СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

С324.1г
М-758
5204/2-76
31.-77г

P2 - 10127

В.В.Молотков, С.Г.Петрова

УНИТАРНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНФОРМНОЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ

1976

Молотков В.В., Петрова С.Г. P2 - 10127

Унитарные скалярные представления конформной супералгебры

Найдены двухточечные функции Грина, инвариантные относительно суперконформных преобразований. Они определяют сплетающие операторы между представлениями, позволяющие найти инвариантные подпространства в пространствах суперполей $\Phi(x, \theta)$. Получены унитарные скалярные представления - аналог скалярных представлений инвариантной дискретной серии конформной группы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований

Дубна 1976

Molotkov V.V., Petrova S.G. P2 - 10127

Unitary Scalar Representations of the Conformal Superalgebra

The two-point Green functions invariant with respect to the superconformal representations have been found. They determine the interwining operators between the representations. These operators allow one to find the invariant subspaces in the superfield $\Phi(x,\theta)$ spaces. The unitary scalar representations have been obtained as the analog of the scalar representations for the invariant discrete series of the conformal group.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

P2 - 10127

В.В.Молотков, С.Г.Петрова

УНИТАРНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНФОРМНОЙ СУПЕРАЛГЕБРЫ

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением работы[1], которая будет цитироваться в дальнейшем как работа I. Обозначения в ней - те же самые, что и в работе I, за одним исключением: вместо χ_3 размерности z используется величина $\lambda \equiv \frac{3}{2} z$.

В первом параграфе найдены все инвариантные двухточечные функции Грина и некоторые инвариантные трехточечные функции скалярных представлений T_χ, построенных в работе I.

Инвариантные двухточечные функции определяют сплетающие операторы между представлениями T_χ, позволяющие, в свою очередь, найти инвариантные подпространства в пространствах суперполей E_χ (§ 2).

В § 3 получены унитарные скалярные представления - аналог скалярных представлений интерполированной дискретной серии конформной группы[2].

§ I. Двухточечные и трехточечные функции Грина

Условие глобальной инвариантности двухточечной функции представлений T_{χ_1} и T_{χ_2} можно записать следующим образом:

$$\{T_{\chi_1}(g) \otimes T_{\chi_2}(g)\} G_{\chi_1 \chi_2} = 0 \quad (\chi_i = (d_i, z_i),\ i = 1,2). \qquad (I.I)$$

Вместо условия (I.I) мы будем использовать на самом деле более слабое условие локальной инвариантности (инвариантности относительно алгебры $soq(4,2)$

© 1976 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

$$T_{\chi_1 \otimes \chi_2}(M)\, G_{\chi_1 \chi_2} \equiv \left(T_{\chi_1}(M) \otimes 1 + 1 \otimes T_{\chi_2}(M) \right) G_{\chi_1 \chi_2} = 0 \qquad (\mathrm{I}.2)$$

$$(M \in so\,q(4,2)),$$

так как глобального инварианта может и не существовать, потому что преобразования из $so\,(4,2) \subset so\,q\,(4,2)$ не сохраняют причинной упорядоченности пространства Минковского[3,4] x).

Из P-инвариантности следует, что

$$G_{\chi_1 \chi_2}(x_1, x_2; \theta_1, \theta_2) = G_{\chi_1 \chi_2}(x, \theta_1, \theta_2) \qquad (x = x_1 - x_2). \qquad (\mathrm{I}.3)$$

Положим

$$\theta = \theta_1 - \theta_2, \quad \tau = \theta_1 + \theta_2 . \qquad (\mathrm{I}.4)$$

Тогда условие S -инвариантности принимает вид

$$\partial_\tau G = \frac{i}{2} \hat{\partial} \theta G . \qquad (\mathrm{I}.5)$$

Общее решение уравнения (I.5) есть

$$G_{\chi_1 \chi_2}(x, \theta, \tau) = e^{\frac{i}{2} \bar{\tau} \hat{\partial} \theta} G^{\circ}_{\chi_1 \chi_2}(x, \theta) = G^{\circ}_{\chi_1 \chi_2}(x + \tfrac{i}{2} \bar{\tau} \gamma \theta, \theta), \qquad (\mathrm{I}.6)$$

где $G_{\chi_1 \chi_2}(x, \theta)$ – произвольная функция x и θ .

Из требования T -инвариантности следует, что $G_{x_1 x_2}$ может быть отличным от нуля только в случаях

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \pm 3 . \qquad (\mathrm{I}.7)$$

При этом, если $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, то

$$G^{\circ}(x, \theta) = A(x) + \bar{\theta} \hat{B}(x) \theta + (\bar{\theta}\theta)^2 D(x) , \qquad (\mathrm{I}.8)$$

если же $\lambda_1 + \lambda_2 = \pm 3$, то

$$G^{\circ}(x, \theta) = A^{\pm}(x) \bar{\theta}^{\pm} \theta^{\pm} . \qquad (\mathrm{I}.9)$$

x) Как было отмечено в работе I, евклидовой формулировки теории, инвариантной относительно $SOQ(4,2)$, не существует.

Условие T-инвариантности, учитывая (I.6), можно записать в виде

$$T'_{\chi_1 \otimes \chi_2}(T)\, G^{\circ}_{\chi_1 \chi_2}(x, \theta) = 0, \qquad (\mathrm{I}.10)$$

где

$$T'_{\chi_1 \otimes \chi_2}(T) \equiv e^{-\frac{i}{2} \bar{\tau} \hat{\partial} \theta}\, T_{\chi_1 \otimes \chi_2}(T)\, e^{\frac{i}{2} \bar{\tau} \hat{\partial} \theta} =$$

$$= i \hat{x} \partial_\theta + \hat{x} \partial \tau + N \left(\frac{d_1 + d_2}{2} + \frac{1}{2} i (\lambda_1 + \lambda_2) \gamma_5 \right) \tau + (d_1 - d_2 + i(\lambda_1 - \lambda_2)\gamma_5)\theta + \qquad (\mathrm{I}.11)$$

$$+ \{ \bar{\tau}\theta + \bar{\tau}\gamma_5 \theta \gamma^5 - \frac{1}{2} \bar{\tau} \gamma_5 \gamma_\mu \theta \gamma^\mu \gamma^5 + \frac{1}{2} \bar{\tau} \gamma_\mu \theta \gamma^\mu \} \partial_\theta + i (\bar{\theta}\theta) \hat{\partial} \theta + \ldots$$

В равенстве (I.11) опущены члены, пропорциональные ∂_τ и дающие нулевой вклад при действии на $G^{\circ}(x, \theta)$, которое от τ не зависит.

