

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



Б-247

13/11-76

P2 - 10113

4910/2-76

Д.Ю.Бардин, Н.М.Шумейко

О ТОЧНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ПОПРАВКИ
НИЗШЕГО ПОРЯДКА К УПРУГОМУ РАССЕЯНИЮ

1976

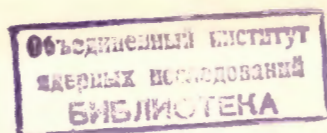
P2 - 10113

Д.Ю.Бардин, Н.М.Шумейко*

О ТОЧНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ПОПРАВКИ
НИЗШЕГО ПОРЯДКА К УПРУГОМУ РАССЕЯНИЮ

Направлено в "Nuclear Physics"

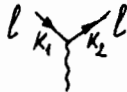
* Белорусский государственный университет, Минск



I. Введение

В связи с ростом энергии и повышением точности измерений в экспериментах по исследованию реакций элементарных частиц все более необходимым становится учет радиационных поправок к сечениям их взаимодействия. Радиационной поправкой \mathcal{L} -го порядка называется отношение сечения \mathcal{L} -го порядка по константе взаимодействия к сечению в низшем порядке (в борновском приближении). Последнее иногда называют также безрадиационным. Во многих практических случаях оказывается достаточным ограничиться радиационной поправкой низшего порядка, т.е. учетом вклада диаграмм только в следующем за борновским приближением порядке.

Радиационные поправки по электромагнитному взаимодействию принято называть электромагнитными поправками (э.п.). Как известно, процедура их вычисления связана с необходимостью устранения инфракрасных расходимостей (помимо ультрафиолетовых). Так, например, учет э.п. низшего порядка к лептонному току



сводится к вычислению следующей величины:

$$\mathcal{L} \operatorname{Re} \left[\left(\text{diagram} + \left(\text{diagram}^K + \text{diagram} + \text{diagram} + \text{diagram}^* \right) \right) \right] + \left| \text{diagram}^K + \text{diagram} \right|^2 \quad (\text{I})$$

После устранения ультрафиолетовых расходимостей в первом члене выражения (I) в нем остаются расходимости при импульсе виртуального фотона $K \rightarrow 0$. Второй член расходится при малых импульсах реального фотона. Однако все выражение (I) не содержит расходимости. В конкретных расчетах вклады первого и второго членов формулы (I) вычисляются порознь, поскольку они описывают физически разные процессы. Поэтому возникает необходимость

однотипной регуляризации обоих членов. Обычный прием состоит во введении бесконечно малой массы фотона λ , которая появляется в виде $h\lambda$ в каждом члене (I), но в окончательный результат не входит^{x)} /I/. Такая ситуация имеет место в любом порядке по электромагнитному взаимодействию. В этом смысле инфракрасная расходимость является фиктивной.

Обсудим теперь детали вычисления вклада в э.п. к дифференциальному сечению некоторого безрадиационного процесса $d^N\sigma$ (N - число существенных переменных) диаграмм с обменом виртуальным фотоном (V - вклад) и диаграмм с испусканием реального фотона (R - вклад). При этом мы будем иметь в виду различие между аналитическим вычислением вклада некоторой диаграммы в поправку по правилам квантовой электродинамики и процедурой расчета вклада той же диаграммы в условиях конкретного эксперимента. Последняя включает усреднение по экспериментальным разрешениям, учет критериев отбора безрадиационных событий, учет размазки пучка и т.п.

Поскольку кинематика V -вклада такая же, как и в безрадиационном процессе, учет экспериментальных условий проводится при их расчете одинаково. Аналитические вычисления здесь предшествуют процедуре учета экспериментальных условий и в этом смысле независимы от последней.

Напротив, R -вклад в сечение обусловлен процессом с другой кинематикой. Ему отвечает дифференциальное сечение $d^{N+3}\sigma$, в котором три дополнительные переменные характеризуют реальный γ -квант. Интегрирование R -вклада до искомого N -кратного се-

^{x)} В недавних работах^{/2/} с этой целью была использована размерная регуляризация. При этом каждый из членов формулы (I) содержит простой полюс по размерности $(n-4)^{-1}$, а их сумма полюса не содержит.

чения проводится по той части фазового объема процесса с испусканием реального фотона, в которой такой процесс экспериментально неотличим от безрадиационного. В зависимости от условий эксперимента граница этой части фазового объема может затрагивать все три дополнительных измерения или некоторые из них. Из-за этого аналитическое вычисление R -вклада часто оказывается невозможным и приходится прибегать к численному интегрированию на ЭВМ^{/3/}. Кроме того, из-за конечных разрешений граница фазового объема может быть размытой, а сам фазовый объем "искажен" экспериментальными условиями, что приводит к необходимости привлечения метода Монте-Карло для расчета R -вклада^{/4/}.

Существуют, однако, и такие постановки эксперимента, в которых интегрирование R -вклада можно выполнить аналитически частично или полностью. Например, если условия опыта таковы, что граница ненаблюдаемых фотонов не затрагивает некоторых дополнительных измерений фазового объема, то по ним можно проинтегрировать аналитически. Мыслима и такая постановка опыта, при которой процесс тормозного излучения вообще неотличим от безрадиационного процесса. В последнем случае при вычислении R -вклада в поправку необходимо проинтегрировать по полному фазовому объему фотонов. В принципе это может быть сделано аналитически без использования каких-либо приближений. В таких вычислениях отсутствуют многие неопределенности, связанные с учетом экспериментальных условий, которые неизбежно присутствуют в расчетах первого типа. В этом смысле расчет экспериментального сечения, а стало быть, и вся обработка данных при последней постановке наиболее проста, поэтому такая постановка является желательной. Заметим, что в принципе ее можно осуществить

в любом эксперименте. Для этого при измерении необходимо засчитывать не только события безрадиационного процесса, но также и все случаи, идентифицированные как события тормозного излучения^{х)}.

