной вывод о малости относительной флуктуации времени задержки при большой плотности уровней не только подтверждается, но фактически еще и усиливается.

Авторы благодарят Б.Н.Валуева за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г.И.Копылов, В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий. Сообщения ОИЯИ, Р2-9688, Дубна, 1976.*
2. *В.Л.Любошиц, М.И.Подгорецкий. ЯФ, 24, 214 /1976/.*
3. J.E.Lynn. The Theory of Neutron Resonance Reactions. Clarendon Press. Oxford (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел 29 сентября 1976 года.