Решая уравнение (I.10) с учетом (I.8) и (I.9), мы находим, что инвариантные двухточечные функции не равны нулю в следующих случаях:

1) $\chi_1 = \chi = (d, \lambda), \quad \chi_2 = \tilde{\chi} = (2-d, -\lambda)$,

$$G_{\chi \tilde{\chi}}(x, \theta) = c\, \delta(x) \delta(\theta), \qquad (\mathrm{I}.12)$$

где

$$\delta(\theta) \equiv \frac{1}{8} (\bar{\theta}\theta)^2 . \qquad (\mathrm{I}.12')$$

2) $\chi_1 = (d, d), \quad \chi_2 = (3-d, 3-d)$,

$$G_{(d,d)(3-d,3-d)}(x, \theta, \tau) = c\, e^{\frac{i}{2} \bar{\tau}^{+} \hat{\partial} \theta^{-}} \delta(x) \delta(\theta^{+}) \equiv G^{+} . \qquad (\mathrm{I}.13)$$

2') $\chi_1 = (d, -\frac{2}{3} d), \quad \chi_2 = (3-d, -\frac{2}{3}(3-d))$,

$$G_{(d,-d)(3-d,d-3)}(x, \theta, \tau) = c\, e^{\frac{i}{2} \bar{\tau}^{-} \hat{\partial} \theta^{+}} \delta(x) \delta(\theta^{-}) \equiv G^{-} . \qquad (\mathrm{I}.14)$$

Функции $\delta(\theta^2)$ определены равенством

$$\delta(\theta^2) = \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\theta^2 . \tag{I.14'}$$

3) $\chi_1 = (d, \lambda) \equiv \chi$, $\chi_2 = (d, -\lambda) \equiv \dot{\chi}$,

$$G_{\chi\dot{\chi}}(x,\theta,\tau) = C_\chi\, e^{\frac{i}{2}\bar{\tau}\hat{\partial}\theta - \frac{\lambda}{2d}\bar{\theta}\gamma_5\hat{\partial}\theta + \frac{(\lambda^2-d^2)}{8d^2(d-1)}(\bar{\theta}\gamma_5\hat{\partial}\theta)^2}(x^2)^{-d} = \tag{I.15}$$

$$= C_\chi\, e^{\frac{i}{2}\bar{\tau}\hat{\partial}\theta}\left\{1 + \frac{\lambda}{d}\,\frac{\bar{\theta}\gamma_5\hat{x}\theta}{x^2} + \frac{1}{2}(d-\lambda^2)\,\frac{(\bar{\theta}\theta)^2}{x^2}\right\}(x^2)^{-d} .$$

Из функций (I.12)-(I.15) только функции (I.12) и (I.15) имеют аналог в конформно-инвариантной теории[3,4]. Заметим еще, что функцию (I.15) можно выразить через функцию $B^R_\chi(x,\theta)$ (весовой множитель R -инверсии (см. I § 3)):

$$G_{\chi\dot{\chi}}(x,\theta,\tau) = C_\chi\, B^R_{\dot{\chi}}(x + \tfrac{i}{2}\bar{\tau}\gamma\theta,\ \theta). \tag{I.16}$$

При этом она удовлетворяет (формально) условию R -инвариантности:

$$B^R_\chi(x_1,\theta_1)\,B^R_{\dot{\chi}}(x_2,\theta_2)\,G_{\chi\dot{\chi}}(Rx_1 - Rx_2;\ R\theta_1, R\theta_2) = G_{\chi\dot{\chi}}(x_1 - x_2;\ \theta_1,\theta_2). \tag{I.17}$$

Перейдем теперь к трехточечным функциям. Введем переменные:

$$\begin{aligned} x_{12} &= x_1 - x_2 , \quad x_{23} = x_2 - x_3 , \quad x_{31} = x_3 - x_1 , \\ \theta_{12} &= \theta_1 - \theta_2 , \quad \theta_{23} = \theta_2 - \theta_3 , \quad \theta_{31} = \theta_3 - \theta_1 , \\ \tau_{12} &= \theta_1 + \theta_2 , \quad \tau_{23} = \theta_2 + \theta_3 , \quad \tau_{31} = \theta_3 + \theta_1 . \end{aligned} \tag{I.18}$$

Из P- и S -инвариантности следует, что трехточечная функция $\Gamma_{\chi_1\chi_2\chi_3}(x_1, x_2, x_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ должна иметь вид

$$\Gamma = \exp\left\{\tfrac{i}{2}\bar{\tau}_{12}\hat{\partial}_{12}\theta_{12} + \bar{\tau}_{23}\hat{\partial}_{23}\theta_{23} + \bar{\tau}_{31}\hat{\partial}_{31}\theta_{31}\right\}\Gamma^0(x_{12}, x_{23}, x_{31}, \theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{31}) , \tag{I.19}$$

где Γ^0 - произвольная функция переменных $x_{12},\dots,\theta_{31}$ и при дифференцировании по $\partial_{12}, \partial_{23}, \partial_{31}$ все переменные $x_{12},\dots\tau_{31}$ в формуле (I.19) рассматриваются как независимые.