В дальнейшем эксперимент, в котором процесс тормозного излучения в какой-то мере отличается от безрадиационного и не засчитывается при обработке данных, будем называть экспериментом типа I, а эксперимент, в котором такое различие либо невозможно, либо не делается специально, — типа II.

Итак, в экспериментах первого типа расчет R -вклада в поправку, который содержит инфракрасную расходимость, сильно зависит от экспериментальных условий. Следовательно, возникает вопрос, как сократить инфракрасные расходимости во вкладах, вычисляемых по-разному.

Эта задача обычно решается путем разбиения R -вклада на две части: часть, отвечающую области мягких фотонов ($k_0 \leq \bar{\omega}_{max}$)- S -вклад, и часть, отвечающую области жестких фотонов ($k_0 > \bar{\omega}_{max}$)- H -вклад^{5/}. Инфракрасная расходимость, естественно, содержится только в S -вкладе.

Величина $\bar{\omega}_{max}$ определяется экспериментальными условиями. Она является границей области изотропно распределенных наблюдаемых фотонов, внутри которой экспериментальные условия, ограничивающие фазовый объем тормозного излучения, никак не проявляются. По определению $\bar{\omega}_{max}$, способ расчета V - и S -вкладов в условиях конкретного эксперимента одинаков, что обе-

х) К сожалению, такая постановка оказывается не всегда возможной, например, из-за фоновых условий. Подавление фона часто основано на проверке гипотезы кинематики безрадиационного процесса, что автоматически ограничивает фазовый объем тормозного излучения, в котором последнее неотличимо от безрадиационного процесса.

спечивает сокращение инфракрасных расходимостей еще на стадии аналитических вычислений до учета экспериментальных условий.

При расчете S -вклада иногда для упрощения вычислений используется так называемое приближение мягких фотонов (SPA): во-первых, учитывается только первый член в разложении по 4-импульсу фотона, а во-вторых, считается, что излучение фотона не затрагивает кинематику конечных частиц. При этом может оказаться, что при $k_0 \sim \bar{\omega}_{max}$ SPA не имеет места. В таком случае приходится вводить иную границу разделения областей мягких и жестких фотонов $\bar{\omega}$, меньшую $\bar{\omega}_{max}$. Очевидно, что полный R -вклад зависит от $\bar{\omega}_{max}$ и не зависит от параметра $\bar{\omega}$, который вводится лишь для обеспечения необходимой точности SPA .

Итак, учет экспериментальных условий при постановке первого типа затрагивает, главным образом, вычисление не зависящего от λ вклада жестких фотонов, поэтому способ его расчета отличается от способа вычисления V - и S -вкладов.

В условиях же экспериментов второго типа способы расчета V -вклада и всего R -вклада одинаковы. После интегрирования по трем дополнительным переменным R -вклад является функцией тех же переменных, что и безрадиационное сечение и V -вклад. В некоторых простых случаях такое интегрирование R -вклада можно провести непосредственно и сократить инфракрасную расходимость в сумме $V+R$ ^{6/}. Однако в более сложных случаях вычислительные трудности вынуждают все-таки производить разбиение

$$R = S(\bar{\omega}) + H(\bar{\omega}), \quad (2)$$

посредством введения параметра $\bar{\omega}$, от которого, естественно, величина R не зависит, а S и H зависят^{7/}.

В данной работе описана процедура вычисления R -вклада в э.п. к упругому рассеянию в условиях экспериментов второго ти-

па. Ради определенности рассмотрена реакция



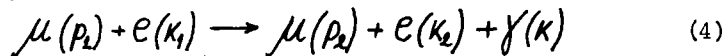
Наш расчет произведен без использования каких-либо приближений и в ковариантной форме. Отмеченные выше вычислительные трудности преодолены путем разбиения R -вклада на три слагаемых, два из которых отвечают конечным частям S - и H -вкладов, а третье, имеющее простейший вид, содержит инфракрасную расходимость и оставшиеся части S - и H -вкладов. Ни одно из трех выделенных слагаемых не содержит параметра "мягкости" $\bar{\omega}$.

План работы следующий. Во второй части мы показываем, как проводится однозначное выделение инфракрасно расходящейся части из сечения процесса тормозного излучения. В третьей части вычисляется вклад мягких фотонов и часть вклада жестких фотонов. Оставшиеся вклады в э.п. вычислены в следующей работе^{/8/}.

В заключении мы обсуждаем изменения, которые необходимо сделать, чтобы применить описанную процедуру к экспериментам первого типа. В этом случае наш способ расчета по существу аналогичен способу, использованному в работе^{/3/} для точного вычисления э.п. низшего порядка к процессу $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, хотя "технически" отличается от него.

2. Выделение инфракрасно расходящейся части из сечения процесса тормозного излучения

Процесс



в низшем порядке по α описывается четырьмя диаграммами, в которых γ -квант испускается из внешних линий. Рассмотрим их вклад в сечение $d\sigma_R/dk_2$ в условиях эксперимента второго типа.

В качестве пяти независимых инвариантов, характеризующих дифференциальное сечение, выберем

$$S = -2p_1 \cdot k_2, Y = (k_2 - k_1)^2, X = -2p_1 \cdot k_2, t = (p_1 - p_2)^2, z = -2k_2 \cdot k. \quad (5)$$

В системе покоя начального электрона $Y = 2m(k_2 - m)$, поэтому вычислим инвариантное сечение $d\sigma_R/dY$. Массу электрона обозначим m , массу мюона - M . Фазовый объем следующим образом выражается через введенные инварианты

$$d\Gamma = \int \frac{d^3k_2}{2k_{20}} \frac{d^3p_2}{2p_{20}} \frac{d^3k}{2k_0} \delta(k_2 + p_2 + k - p_1 - k_1) = \frac{\pi}{4\sqrt{\lambda_3}} \int \frac{dY dX dt dz}{\sqrt{R_z}}. \quad (6)$$

$$\text{Здесь } \lambda_3 = S^2 - 4m^2M^2, R_z = A_z z^2 + 2B_z z + C_z, \quad (7)$$

где $-A_z \equiv \lambda_y = S_x^2 + 4M^2Y$, $B_z = Et + F$, $C_z = At^2 + 2Bt + C$; $S_x = S - X$; величины A, B, C, E и F - функции S, Y и X имеют вид:

$$\begin{aligned} A &= (X+Y)^2 - 4m^2\tau, B = vB_0 - Y\lambda_s, C = Y^2\lambda_s, \\ E &= Xv - Y(S+2M^2), F = YF_0, \text{ где } v = -2p_2 \cdot k = S_x - Y, \\ B_0 &= SY + 2m^2S_x, F_0 = SS_x + 2M^2Y, \tau = v + M^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Пределы изменения инвариантов в последовательности Y, X, t, z даются неравенствами:

$$0 \leq Y \leq \lambda_s / (S + m^2 + M^2),$$

$$\lambda_{\min} = [(Y + 2m^2)S - \sqrt{\lambda_m \lambda_s}] / 2m^2 \leq X \leq S - Y, \text{ где } \lambda_m = Y^2 + 4m^2Y,$$

$$[(S_x - \sqrt{\lambda_y})v + 2M^2Y] / 2\tau \leq t \leq [(S_x + \sqrt{\lambda_y})v + 2M^2Y] / 2\tau, \quad (9)$$

$$(-B_z + \sqrt{D_z}) / A_z \leq z \leq (-B_z - \sqrt{D_z}) / A_z, \text{ где } D_z = B_z^2 - A_z C_z.$$

С помощью тождественного преобразования представим дифференциальное сечение $d\sigma_R$ процесса (4) в виде

$$d\sigma_R \equiv d\sigma_R - d\sigma_R^{\text{IR}} + d\sigma_R^{\text{IR}} = d\sigma_R^F + d\sigma_R^{\text{IR}}, \quad (10)$$

где $d\sigma_R^{\text{IR}}$ - та часть сечения, которая содержит инфракрасную расходимость, а $d\sigma_R^F$ - конечно при $\lambda \rightarrow 0$. Выделение сечения

$d\sigma_R^{\text{IR}}$, вообще говоря, неоднозначно, но для экспериментов второго типа можно дать однозначную процедуру его построения, которую мы здесь опишем.

При импульсе фотона $K \rightarrow 0$ сечение $d\sigma_R$ можно записать в виде

$$d\sigma_R|_{K \rightarrow 0} = \frac{4d^3}{\pi^2 \lambda_s} \tilde{T} f^2 d\Gamma, \quad (II)$$

где $\tilde{T} = \frac{1}{16} Sp(\hat{k}_2 + im)\chi_{\alpha}(\hat{k}_1 + im)\chi_{\beta} Sp(\hat{p}_2 + im)\chi_{\alpha}(\hat{p}_1 + im)\chi_{\beta}$,

$$f = \frac{1}{t} \left(\frac{K_1}{K_1 \cdot K} - \frac{K_2}{K_2 \cdot K} \right) + \frac{f}{y} \left(\frac{p_1}{p_1 \cdot K} - \frac{p_2}{p_2 \cdot K} \right),$$

а $f = +1$, если электрон и мюон имеют одинаковый заряд и $f = -1$, если разный. Выражая \tilde{T} и f^2 через инварианты (5), имеем

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} [S^2 + X^2 - 2m^2 t - 2M^2 y], \quad f^2 = 4 \left[\frac{1}{t^2} \left(-\frac{m^2}{z^2} - \frac{m^2}{z_1^2} + \frac{y+2m^2}{z z_1} \right) + \frac{f}{t y} \left(\frac{x}{u z} + \frac{x+z+u}{v z_1} - \frac{s-v-z}{v z} - \frac{s}{u z_1} \right) + \frac{f^2}{y^2} \left(-\frac{M^2}{u^2} - \frac{M^2}{v^2} + \frac{t+2M^2}{u v} \right) \right], \quad (I2)$$

где $z_1 = -2k_1 \cdot K = z + t - y$, $u = -2p_1 \cdot K = s_x - t$.

Как видно, произведение $\tilde{T} f^2$, помимо главных при $K_0 \rightarrow 0$ членов $\sim 1/K_0^2$, которые и приводят к инфракрасным расходимостям, содержит следующие члены разложения по K_0 .

Дальнейшее выделение инфракрасной расходимости будем производить с учетом того, что регистрируется только одна частица (электрон), импульс которой входит лишь в инварианты Y и X . Поэтому потребуем, чтобы в величине \tilde{T} , в числителях всех членов f^2 и в множителях $1/t$ и $1/t^2$ содержались только инварианты S , Y и X . Этого можно достичь, если в указанных величинах опустить инварианты z , z_1 , u и v , которые линейны по K . Часть сечения (II), которая остается после такого выделения, мы и используем в качестве $d\sigma_R^{IR}$ при тождественном преобразовании (IO).