Мы здесь будем искать только трехточечные функции вида

$$\Gamma_{\chi_1\chi_2\chi_3}(x_1,x_2,x_3;\theta_1,\theta_2,\theta_3) = G_{\varphi_3\dot{\varphi}_3}(x_{12},\theta_{12},\tau_{12})\,G_{\varphi_1\dot{\varphi}_1}(x_{23},\theta_{23},\tau_{23})\,G_{\varphi_2\dot{\varphi}_2}(x_{31},\theta_{31},\tau_{31}) \tag{I.20}$$

(аналог конформно-инвариантной трехточечной функции[3]). Такая функция, очевидно, представима в виде (I.19). Проще всего найти связь между χ_i и φ_i , если наложить на функцию Γ условие R - инвариантности вместо условия инвариантности относительно бесконечно малых T_α - или K_μ-преобразований (хотя такой вывод и не будет вполне строгим).

Из условия R -инвариантности функции (I.20) легко получить, используя соотношение (I.17), что должно выполняться следующее равенство:

$$\begin{aligned} &B^R_{\chi_1}(x_1,\theta_1)\,B^R_{\chi_2}(x_2,\theta_2)\,B^R_{\chi_3}(x_3,\theta_3) = \\ &= B_R^{\varphi_3}(x_1,\theta_1)\,B_R^{\dot{\varphi}_3}(x_2,\theta_2)\,B_R^{\varphi_1}(x_2,\theta_2)\,B_R^{\dot{\varphi}_1}(x_3,\theta_3)\,B_R^{\varphi_2}(x_3,\theta_3)\,B_R^{\dot{\varphi}_2}(x_1,\theta_1), \end{aligned} \tag{I.21}$$

Учитывая, что

$$B_R^{\chi_1}(x,\theta)\,B_R^{\chi_2}(x,\theta) = B_R^{\chi_1+\chi_2}(x,\theta) , \tag{I.22}$$

мы получаем из (I.21) следующие соотношения для χ_i и φ_i :

$$\chi_1 = \dot{\varphi}_2 + \varphi_3 , \quad \chi_2 = \dot{\varphi}_3 + \varphi_1 , \quad \chi_3 = \dot{\varphi}_1 + \varphi_2 . \tag{I.23}$$

Полагая

$$\chi_i = (d_i, \lambda_i), \quad \varphi_i = (\delta_i, \delta_i) \tag{I.24}$$

и расписывая равенства (I.23) покомпонентно, мы находим:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0; \tag{I.25}$$

$$\delta_1 = \tfrac{1}{2}(d_2 + d_3 - d_1), \quad \delta_2 = \tfrac{1}{2}(d_3 + d_1 - d_2), \quad \delta_3 = \tfrac{1}{2}(d_1 + d_2 - d_3); \tag{I.26}$$

$$\sigma_1 = \Sigma + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2}, \quad \sigma_2 = \Sigma + \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{2}, \quad \sigma_3 = \Sigma + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}, \tag{I.27}$$

где Σ - произвольный комплексный параметр.

Таким образом, здесь, в отличие от случая конформной группы[3], трехточечная функция вида (I.20) существует не для произвольных χ_1, χ_2, χ_3, а лишь для таких, которые удовлетворяют условию (I.25), и в этом случае существует целое однопараметрическое семейство ненулевых трехточечных функций.

Более того, каждой достаточно хорошей функции $\rho(\Sigma)$ мы можем поставить в соответствие инвариантную трехточечную функцию

$$\Gamma_{\chi_1 \chi_2 \chi_3}[\rho] = \int \rho(\Sigma)\, \Gamma^{\Sigma}_{\chi_1 \chi_2 \chi_3}\, d\Sigma, \tag{I.28}$$

где $\Gamma^{\Sigma}_{\chi_1 \chi_2 \chi_3}$ обозначает трехточечную функцию (I.20), зависящую от параметра Σ (см. (I.27). Т.е. требование суперконформной инвариантности не определяет трехточечную функцию однозначно (с точностью до мультипликативной константы). Однако оказывается, что этот произвол не так уж велик. Интегрируя (I.28) по $d\Sigma$ с учетом (I.16), мы получим самый общий вид инвариантной трехточечной функции вида (I.20):

$$\Gamma_{\chi_1 \chi_2 \chi_3}(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \Gamma^{0}_{\chi_1 \chi_2 \chi_3}(x_1, x_2, x_3, \theta_1, \theta_2, \theta_3)\, f(K), \tag{I.29}$$

где

$$K \equiv K(\theta_i, x_i) = \frac{\bar\theta_{12}\gamma_5(\widehat{x_{12} + \frac{i}{2}\bar\theta_{12}\gamma\theta_{12}})\theta_{12}}{(x_{12} + \frac{i}{2}\bar\theta_{12}\gamma\theta_{12})^2} + \text{цикл перест}\,(1,2,3), \tag{I.30}$$

а $f(K)$ - произвольная функция. Однако можно показать, что K - нильпотентно:

$$K^3 = 0, \quad f(K) = a + bK + cK^2, \tag{I.31}$$

поэтому функция (I.29) зависит на самом деле всего от трех произвольных констант, одна из которых мультипликативна.

Заметим, что, вообще говоря, могут существовать и другие инвариантные трехточечные функции как при $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, так и при $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \pm 3, \pm 6, \pm 9$. Мы здесь не будем их искать.

§ 2. Сплетающие операторы и приводимость представлений

В данной работе используется реализация представлений в пространствах $E^+_\chi \subset S'_+(X) \otimes \Lambda_4(\theta)$ и $E^-_\chi \subset S'_-(X) \otimes \Lambda_4(\theta)$ (см. I § 4 и [2]). Соответственно нам потребуются более точные обозначения: ${}^+T_\chi$ - для голоморфных представлений (реализованных в пространстве граничных значений функций, голоморфных в трубе будущего) и ${}^-T_\chi$ - для антиголоморфных представлений. Там, где это не будет приводить к недоразумениям, индекс "+" будет опускаться.

Инвариантные двухточечные функции являются ядрами сплетающих операторов между представлениями ${}^{\sigma}T_{\chi}$ ($\sigma = \pm$). А именно, любая инвариантная двухточечная функция вида $G_{\chi_2 \tilde{\chi}_1}$ определяет сплетающий оператор $E_{\chi_1} \xrightarrow{A} E_{\chi_2}$ по формуле

$$(A\Phi_{\chi_1})(x_2,\theta_2) = \int G_{\chi_2 \tilde{\chi}_1}(x_2-x_1,\, \theta_2, \theta_1)\, \Phi_{\chi_1}(x_1,\theta_1)\, dx_1 d\theta_1 \,. \tag{2.1}$$

Тот факт, что (2.I), действительно, определяет сплетающий оператор (т.е. такой оператор, что $T_{\chi_2}(M)A = A\,T_{\chi_1}(M)$ для любого $M \in \operatorname{Aog}(4,2)$), следует из инвариантности $G_{\chi_2 \tilde{\chi}_1}$ (см. (I.2)).

Основное свойство сплетающих операторов, которое нам понадобится при исследовании вопроса о приводимости представлений, следующее: $\operatorname{Ker} A$ есть инвариантное подпространство в E_{χ_1}, а $\operatorname{Im} A$ - инвариантное подпространство в E_{χ_2}.

Двухточечные функции представлений T_χ найдены нами в § I (см. (I.I2)-(I.I5)). Перейдем теперь к нахождению сплетающих операторов, определяемых по формуле (2.I).

I) Функция $G_{\chi\tilde{\chi}}$ (см. (I.I2)) определяет тривиальный сплетающий оператор:

$$E_\chi \xrightarrow{cI} E_\chi \,. \tag{2.2}$$

2⁺) Функция G^{+} (см. (I.I3)) определяет сплетающий оператор A_d^{+} :

$$E_{(d,-(2-d))} \xrightarrow{A_d^{+}} E_{(d+1,\, d+1)} \,. \tag{2.3}$$

При этом нетрудно найти, что

$$\operatorname{Im} A_d^{+} = \{ e^{i\bar{\theta}^{+}\partial\theta^{-}} \phi'(x,\theta^{+}) \} \equiv E^{+}_{d+1} \subset E_{(d+1,(d+1))}, \tag{2.4}$$

$$\operatorname{Ker} A_d^{+} = \{ e^{i\bar{\theta}^{+}\partial\theta^{-}} (\phi'(x,\theta^{+}) + \bar{\Psi}'(x,\theta^{+})\theta^{-} \} \equiv E'^{-}_{d} \subset E_{(d,-(2-d))}, \tag{2.5}$$

где штрихи у суперполей означают, что они берутся в физическом базисе (см. I. § 4).

2⁻) Совершенно аналогично функция G^{-} (см. (I.I4)) определяет сплетающий оператор

$$E_{(d,d)} \xrightarrow{A_d^{-}} E_{(d+1,-(d+1))} \,. \tag{2.6}$$

При этом

$$\operatorname{Im} A^{-} = \{ e^{i\bar{\theta}^{-}\partial\theta^{+}} \phi'(x,\theta^{-}) \} \equiv E^{-}_{d+1} \subset E_{(d+1,-(d+1))} \,, \tag{2.7}$$

$$\operatorname{Ker} A^{-} = \{ e^{i\bar{\theta}^{-}\partial\theta^{+}} (\phi'(x,\theta^{-}) + \psi'(x,\theta^{-})\theta^{+}) \} \equiv E'^{+}_{d} \subset E_{(d,2-d))}. \tag{2.8}$$

В конце этого параграфа мы докажем, что представления T_d^{+} и T_d^{-} эквивалентны, соответственно, представлениям R_d^{+} и R_d^{-}, найденным в работах [7,8]. Что же касается представлений $T'^{\pm}_{d}$, то, вероятно, они эквивалентны представлениям, построенным в работе [9], которые реализуются на скалярных суперполях вида $\Phi^{\pm}(x,\theta^{+},\theta^{-}) = \phi(x,\theta^{\pm}) + \bar{\Psi}^{\mp}(x,\theta^{\pm})\theta^{\mp}$.

Заметим, что операторы

$$P_+ = e^{i\bar\theta^+\hat\partial\theta^-}\left[1-\tfrac{3}{2}\bar\theta^-\partial_\theta^- + \tfrac{1}{2}(\bar\theta^-\partial_\theta^-)^2\right],\quad P_- = e^{i\bar\theta^-\hat\partial\theta^+}\left[1-\tfrac{3}{2}\bar\theta^+\partial_\theta^+ + \tfrac{1}{2}(\theta^+\partial_\theta^+)^2\right], \tag{2.9}$$

$$P'_+ = e^{-i\bar\theta^+\hat\partial\theta^-}\left[1+\tfrac{1}{2}\bar\theta^+\partial_\theta^+ - \tfrac{1}{2}(\theta^+\partial_\theta^+)^2\right],\quad P'_- = e^{-i\bar\theta^-\hat\partial\theta^+}\left[1+\tfrac{1}{2}\bar\theta^-\partial_\theta^- - \tfrac{1}{2}(\theta^-\partial_\theta^-)^2\right] \tag{2.9'}$$

обладают свойствами

$$P_\pm E_{(d,\pm d)} = E_d^\pm, \qquad P'_\pm E_{(d,\pm(2-d))} = E_d^{\pm\prime}. \tag{2.10}$$

При этом операторы P_+ и P_- являются проекционными операторами, проектирующими на инвариантные подпространства в $E_{(d,\lambda)}$ и $E_{(d,-\lambda)}$, операторы же $P'_\pm$ удовлетворяют соотношениям

$$P_+'^{\,n} = P'_+ - i(n-1)\bar\theta^+\hat\partial\theta^- P_-,$$
$$P_-'^{\,n} = P'_- - i(n-1)\bar\theta^-\hat\partial\theta^+ P_+. \tag{2.11}$$

Проекционные операторы P_+ и P_- удовлетворяют также соотношениям

$$[T_{(d,\lambda)}(M), P_+]P_+ = 0,$$
$$[T_{(d,\lambda)}(M), P_-]P_- = 0, \quad (M\in Soq(4,2)), \tag{2.12}$$

которые выражают условие инвариантности подпространств E_d^+ и E_d^-, записанное на языке операторов проектирования на эти подпространства. Аналогичные результаты справедливы для антиголоморфных представлений $^-T_\chi$.