Итак, для $d\sigma_R^{IR}$ имеем

$$d\sigma_R^{IR} = \frac{4d^3}{\pi \lambda_s y^2} T \cdot F^{IR} \frac{dy dx dt dz}{\sqrt{R_z}}, \quad (I3)$$

$$\text{где } T = \frac{1}{2} [S^2 + X^2 - 2Y(m^2 + M^2)], \quad F^{IR} = -\frac{m^2}{z^2} - \frac{m^2}{z_1^2} + \frac{y+2m^2}{z z_1} + f \left(\frac{x}{u z} + \frac{x}{v z_1} - \frac{s}{v z} - \frac{s}{u z_1} \right) + f^2 \left(-\frac{M^2}{u^2} - \frac{M^2}{v^2} + \frac{t+2M^2}{u v} \right).$$

Проинтегрируем теперь по инвариантам z и t , зависящим от импульсов ненаблюдаемых частиц (мюона и фотона). Поскольку $d\sigma_R^{IR}$ расходится при $\lambda \rightarrow 0$, интегрирование ведется с учетом бесконечно малой массы фотона λ в соответствии с кинематикой процесса излучения фотона с массой. При этом, как обычно, сохраняются члены лишь низайшего порядка по λ . В результате интегрирования находим

$$\frac{d^2 \sigma_R^{IR}}{dY dX} = \frac{4d^3}{\lambda_s y^2} T I^{\lambda}(y, x). \quad (I4)$$

Здесь $I^{\lambda}(y, x) = J^{\lambda}[F^{IR}] = -m^2 J^{\lambda} \left[\frac{1}{z^2} \right] - m^2 J^{\lambda} \left[\frac{1}{z_1^2} \right] + (y+2m^2) J^{\lambda} \left[\frac{1}{z z_1} \right] + f \left\{ x J^{\lambda} \left[\frac{1}{u z} \right] + \frac{x}{v} J^{\lambda} \left[\frac{1}{z_1} \right] - \frac{s}{v} J^{\lambda} \left[\frac{1}{z} \right] - s J^{\lambda} \left[\frac{1}{u z_1} \right] \right\} + f^2 \left\{ -M^2 J^{\lambda} \left[\frac{1}{u^2} \right] - \frac{M^2}{v^2} J^{\lambda} [1] + \frac{y+2M^2}{v} J^{\lambda} \left[\frac{1}{u} \right] \right\},$

где

$$J^{\lambda}[A] = \frac{1}{\pi} \int \frac{dt dz}{\sqrt{R_z}} A. \quad (I6)$$

Интегралы (I6) даются следующими формулами:

$$J^{\lambda} \left[\frac{1}{z^2} \right] = \sqrt{V^{\lambda}} / (m^2 v^2 + \lambda^2 \lambda_s^0), \quad \text{где } V^{\lambda} = v^2 - v_{\min}^2, \quad v_{\min} = 2\lambda M, \quad (I7)$$

смысл индекса "0" разъяснен ниже;

$$J^{\lambda} \left[\frac{1}{z_1^2} \right] = \sqrt{V^{\lambda}} / (m^2 v^2 + \lambda^2 \lambda_x^0), \quad \text{где } \lambda_x = x^2 - 4m^2 M^2; \quad (I8)$$

$$J^{\lambda} \left[\frac{1}{z z_1} \right] = \frac{1}{\sqrt{C_m^{\lambda}}} \ln \frac{v^2 (y+2m^2) + v_{\min}^2 a_m + \sqrt{C_m^{\lambda}} \sqrt{V^{\lambda}}}{v^2 (y+2m^2) + v_{\min}^2 a_m - \sqrt{C_m^{\lambda}} \sqrt{V^{\lambda}}}, \quad (I9)$$

где

$$C_m^{\lambda} = v^2 \lambda_m + v_{\min}^2 b, \quad a_m = s_0 x_0 / 2M^2 - y_0 - 2m^2,$$

$$b = (Y_0/M^2)[S_0 X_0 - Y_0(m^2 + M^2) - 4m^2 M^2];$$

$$J^\lambda \left[\frac{1}{u^2} \right] = \frac{1}{\sqrt{C_x^\lambda}} \ln \frac{v^2 X + v_{\min}^2 a_x + \sqrt{C_x^\lambda} \sqrt{V^\lambda}}{v^2 X + v_{\min}^2 a_x - \sqrt{C_x^\lambda} \sqrt{V^\lambda}}, \quad (20)$$

$$\text{где } C_x^\lambda = v^2 \lambda_x + v_{\min}^2 b, \quad a_x = Y_0 (S_0/2M^2 + 1);$$

$$J^\lambda \left[\frac{1}{x_1} \right] = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \frac{\delta(S-Y) + \sqrt{A} \sqrt{V^\lambda}}{\delta(S-Y) - \sqrt{A} \sqrt{V^\lambda}}, \quad \text{где } A = (S-Y)^2 - 4m^2 v; \quad (21)$$

$$J^\lambda \left[\frac{1}{z} \right] = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \frac{\delta(X+Y) + \sqrt{A} \sqrt{V^\lambda}}{\delta(X+Y) - \sqrt{A} \sqrt{V^\lambda}}; \quad (22)$$

$$J^\lambda \left[\frac{1}{u^2_1} \right] = \frac{1}{\sqrt{C_s^\lambda}} \ln \frac{v^2 S + v_{\min}^2 a_s + \sqrt{C_s^\lambda} \sqrt{V^\lambda}}{v^2 S + v_{\min}^2 a_s - \sqrt{C_s^\lambda} \sqrt{V^\lambda}}, \quad (23)$$

$$\text{где } C_s^\lambda = v^2 \lambda_s + v_{\min}^2 b, \quad a_s = Y_0 (X_0/2M^2 - 1);$$

$$J^\lambda \left[\frac{1}{u^2} \right] = \frac{\sqrt{V^\lambda}}{m^2 v^2 + \lambda^2 \lambda_y^0}; \quad (24)$$

$$J^\lambda [1] = \frac{\sqrt{V^\lambda}}{c}; \quad (25)$$

$$J^\lambda \left[\frac{1}{u} \right] = \frac{1}{\sqrt{\lambda_y}} \ln \frac{v(S_x + 2M^2) + \sqrt{\lambda_y} \sqrt{V^\lambda}}{v(S_x + 2M^2) - \sqrt{\lambda_y} \sqrt{V^\lambda}}. \quad (26)$$

Поскольку масса фотона бесконечно мала, в членах, пропорциональных λ^e , можно положить $v=0$, т.е. не учитывать более высоких степеней λ . Индекс "0" и означает, что инварианты берутся в точке $v=0$ и удовлетворяют кинематике упругого процесса (3)

$$S_0 - X_0 - Y_0 = 0, \quad (27)$$

например, $\lambda_x^0 = \lambda_x|_{v=0} = X_0^2 - 4m^2 M^2$. Очевидно, что $S_0 \equiv S$.

Далее, $Y_0 \equiv Y$, поскольку в эксперименте измеряется сечение $d\sigma/dY$.

3. Вычисление вкладов мягких и жестких фотонов

Выделим теперь инфракрасную часть в интересующем нас однократном дифференциальном сечении

$$\frac{d\sigma_{IR}}{dY} = \frac{4d^3}{\lambda_s Y^2} \int_{x_{\min}}^{S-Y} T I^\lambda(Y, x) dx. \quad (28)$$

Перейдем к переменной $v = S - X - Y$, изменяющейся в пределах

$$v_{\min} \leq v \leq v_{\max} = [\sqrt{\lambda_s \lambda_m} - Y(S + 2M^2)]/2m^2, \quad (29)$$

и рассмотрим тождество

$$\frac{d\sigma_{IR}}{dY} = \frac{4d^3}{\lambda_s Y^2} \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} dv [T I^\lambda(Y, v) - T_0 J(Y, 0) \frac{1}{v} + T_0 J(Y, 0) \frac{1}{v}]. \quad (30)$$

Здесь

$$T_0 = \frac{1}{2} [S^2 + X_0^2 - 2Y(m^2 + M^2)], \quad J(Y, 0) = \lim_{v \rightarrow 0} [v \lim_{\lambda \rightarrow 0} I^\lambda(Y, v)]. \quad (31)$$

Вычисляя двойной предел, находим

$$J(Y, 0) = 2\{(Y + 2M^2)L_m - 1 + f(X_0 L_x^0 - S L_s) + f^2[(Y + 2M^2)L_m - 1]\}, \quad (32)$$

где

$$L_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \ln \frac{\sqrt{\lambda_m} + Y}{\sqrt{\lambda_m} - Y}, \quad L_M = \frac{1}{\sqrt{\lambda_M}} \ln \frac{\sqrt{\lambda_M} + Y}{\sqrt{\lambda_M} - Y}, \quad \lambda_M \equiv \lambda_Y,$$

$$L_s = \frac{1}{\sqrt{\lambda_s}} \ln \frac{S + \sqrt{\lambda_s}}{S - \sqrt{\lambda_s}}, \quad L_x^0 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_x^0}} \ln \frac{X_0 + \sqrt{\lambda_x^0}}{X_0 - \sqrt{\lambda_x^0}}.$$

Разобьем интервал интегрирования в (30) на две области:

$$1) \quad v_{\min} \leq v \leq \bar{v} \quad \text{и} \quad 2) \quad \bar{v} \leq v \leq v_{\max},$$

где параметр \bar{v} выбирается таким, что

$$\bar{v} \gg v_{\min} \quad (33)$$

и

$$\bar{v} \ll S, Y, X, m^2, M^2. \quad (34)$$

Очевидно, что это всегда возможно, так как $v_{\min} = 2\lambda M$

бесконечно мало. Имеем

$$\frac{d\sigma_{IR}}{dY} = \frac{4d^3}{\lambda_s Y^2} \left\{ \int_{v_{\min}}^{\bar{v}} dv [T I^\lambda(Y, v) - T_0 J(Y, 0) \frac{1}{v}] + \int_{\bar{v}}^{v_{\max}} dv [T I^\lambda(Y, v) - T_0 J(Y, 0) \frac{1}{v}] + T_0 J(Y, 0) \ln \frac{v_{\max}}{v_{\min}} \right\}. \quad (35)$$

Структура тождественного преобразования (30) такова, что подынтегральные выражения в обоих выделенных интегралах конечны при $\lambda \rightarrow 0$, так что инфракрасная расходимость целиком сосредоточена в последнем слагаемом формулы (35), которое имеет простейший вид.

Для явного вычисления первого интеграла в (35) сделаем замену переменных $\beta = \sqrt{\lambda} / \nu$, после которой масса фотона λ останется только в пределах интегрирования, имеющих вид $0 \leq \beta \leq \bar{\beta} = (1 - \nu_{\min}^2 / \bar{\nu}^2)^{1/2}$. При устремлении λ к нулю исчезает, как видно, и зависимость от $\bar{\nu}$, так что результат интегрирования не содержит $\bar{\nu}$. Во втором интеграле $\nu > \bar{\nu}$, поэтому вследствие условия (33) можно положить $\lambda = 0$. После этого из-за неравенства (34) можно положить равным нулю и $\bar{\nu}$.

Таким образом, как это и должно быть, результат не зависит от величины $\bar{\nu}$, которая является просто регуляризирующим параметром.

Первый член в (35) представляет собой ковариантный аналог части вклада мягких фотонов и имеет вид

$$\frac{d\sigma^S}{dY} = \frac{d\sigma_0}{dY} \frac{1}{\pi} \delta^S, \quad (36)$$