Отметим еще, что проекционные операторы Π_+, Π_- и Π_0 (а также операторы $\Pi_i' = 1-\Pi_i$), определенные в работе /10/, удовлетворяют соотношениям инвариантности

$$[T_\chi(M)\Pi]\Pi = 0 \qquad (M\in Soq(4,2)) \tag{2.13}$$

при следующих значениях χ : Π_+ при $\chi=(d,+d)$; Π_- при $\chi=(d,-d)$; Π'_+ при $\chi=(d,2-d)$, Π'_- при $\chi=(d,-(2-d))$, Π_0 при $\chi=(2,0)$, Π'_0 при $\chi=(0,0)$.

Однако операторы Π_i и Π_i' не определены в пространствах E_χ, потому что в них в качестве сомножителя входит оператор ∂^{-2}, а оператор ∂^2/E_χ, в лучшем случае, будет иметь только левый обратный, так как $Im\,\partial^2/E_\chi \neq E_\chi$.

3) Перейдем теперь к сплетающим операторам, определяемым функцией (I.15). Эти сплетающие операторы связывают на самом деле голоморфные представления с антиголоморфными. Мы получим, таким образом, операторы

$${}^\sigma E_\chi \xrightarrow{\mathcal{A}_\chi} {}^{\sigma}E_{\tilde\chi}, \tag{2.14}$$

действующие по формуле

$$({}^\sigma\mathcal{A}_\chi\phi)(x_1,\theta_1) = \int G_{\tilde\chi\chi}(x_1-i\sigma\varepsilon,\theta,\tau)\phi(x_2,\theta_2)dx_2 d\theta_2, \tag{2.15}$$

где

$$\varepsilon^2<0,\ \varepsilon_0>0,\ \vec\varepsilon^{\,2}+\varepsilon_0^2\to 0. \tag{2.16}$$

Возникновение добавки $-i\sigma\varepsilon$ в двухточечной функции $G_{\tilde\chi\chi}$ нетрудно понять, если рассмотреть реализацию представлений $^\pm T_\chi$ в пространствах функций, голоморфных или антиголоморфных в трубе будущего, найти двухточечную функцию $^{\sigma,-\sigma}G_{\chi,\tilde\chi}$ в такой реализации и затем устремить аргументы этой функции к характеристической границе трубы будущего (прошлого). Тогда мы и получим, что

$$ {}^{\tau,-\tau}G_{\chi\tilde{\chi}}(x,\theta,\tau) = G_{\chi\tilde{\chi}}(x-i\sigma\varepsilon,\theta,\tau). \qquad (2.17) $$

Здесь ${}^{\tau,-\tau}G_{\chi\tilde{\chi}}$ обозначает двухточечную функцию представлений ${}^{\sigma}T_{\chi}$ и ${}^{-\sigma}T_{\tilde{\chi}}$.

Найдем теперь оператор

$$ {}^{\sigma}T_{\chi} \xrightarrow{{}^{-\sigma}A_{\tilde{\chi}}\,{}^{\sigma}A_{\chi}} {}^{\sigma}T_{\chi}\ . \qquad (2.18) $$

Переходя к фурье-образу по χ, после некоторых вычислений мы переходим к результату:

$$ \int G_{\chi\tilde{\chi}}(x_{12}+i\sigma\varepsilon,\theta_{12},\tau_{12})\, G_{\tilde{\chi}\tilde{\tilde{\chi}}}(x_{23}-i\sigma\varepsilon,\theta_{23},\tau_{23})\,dx_2\,d\theta_2 = \qquad (2.19) $$

$$ = C_{\chi} C_{\tilde{\chi}} \frac{(2\pi)^6(\lambda^2-d^2)(\lambda^2-(2-d)^2)}{\Gamma(d)\Gamma(2-d)\Gamma(d+1)\Gamma(3-d)} K_{\sigma}(x)\,\delta(\theta_{13}), $$

где

$$ K_{\sigma}(x) \equiv K(x+i\sigma\varepsilon), \quad K(z) \equiv \frac{4}{(2\pi)^3}(z^2)^{-2}. \qquad (2.20) $$

Функция $K_{\sigma}(x)$ играет роль δ-функции в пространстве $S'_{\sigma}(x)$, поэтому равенство (2.19) означает, что оператор ${}^{-\sigma}A_{\tilde{\chi}}\,{}^{\sigma}A_{\chi}$ кратен единичному:

$$ {}^{-\sigma}A_{\tilde{\chi}}\,{}^{\sigma}A_{\chi} = C_{\chi} C_{\tilde{\chi}} \frac{(2\pi)^6(\lambda^2-d^2)(\lambda^2-(2-d)^2)}{\Gamma(d)\Gamma(2-d)\Gamma(d+1)\Gamma(3-d)} I\ . \qquad (2.21) $$

Из равенства (2.21) можно сделать вывод, что при $\chi \notin \{(d,\pm d), (d,\pm(2-d))\}$ представления ${}^{\sigma}T_{\chi}$ и ${}^{-\sigma}T_{\tilde{\chi}}$ эквивалентны с точностью до подпредставлений конечной $(ко)$ размерности, которые могут существовать в "целых точках" $\chi = (n,\lambda)\ (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

Мы не будем здесь исследовать вопрос о существовании таких подпредставлений. В случае же $\chi = (d,\pm d)$ или $\chi = (d,\pm(2-d))$ можно найти, что ядром (образом) оператора ${}^{\sigma}A_{\chi}$ будет одно из найденных выше инвариантных подпространств ${}^{\tau}E_d^{\pm}$ или ${}^{\tau}E_d^{\pm\prime}$ опять же с точностью до вышеупомянутых инвариантных подпространств (см. Приложение).

Можно исследовать также сплетающие операторы между различными подпредставлениями и фактор-представлениями представлений T_{χ}. Мы здесь не будем делать этого в общем случае, установим лишь эквивалентность представлений ${}^{\tau}T_d^{+}$ и ${}^{\sigma}T_{3-d}^{-}$, воспользовавшись результатами работы /8/.

Прежде всего, нетрудно доказать, что проекционные операторы P_+ и P_-, определяемые равенствами (2.9), удовлетворяют соотношениям

$$ P_+ R_d^+(M) = T_{(d,d)}(M) P_+\ , \qquad (2.22) $$

$$ P_- R_d^-(M) = T_{(d,-d)}(M) P_- \quad M \in sog(4,2), \qquad (2.23) $$

то есть операторы P_+ и P_- являются сплетающими операторами:

$$ R_d^+ \xrightarrow{P_+} T_{(d,d)}\ , \quad R_d^- \xrightarrow{P_-} T_{(d,-d)} $$

(R_d^+ и R_d^- - представления, действующие на скалярных суперполях $\phi(x,\theta^+)$ и $\phi(x,\theta^-)$ /7,8/). При этом

$$ Ker\, P_+|_{R_d^+} = Ker\, P_-|_{R_d^-} = 0, \qquad (2.24) $$

$$ Im\, P_+|_{R_d^+} = E_d^+, \quad Im\, P_-|_{R_d^-} = E_d^-, $$

то есть

$$ R_d^+ \approx T_d^+, \quad R_d^- \approx T_d^-. \qquad (2.25) $$

Единственные нетривиальные сплетающие операторы между представлениями ${}^{\sigma}R_d^{\pm}$ есть

$$ {}^{\sigma}R_d^{+} \xrightarrow{{}^{\sigma}A_d^{+}} {}^{-\sigma}R_{3-d}^{-}\,, \quad {}^{\sigma}R_d^{-} \xrightarrow{{}^{\sigma}A_d^{-}} {}^{-\sigma}R_{3-d}^{+}\,. \tag{2.26} $$

Они определяются двухточечной функцией [8]

$$ \Delta_d^{+-}(x,\theta_1^+,\theta_2^-) = c_d\, e^{-2i\bar{\theta}_1^+\hat{\partial}\theta_2^-}(x^2 \pm i\varepsilon x_0)^{-d} \tag{2.27} $$

посредством выражения, аналогичного формуле (2.I).

При этом нетрудно найти, что

$$ A_{3-d}^{-} A_d^{+} = \frac{8\pi^6 c_d c_{3-d}}{\Gamma(d)\Gamma(d-1)\Gamma(3-d)\Gamma(2-d)}\, I \tag{2.28} $$

вследствие равенства

$$ \int \Delta_d^{+-}(x_{13}+i\varepsilon,\theta_1^+\theta^-)\,\Delta_{3-d}^{-+}(x_{32}-i\varepsilon,\theta^-,\theta_2^+)\,dx_3\,d\theta = \frac{8\pi^6 c_d c_{3-d} K_d(x_{12})\delta(\theta_{12}^-)}{\Gamma(d)\Gamma(d-1)\Gamma(3-d)\Gamma(2-d)}. \tag{2.29} $$

Из (2.28) следует эквивалентность (в вышеуказанном смысле) представлений

$$ {}^{\sigma}R_d^{+} \sim {}^{-\sigma}R_{3-d}^{-}\,, \tag{2.30} $$

а, следовательно, вследствие (2.26) эквивалентность представлений

$$ {}^{\sigma}T_d^{+} \sim {}^{-\sigma}T_{3-d}^{-}\,. \tag{2.31} $$

Сводку всех найденных инвариантных подпространств и сплетающих операторов см. в Приложении.

§ 3. Инвариантные билинейные функционалы и унитарные представления

Билинейный функционал $B(1,2)$, определенный на пространствах представлений T_{χ_1} и T_{χ_2}, называется инвариантным билинейным функционалом, если

$$ B(T_{\chi_1}(M)\phi_1,\phi_2) + B(\phi_1, T_{\chi_2}(M)\phi_2) = 0, \qquad M \in Aoq(4,2),\ \ \phi_i \in E_i\,. \tag{3.1} $$

Так как пространства E_χ ядерны, то для любого билинейного функционала B существует линейный функционал B', определенный на $E_{\chi_1}\otimes E_{\chi_2}$, такой, что

$$ B(\phi_1,\phi_2) = \langle B',\ \phi_1\otimes\phi_2\rangle\,. \tag{3.2} $$

Переписав условие (3.I) с учетом (3.2), мы находим:

$$ (\tilde{T}_1(M)\otimes 1 + 1\otimes \tilde{T}_2(M))B' = B'\,, \tag{3.3} $$

т.е. ядром инвариантного билинейного функционала является некоторая инвариантная двухточечная функция (см. (I.2)).

Таким образом, каждая из найденных в § I функций $G_{\chi_1\chi_2}$ определяет некоторый инвариантный билинейный функционал (вообще говоря, только формально):

$$ B_{\chi_1\chi_2}(\phi_1,\phi_2) = \int \phi_1(x_1,\theta_1)\, G_{\chi_1\chi_2}(x_{12},\theta_{12},\tau_{12})\,\phi_2(x_2,\theta_2)\,dx_1 dx_2 d\theta_1 d\theta_2\,. \tag{3.4} $$

Зная инвариантные билинейные функционалы, нетрудно найти инвариантные эрмитовы функционалы [5]. В нашем случае единственным инвариантным эрмитовым функционалом, который может быть также и положительно определенным, является следующий функционал, определенный при вещественных λ :

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_\chi = n_\chi \int \Psi^*(x_1,\theta_1)\, G_{\dot\chi\tilde\chi}(x_{12}-i\sigma\varepsilon, \theta_{12}, \tau_{12})\, \Phi(x_2,\theta_2)\, dx_1 dx_2 d\theta_1 d\bar\theta_1 \tag{3.5}$$

(далее в этом параграфе мы рассматриваем только голоморфные представления ${}^+T_\chi = T_\chi$).