т.е. в нем факторизуется сечение безрадиационного процесса (3)

$$\frac{d\sigma_0}{dY} = \frac{4\pi\alpha^2}{\lambda_s Y^2} T_0. \quad (37)$$

Для δ^S получено следующее выражение: $\delta^S = J(y, 0) \ln 2 + \frac{1}{2} S L_s + \frac{1}{2} X_0 L_x^0 + S_{\Phi}(y, 2M^2, \lambda_m, a_m, b) + f \left\{ S_{\Phi}(X_0, \lambda_x^0, a_x, b) - S_{\Phi}(S, \lambda_s, a_s, b) - \frac{X_0}{2\sqrt{\lambda_x^0}} \left[\Phi\left(\frac{2\sqrt{\lambda_x^0}}{X_0 + \sqrt{\lambda_x^0}}\right) - \Phi\left(\frac{2\sqrt{\lambda_x^0}}{\sqrt{\lambda_x^0} - X_0}\right) \right] + \frac{S}{2\sqrt{\lambda_s}} \left[\Phi\left(\frac{2\sqrt{\lambda_s}}{S + \sqrt{\lambda_s}}\right) - \Phi\left(\frac{2\sqrt{\lambda_s}}{\sqrt{\lambda_s} - S}\right) \right] \right\} + f^2 \left\{ 1 + (Y + 2M^2) L_M - \frac{Y + 2M^2}{\sqrt{\lambda_M}} \left[\Phi\left(\frac{2\sqrt{\lambda_M}}{Y + 2M^2 + \sqrt{\lambda_M}}\right) - \Phi\left(\frac{2\sqrt{\lambda_M}}{\sqrt{\lambda_M} - Y - 2M^2}\right) \right] \right\}, \quad (38)$

где $\Phi(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ - функция Спенса, а

$$S_{\Phi}(S, \lambda, a, b) = \frac{S}{2\sqrt{\lambda}} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \sum_{j=1}^4 S_j \sum_{k=1}^2 \left\{ \Phi\left(\frac{\delta_i - \delta}{\lambda_i - \delta_i^j}\right) + \Phi\left[\frac{\delta + (-1)^i}{\lambda_k^i + (-1)^i}\right] \right\}_{\delta=\delta_i}^{\delta=\delta_u} \quad (39)$$

Параметры, определяющие функцию (39), даются формулами $S_j = (1, 1, -1, -1)$, $\delta_{1;2} = \mp \frac{(\sqrt{b} \mp \sqrt{\lambda})^2}{b - \lambda}$, $\delta_u = \frac{\sqrt{b + \lambda} - \sqrt{b}}{\sqrt{\lambda}}$, $\delta_i^j = - [\alpha_j \sqrt{b} \pm \sqrt{\alpha_j^2 b + \tau_j^2}] / \tau_j$, $\alpha_1 = \alpha_2 = S - \sqrt{\lambda}$, $\alpha_3 = \alpha_4 = S + \sqrt{\lambda}$, $\tau_{1;2} = -a\sqrt{\lambda} + \frac{b - \lambda}{2} \mp \sqrt{D}$, $\tau_{3;4} = -a\sqrt{\lambda} - \frac{b - \lambda}{2} \mp \sqrt{D}$, $D = (S + a)(\lambda a - S b) + \frac{(\lambda + b)^2}{4}$. τ_j где

$$\delta_{1;2}^j = - [\alpha_j \sqrt{b} \pm \sqrt{\alpha_j^2 b + \tau_j^2}] / \tau_j, \quad (41)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = S - \sqrt{\lambda}, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = S + \sqrt{\lambda},$$

$$\tau_{1;2} = -a\sqrt{\lambda} + \frac{b - \lambda}{2} \mp \sqrt{D}, \quad \tau_{3;4} = -a\sqrt{\lambda} - \frac{b - \lambda}{2} \mp \sqrt{D},$$

$$D = (S + a)(\lambda a - S b) + \frac{(\lambda + b)^2}{4}.$$

Второй интеграл в (35)

$$\frac{d\sigma^H}{dY} = \frac{4\alpha^2}{\lambda_s Y^2} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{d\nu}{\nu} [T J(\nu, \nu) - T_0 J(\nu, 0)], \quad (42)$$

где $J(\nu, \nu) = \nu \lim_{\lambda \rightarrow 0} I^{\lambda}(\nu, \delta)$ представляет собой часть вклада жестких фотонов. Выражение (42) удобно переписать в виде суммы двух членов

$$\frac{d\sigma^H}{dY} = \frac{d\sigma_1^H}{dY} \frac{1}{\pi} \delta_1^H + \frac{d\sigma_2^H}{dY}, \quad (43)$$

$$\delta_1^H = \int_0^{\nu_{\max}} \frac{d\nu}{\nu} [J(\nu, \nu) - J(\nu, 0)], \quad (44)$$

$$\frac{d\sigma_2^H}{dY} = \frac{4\alpha^2}{\lambda_s Y^2} \int_0^{\nu_{\max}} \frac{d\nu}{\nu} (\tau - \tau_0) J(\nu, \nu), \quad (45)$$

в первом из которых мы факторизовали упругое сечение (37). Интеграл (44) вычисляется непосредственно, и результат имеет вид

$$\delta_1^H = f \left\{ \frac{X_0}{\sqrt{\lambda_x^0}} \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\max}} - \sqrt{\lambda_x^0}}{X_0 - \sqrt{\lambda_x^0}}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{\lambda_x^0} - \sqrt{\lambda_{\max}}}{X_0 + \sqrt{\lambda_x^0}}\right) \right] + \Phi\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\max}} + \sqrt{\lambda_x^0}}{\sqrt{\lambda_x^0} - X_0}\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\max}} + \sqrt{\lambda_x^0}}{X_0 + \sqrt{\lambda_x^0}}\right) + \Phi\left(\frac{2\sqrt{\lambda_x^0}}{X_0 + \sqrt{\lambda_x^0}}\right) - \Phi\left(\frac{2\sqrt{\lambda_x^0}}{\sqrt{\lambda_x^0} - X_0}\right) \right\} - \frac{1}{2m^2} \left[\lambda_x^0 L_x^0 - \sqrt{\lambda_{\max}} \ln \frac{X_0 + \sqrt{\lambda_{\max}}}{X_0 - \sqrt{\lambda_{\max}}} \right] \quad (46)$$

$$- \chi_0 \ln \frac{\vartheta_{\max} + M^2}{M^2} + \frac{1}{4} \left[\ln \frac{\chi_{\min} + \sqrt{\lambda_{\min}}}{\chi_{\min} - \sqrt{\lambda_{\min}}} - \ln \frac{\chi_0 + \sqrt{\lambda_0^2}}{\chi_0 - \sqrt{\lambda_0^2}} \right] + H_{\Phi}(\chi_0, \lambda_0, -\chi_0, -1) -$$

$$- H_{\Phi}(s, \lambda_s, -s - 2m^2, -1) + f^2 \left\{ \ln \frac{\vartheta_{\max} + M^2}{M^2} + H_{\Phi}(y + 2M^2, \lambda_M, y, 1) \right\}$$