Функционал (3.5) при реализации пространства E_χ^- в виде пространства функций, голоморфных в трубе будущего, выглядит следующим образом:

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_\chi = n_\chi \int \Phi_1^*(z,\theta_1)\, G_{\dot\chi\tilde\chi}(-2i\,\mathrm{Im}\, z, \theta_1^* - \theta_2, \theta_1^* + \theta_2)\, \Phi_2(z,\theta_2)\, dz\, d\bar z\, d\theta_1^* d\theta_2 . \tag{3.6}$$

Для того, чтобы определить область положительной определенности функционала (3.5), его нужно записать в импульсном представлении и в физическом базисе (см. I, § 4), в котором он будет диагонален. Мы определим здесь фурье-преобразование таким образом, чтобы носители функций $\mathcal{F}\Phi$ для $\Phi \in {}^+E_\chi$ лежали в конусе прошлого, т.е.

$$(\mathcal{F}\Phi)(p,\theta) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int e^{-ipx}\,\tilde\Phi(x,\theta)\,dx . \tag{3.7}$$

Тогда мы получим после утомительных вычислений:

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle_\chi = \frac{\pi^3 n_\chi c_\chi}{4^{1-d}\,\Gamma(2-d)\Gamma(1-d)} \int dp\, \theta(-p_0)\theta(-p^2)(-p^2)^{2-d}\, \Phi_{1a}^*(p) M^{ab}(p) \Phi_{2b}(p), \tag{3.8}$$

где

$$\Phi_1^+ M \Phi_2 = \frac{D_1'^* D_2'}{2p^4} + \frac{8(d^2-\lambda^2)((d-2)^2-\lambda^2)}{d(d-1)^2(d-2)} A_1'^* A_2' - \frac{4[(d-2)^2-\lambda^2]}{p^4(d-2)^2}\left\{\left(1+\frac{2}{1-d}\right)g_{\mu\nu} - \frac{2p_\mu p_\nu}{p^2}\right\} A_1'^{*\mu} A_2'^{\nu}$$
$$- \frac{4}{p^2}\left\{ \frac{d(d-2)+\lambda^2}{(d-1)(d-2)}(F_1'^* F_2' + G_1'^* G_2') + \frac{2\lambda i}{d-2}(F_1'^* G_2' - G_1'^* F_2')\right\} + \tag{3.9}$$
$$+ \frac{2}{p^2}\,\bar\chi_1'^*\left(1+\frac{\lambda}{2-d}\gamma_5\right)\hat p\,\chi_2' - \frac{8d((d-2)^2-\lambda^2)}{(d-2)(d-1)^2}\,\bar\Psi_1'^*\left(1+\frac{\lambda}{d}\gamma_5\right)\hat p\,\Psi_2' .$$

Здесь поля $A_i'(p), \ldots, D_i'(p)$ – координаты суперполя $\Phi'(p,\theta)$ в физическом базисе (определение см. I. § 4).

Теперь нам нужно найти область положительной определенности выражения (3.9) и область сходимости интеграла (3.8). Первая область находится с помощью соотношений

$$\bar\Psi^*(1+ai\gamma_5)\hat p\,\Psi \geq 0, \text{ если } p \in V^- \text{ и } -1 \leq a \leq 1 ;$$
$$(1+a)g_{\mu\nu} - \frac{2p_\mu p_\nu}{p^2} \geq 0, \text{ если } p \in V^- \text{ и } |a| \leq 1 ; \tag{3.10}$$
$$F^*F + G^*G + ia(F^*G - G^*F) \geq 0, \text{ если } |a| \leq 1 .$$

Области сходимости интегралов вида $\int \Phi_{d,s}^*(p)\, G_{d,s}(p)\, \Phi_{d,s}(p)\, dp$ определены в работе[11], используя результаты которой, мы получим (после обычного процесса факторизации пространства E_χ с последующим его пополнением относительно скалярного произведения (см. например[12])) следующие две серии унитарных представлений.

I. Невырожденная серия:

$$d > 2,\ |\lambda| > d-2 \ \text{ – представление } T_{(d,\lambda)} . \tag{3.11}$$

II. Первая вырожденная серия:

$$d \geq 0,\ |\lambda| = |d-2| \ \text{ – представление } T_{(d,\pm(2-d))}/T_d^{\pm} . \tag{3.12}$$

Здесь унитарные представления обозначены теми же символами, что и неунитарные представления, из которых они получаются. Это не должно приводить к путанице.

Заметим здесь, что хотя представления T_χ не определены при $\chi = (1,\lambda), (0,\lambda\neq 0), (2,\lambda\neq 0)$ (см. I. § 4), подпредставления $T_1^{\pm}, T_1^{\pm\prime}, T_2^{\pm}, T_0^{\pm\prime}$ и соответствующие фактор-представления все же можно корректно определить, поэтому представления серии II определены также и в точках $d=0$ и $d=1$ – там, где не определены представления T_χ.

Существует на самом деле еще одна серия унитарных скалярных представлений, которая реализуется на инвариантных подпространствах пространства E_χ. Чтобы ее получить, легче всего воспользоваться реализацией представлений $C_{(s,d)}$ обычными функциями на пространстве Минковского (см. /12/), а затем использовать эквивалентность (II.2). В результате мы получим:

III. Вторая вырожденная серия

$$d \geq 2,\ |\lambda| = d-2 \ \text{- представление}\ T_d^{\pm\prime}. \tag{3.13}$$

Используя тот факт, что унитарные представления $C_{(s,d)}$ из интерполированной дискретной серии конформной группы неприводимы /12/, можно доказать, что представления суперконформной группы из серий I–III также неприводимы.

В заключение авторы хотят поблагодарить В.И.Огиевецкого за обсуждение данной работы, Л.Н.Стоянова за дискуссии и критические замечания, способствовавшие уточнению некоторых результатов § 2, И.Т.Тодорова за интерес к работе и конструктивные предложения, в результате которых возник § 3 в данном его виде.

ПРИЛОЖЕНИЕ

а) Инвариантные подпространства

λ	Инвариантные подпространства	Поля, входящие в него (в физическом базисе)	Разложение по конформной подгруппе
(d,d)	T_d^{+}	$A', \psi^{+\prime}, B^{-}$ $(B^{-}\equiv F' \mp iG')$	$C_{(0,d)} \oplus C^{+}_{(\frac12,d+\frac12)} \oplus C_{(0,d+1)}$
$(d,-d)$	T_d^{-}	$A', \psi^{-\prime}, B^{+}$	$C_{(0,d)} \oplus C^{-}_{(\frac12,d+\frac12)} \oplus C_{(0,d+1)}$
$(d,2-d)$	$T_d^{+\prime}$	$A', B^{-}, A'_\mu, \psi', \chi'^{-}$	$C_{(0,d)} \oplus C_{(\frac12,d+\frac12)} \oplus C_{(0,d+1)} \oplus C_{(1,d+1)} \oplus C^{+}_{(\frac12,d+\frac32)}$
$(d,d-2)$	$T_d^{-\prime}$	$A', B^{+}, A'_\mu, \psi', \chi'^{+}$	$C_{(0,d)} \oplus C_{(\frac12,d+\frac12)} \oplus C_{(0,d+1)} \oplus C_{(1,d+1)} \oplus C^{-}_{(\frac12,d+\frac32)}$

б) Фактор-пространства и эквивалентность представлений

$${}^{+}T_{(d,\pm(2-d))}/{}^{+}T_d^{\pm\prime} \approx {}^{+}T_{d+1}^{\mp},\quad {}^{-}T_{(d,\pm(2-d))}/{}^{-}T_d^{\pm\prime} \approx {}^{-}T_{d+1}^{\mp}, \tag{П.1}$$

$${}^{+}T_{(d,\pm d)}/{}^{+}T_d^{\pm} \sim {}^{-}T_{2-d}^{\pm\prime},\quad {}^{-}T_{(d,\pm d)}/{}^{-}T_d^{\pm} \sim {}^{+}T_{2-d}^{\pm\prime}, \tag{П.2}$$

$${}^{+}T_{(d,\pm(2-d))}/{}^{+}T_d^{\pm\prime} \sim {}^{-}T_{2-d}^{\pm},\quad {}^{-}T_{(d,\pm(2-d))}/{}^{-}T_d^{\pm\prime} \sim {}^{+}T_{2-d}^{\pm\prime}, \tag{П.3}$$

$${}^{\pm}T_{(d,\lambda)} \sim {}^{\mp}T_{(2-d,\lambda)},\ \text{если}\ \lambda \neq \pm d, \pm(2-d). \tag{П.4}$$

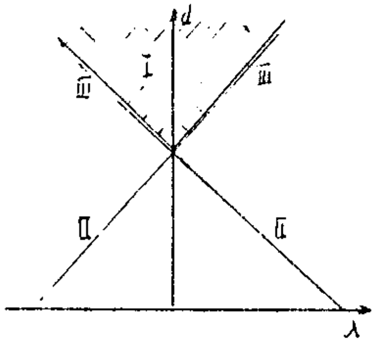
Сравнивая (П.I) и (П.3), мы получим еще одну эквивалентность:

$${}^{+}T_d^{\pm} \sim {}^{-}T_{3-d}^{\mp}. \tag{П.5}$$

И, наконец,

$${}^{+}T_d^{\pm} \approx {}^{+}R_d^{\pm},\quad {}^{-}T_d^{\pm} = {}^{-}R_d^{\pm}. \tag{П.6}$$

в) Унитарные представления (d и λ вещественны)



I. $d>2$, $|\lambda|>d-2$, $T_{d,\lambda}$.

II. $d \geq 0$, $|\lambda|=|d-2|$,

$T_{(d,\pm(2-d))}/T_d^{\pm\prime} \approx T_{d r_1}^{\pm} \approx R_{d r_1}^{\pm}$.

III. $d \geq 2$, $|\lambda|=d-2$, $T_d^{\pm\prime}$.

Рис. I

Литература

1. В.Молотков, С.Петрова. Препринт ОИЯИ,Е2-10126,Дубна,1976.
2. W.Rühl. Comm. Math. Phys. 27, 53 (1972); ibid. 30, 287 (1973); Kaiserslautern preprint, september 1973.
3. I.T.Todorov. CERN-preprint, Th-1697 (1973).
4. М.Я.Пальчик, Е.С.Фрадкин. Введение в конформно-инвариантную теорию квантовых полей. ОИЯИ Р2-8874,Дубна,1975.
5. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин. Обобщенные функции, вып. 5, гл. 3, М., Физматгиз, 1962.
6. V.Dobrev, G.Mack, V.Petrova, S.Petrova, I.Todorov. JINR Preprint, E2-7977, Dubna, 1974.
7. P.H.Dondi, M.Sohnius. Nucl. Phys. B81, 317 (1974).
8. V.Molotkov, S.Petrova, D.Stoyanov. JINR Preprint, E2-8288, Dubna, 1975.

9. B.Aneva, S.Mikhov, D.Stoyanov. JINR Preprint, E2-9098, Dubna, 1975.
10. A.Salam, J.Strathdee. Nucl. Phys. B76, 477 (1974); Phys. Rev. D11, 1523 (1975).
11. G.Mack, I.Todorov. Phys. Rev. D8, 1764 (1973).
12. G.Mack. Preprint DESY 75/50 (1975).

Рукопись поступила в издательский отдел
22 сентября 1976 года.