Здесь $\lambda_{\max} = \lambda_x^0 - 4m^2 \vartheta_{\max}$, $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}^2 - 4m^2 M^2$,
а функция H_{Φ} определяется выражением

$$H_{\Phi}(s, \lambda, a, b) = \frac{s}{\sqrt{\lambda}} \left[\ln \frac{s + \sqrt{\lambda}}{s - \sqrt{\lambda}} \ln \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda} \sqrt{\lambda + 2a\vartheta_{\max} + \vartheta_{\max}^2} + \lambda + a\vartheta_{\max}} \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^4 s_j \Phi \left(\frac{t_j - a/\sqrt{\lambda}}{t_j - a/\sqrt{\lambda}} \right) \right]; \quad (47)$$

при $\beta^2 = 1$ t_j имеют вид

$$t_1 = -b, t_2 = (bd_3 - 2a)/d_1, t_3 = (-bd_1 + 2a)/d_3, t_4 = b, \quad (48)$$

$$a t_m = (\sqrt{\lambda + 2a\vartheta_{\max} + \vartheta_{\max}^2} - \sqrt{\lambda}) / \vartheta_{\max}. \quad (49)$$

Второй член в (43) удобно вычислять совместно с сечением $d\sigma_R^F$,
которое также отвечает вкладу жестких фотонов.

Наконец, третье слагаемое в (35) имеет вид

$$\frac{d\sigma_R^{\lambda}}{dY} = \frac{d\sigma_0}{dY} \frac{d}{\pi} \delta_R^{\lambda}, \quad (50)$$

$$\text{где } \delta_R^{\lambda} = J(y, 0) \ln(\vartheta_{\max} / \vartheta_{\min}). \quad (51)$$

Оно отвечает вкладу как мягких, так и жестких фотонов, которые
в экспериментах второго типа физически не разделены. Важно под-
черкнуть, что этот член имеет простейший вид.

Покажем теперь, как исчезает масса фотона λ при сложении
 $d\sigma_R^{\lambda} / dY$ с вкладом диаграмм с обменом виртуальным фотоном
 $d\sigma_V / dY$. Последний можно представить в виде суммы конечной
части $d\sigma_V^F / dY$ и части, содержащей инфракрасную расходимость
 $d\sigma_V^{IR} / dY$.

Сечение $d\sigma_V^{IR} / dY$ обычно записывают в виде^{/9/}

$$\frac{d\sigma_V^{IR}}{dY} = \frac{d\sigma_0}{dY} \frac{d}{\pi} \delta_V^{IR}, \quad (52)$$

где

$$\delta_V^{IR} = K(k_1, k_2) - K(k_1, k_2) + 2f[K(p_1, k_1) - K(p_1, k_2)] + f^2[K(p_1, p_1) - K(p_1, p_2)]. \quad (53)$$

Функция $K(p_1, p_2)$ определяется интегралом^{/9/}

$$K(p_1, p_2) = (p_1 \cdot p_2) \int_0^1 \frac{dd}{p_2^2} \ln \frac{-p_2^2}{\lambda^2}, \quad (54)$$

где $p_2 = \alpha p_1 + (1-\alpha) p_2$.

Очевидно, что $K(p_1, p_2) = K(p_2, p_1)$. Поскольку p_A и p_B
временноподобные векторы, p_2 - также временноподобен, т.е.

$p_2^2 < 0$, и интеграл (54) не содержит полюсов. Представим
(54) в виде суммы двух слагаемых

$$K(p_1, p_2) = L(p_1, p_2) + (p_1 \cdot p_2) \ln \frac{m^2}{\lambda^2} \mu(p_1, p_2), \quad (55)$$

где

$$L(p_1, p_2) = (p_1 \cdot p_2) \int_0^1 \frac{dd}{p_2^2} \ln \frac{-p_2^2}{m^2}, \quad \mu(p_1, p_2) = \int_0^1 \frac{dd}{p_2^2}. \quad (56)$$

Тогда величина δ_V^{IR} также разбивается на два члена δ^L и
 δ_V^{λ} , содержащие L - и μ -функции соответственно: $\delta_V^{IR} = \delta^L + \delta_V^{\lambda}$.

Для δ^L имеем

$$\delta^L = L(k_1, k_1) - L(k_1, k_2) + 2f[L(p_1, k_1) - L(p_1, k_2)] + f^2[L(p_1, p_1) - L(p_1, p_2)], \quad (57)$$

где

$$L(k_1, k_1) = 0, \quad L(p_1, p_1) = \ln \frac{M^2}{m^2},$$

$$L(k_1, k_2) = (y + 2m^2) \left\{ L_m \ln \frac{\lambda_m}{m^2 y} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \left[\Phi \left(\frac{y + \sqrt{\lambda_m}}{y - \sqrt{\lambda_m}} \right) - \Phi \left(\frac{y - \sqrt{\lambda_m}}{y + \sqrt{\lambda_m}} \right) \right] \right\},$$

$$L(p_1, p_2) = (y + 2M^2) \left\{ L_M \ln \frac{\lambda_M}{m^2 y} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_M}} \left[\Phi \left(\frac{y + \sqrt{\lambda_M}}{y - \sqrt{\lambda_M}} \right) - \Phi \left(\frac{y - \sqrt{\lambda_M}}{y + \sqrt{\lambda_M}} \right) \right] \right\},$$

$$L(p_1, k_1) = \frac{s}{2} L_s \ln \frac{2M\lambda_s}{m[\sqrt{\lambda_s}(M^2 - m^2) + s(m^2 + M^2) - 4m^2]} + \frac{s}{2} \left[\Phi \left(\frac{2M^2 - s - \sqrt{\lambda_s}}{2M^2 - s + \sqrt{\lambda_s}} \right) - \Phi \left(\frac{2m^2 - s + \sqrt{\lambda_s}}{2m^2 - s - \sqrt{\lambda_s}} \right) \right],$$

$L(p_1, k_2)$ может быть получена из $L(p_1, k_1)$ заменой $S \rightarrow X_0$.

Используя определения (55), (56) и вычисляя μ -функции

$$\begin{aligned} \mu(k_1, k_1) &= -\frac{1}{m^2}, \quad \mu(k_1, k_2) = -2L_m, \quad \mu(k_1, p_1) = -L_s, \\ \mu(k_1, p_2) &= -L_s^0, \quad \mu(p_1, p_1) = -\frac{1}{M^2}, \quad \mu(p_1, p_2) = -2L_m, \end{aligned} \quad (58)$$

для δ_V^λ находим $\delta_V^\lambda = J(\gamma, 0) \ln \frac{\lambda}{m}$. (59)

Как видно, сумма $\delta_V^\lambda + \delta_R^\lambda$ не содержит λ и равна

$$\delta^\lambda = \delta_V^\lambda + \delta_R^\lambda = J(\gamma, 0) \ln \frac{v_{max}}{2mM}. \quad (60)$$

Заключение

Итак, мы вычислили вклад в э.п. низшего порядка к процессу (3) мягких фотонов (36)-(41), часть вклада жестких фотонов (42)-(49) и конечную часть (60), возникающую при сложении содержащих λ членов в V -и R -вкладах.

Расчет был проведен в ковариантной форме и без каких бы то ни было приближений. Последнее обстоятельство и привело к довольно громоздкому результату вычислений. Однако получение точных формул представляет несомненный интерес, поскольку из них могут быть найдены любые приближения. Ковариантность также является удобным обстоятельством, так как дает возможность непосредственно применить результат вычислений в других случаях, например, для расчета э.п. к глубоконеупругому en -рассеянию в партонной модели /10/.

Конечные выражения не зависят от \bar{v} -ковариантного аналога $\bar{\omega}$, однако такая независимость от параметра, разделяющего вклады мягких и жестких фотонов, является привилегией лишь экс-

периментов второго типа, в которых процессы (3) и (4) неразличимы во всем фазовом объеме.

Обсудим теперь, как модифицируется описанная процедура при применении ее к экспериментам первого типа. В этом случае вместо представления сечения (28) в виде (30), а затем (35), используем тождество

$$\frac{d\sigma_R^{IR}}{dY} = \frac{4\alpha^2}{15Y^2} \left[\int_{v_{min}}^{\bar{v}} T I^\lambda(\gamma, v) dv + \int_{\bar{v}}^{v_{max}} T I^\lambda(\gamma, v) dv - T_0 J(\gamma, 0) \int_{v_{min}}^{\bar{v}} \frac{dv}{v} + T_0 J(\gamma, 0) \int_{\bar{v}}^{v_{max}} \frac{dv}{v} \right]. \quad (61)$$

С помощью описанных выше приемов его можно представить в виде

$$\frac{d\sigma_R^{IR}}{dY} = \frac{d\sigma_0}{dY} \frac{\alpha}{J} \delta^\lambda + \frac{4\alpha^2}{15Y^2} \left[\int_{\bar{v}}^{v_{max}} T J(\gamma, v) \frac{dv}{v} + T_0 J(\gamma, 0) \ln \frac{\bar{v}}{v_{min}} \right], \quad (62)$$

где \bar{v} - граница области мягких фотонов.

Второй член в (62), описывающий вклад жестких фотонов, должен вычисляться совместно с $d\sigma_R^F$. При этом его следует "разынтегрировать" до полностью дифференциального сечения, чтобы было возможно применить адекватную экспериментальным условиям процедуру расчета.

Первое и третье слагаемые отвечают вкладу мягких фотонов и вычисляются с помощью той же процедуры, что и V -вклад. Это обеспечивает сокращение λ . Отметим, что первый член имеет такой же вид, что и в случае экспериментов второго типа.

Таким образом, можно отделить часть вклада мягких фотонов, которая не зависит от параметра "мягкости" \bar{v} и имеет один и тот же вид для экспериментов любого типа.

Мы благодарны Г.В.Мицельмахеру за полезные обсуждения некоторых вопросов.

Литература

1. R.P.Feynman. Phys. Rev., 74, 1430, 1953.
2. W.J.Marciano, A.Sirlin. Nucl. Phys., B88, 86, 1975.
W.J.Marciano. Phys. Rev., D12, 3861, 1975.
3. F.A.Berends, K.J.F.Gaemers, R.Gastmans.
Nucl. Phys., B57, 381, 1973; B63, 381, 1973.
4. D.Yu.Bardin, G.V.Micelmacher, M.M.Shumeiko, JINR,
E2-7235, Dubna, 1972.
5. D.Yennie, S.Frautschi, H.Suura. Ann. Phys., 13, 379, 1961.
6. K.O.Mikaelian, J.Smith. Phys. Rev., D5, 1963, 1972.
7. J.Kiskis. Phys. Rev., D8, 2129, 1973.
8. Д.Ю.Бардин, О.М.Федоренко, Н.М.Шумейко. ОИЯИ P2-10114,
Дубна, 1976.
9. J.Kahane. Phys. Rev., 135, B975, 1964.
10. Д.Ю.Бардин, Н.М.Шумейко. ОИЯИ, P2-9940, Дубна, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 сентября 1976 года.