ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 10085

А.Каримходжаев, Р.Н.Фаустов

УРАВНЕНИЕ ДАЙСОНА-ШВИНГЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

1976

P2 - 10085

А.Каримходжаев,* Р.Н.Фаустов

УРАВНЕНИЕ ДАЙСОНА-ШВИНГЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Направлено в ТМФ

* Институт ядерной физики АН УзССР

I. Уравнения квантовой теории поля[I,2] имеют существенно нелинейный характер. Аналогичный характер носят уравнения Дайсона-Швингера для одночастичных массового и поляризационного операторов[3,4]. В то же время уравнение Бете-Солпитера для двухчастичной функции Грина обычно рассматривается как линейное уравнение. Это несоответствие связано с тем, что ядро уравнения Бете-Солпитера, как правило, определяется и задается с помощью разложения по теории возмущений в виде бесконечной суммы неприводимых (в смысле двухчастичных сечений) диаграмм Фейнмана. Однако такое представление часто оказывается непригодным, например, в квантовой электродинамике из-за наличия инфракрасных расходимостей, связанных с нулевой массой фотона.

В случае проблемы связанных состояний инфракрасные особенности не возникают даже в приближении "рассеяния", если явно учесть эффекты "связанности" в промежуточных виртуальных состояниях. Для этого необходимо просуммировать бесконечные последовательности неприводимых диаграмм ядра уравнения[5]. Такое суммирование проще всего осуществить, если имеется дополнительное уравнение для этого ядра (например, типа уравнения Дайсона-Швингера для массового оператора). Попытаемся вывести подходящее уравнение на примере квантовой электродинамики.

2. Рассмотрим функцию Грина двух различных фермионов с массами m_a и m_b в представлении взаимодействия

$$G(x_a, x_b, y_a, y_b) = \frac{i}{S_0} \langle 0 | T\, \psi_a(x_a)\, \psi_b(x_b)\, \bar{\psi}_a(y_a)\, \bar{\psi}_b(y_b)\, S\, | 0 \rangle, \qquad (I)$$

где операторы спинорных полей $\psi_{a,b}$ удовлетворяют уравнению

$$(\hat{P}_x - m)\Psi(x) = 0\,, \quad \hat{P}_x = i\frac{\partial}{\partial x_\mu}\gamma^\mu\,, \tag{2}$$

$$S = T\exp\{i\int d^4x\,\mathcal{L}_I(x)\,, \quad S_0 = \langle 0|S|0\rangle\,, \tag{3}$$

$$\mathcal{L}_I(x) = -j_\mu(x)A^\mu(x) = -\frac{1}{2}\sum_{i=a,b}[\overline{\Psi}_i(x)\gamma_\mu\,, \Psi_i(x)A^\mu(x)]_- \tag{4}$$

– лагранжиан взаимодействия.

Выведем для двухчастичной функции Грина G уравнение Швингера в вариационных производных. С этой целью введем[3] классическое поле внешнего тока $\mathcal{J}_\mu(x)$. Взаимодействие квантованных полей с внешним источником фотонного поля учитывается с помощью добавления в лагранжиан взаимодействия (4) члена $\mathcal{J}_\mu A^\mu$, так что

$$\mathcal{L}_I(x) = -j(x)A(x) - \mathcal{J}(x)A(x)\,. \tag{5}$$

Таким образом, все интересующие нас величины – функции Грина и матричные элементы – являются функционалами от $\mathcal{J}(x)$. Заметим еще, что в присутствии внешнего источника конфигурационное пространство не обладает свойством трансляционной инвариантности. Нам понадобятся некоторые хорошо известные[I,2] соотношения для вариационных производных:

$$\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(z)}T\{\Psi(x)\ldots\overline{\Psi}(y)\ldots S\} = -T\{\Psi(x)\ldots\overline{\Psi}(y)\ldots A(z)S\}\,, \tag{6}$$

$$(\hat{P}_x - m)T\{\Psi(x)\ldots S\} = i\frac{\delta}{\delta\overline{\Psi}(x)}\{\ldots S\}\,, \tag{7}$$

$$\frac{\delta S}{\delta\overline{\Psi}} = -ieT\{\hat{A}(x)\Psi(x)S\}\,. \tag{8}$$

Подействовав оператором $(\hat{P}_{x_a} - m_a)$ на функцию Грина (I), используя редукционную формулу (7) и соотношение (8), найдем:

$$(\hat{P}_{x_a} - m_a)G(x_a,x_b;y_a,y_b) = i\,\delta(x_a - y_a)S_b(x_b,y_b) -$$

$$-\frac{ie_a}{S_0}\langle 0|T\{\hat{A}(x_a)\Psi_a(x_a)\Psi_b(x_b)\overline{\Psi}_a(y_a)\overline{\Psi}_b(y_b)S\}|0\rangle\,. \tag{9}$$

Одночастичная фермионная функция Грина во внешнем поле

$$S(x,y) = -\frac{i}{S_0}\langle 0|T\,\Psi(x)\Psi(y)S|0\rangle$$

удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Дайсона-Швингера[I,2]

$$(\hat{P}_x - m - e\hat{A}^e(x) - M)S(x,y) = \overset{\vee}{\delta}(x-y)\,, \tag{I0}$$

где M – одночастичный массовый оператор. Здесь среднее значение внешнего электромагнитного поля A^e определено следующим образом:

$$A^e(x) = \frac{1}{S_0}\langle 0|T A(x)S|0\rangle = \frac{i}{S_0}\frac{\delta S_0}{\delta\mathcal{J}(x)}\,. \tag{II}$$

Действие интегрального массового оператора M определяется следующим соотношением:

$$M S(x,y) \equiv \int d^4x' M(x,x')S(x',y) = ie\gamma_\mu\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}_\mu(x)}S(x,y)\,. \tag{I2}$$

Используя соотношение (6) и определение (II), второе слагаемое в равенстве (9) можно преобразовать к виду:

$$-\frac{ie_a}{S_0}\langle 0|T\{\hat{A}(x_a)\Psi_a(x_a)\Psi_b(x_b)\overline{\Psi}_a(y_a)\overline{\Psi}_b(y_b)S\}|0\rangle =$$

$$= ie_a\gamma_{a\mu}\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}_\mu(x_a)}G(x_a,x_b;y_a,y_b) + e_a G(x_a,x_b;y_a,y_b)\hat{A}^e(x_a)\,.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (9) и действуя слева оператором обратной функции Грина

$$S_b^{-1} = [\hat{P}_{x_b} - m_b - e_b \hat{A}^e(x_b) - M_b],$$

найдем:

$$-i[\hat{P}_{x_b} - m_b - e_b \hat{A}^e(x_b) - M_b][\hat{P}_{x_a} - m_a - e_a \hat{A}^e(x_a) -$$

$$- i e_a \gamma_{a\mu} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}_\mu(x_a)}] G(x_a, x_b, y_a, y_b) = \delta^4(x_a - y_a)\, \delta^4(x_b - y_b) \quad . \qquad (13)$$

Точно таким же способом, действуя оператором $(\hat{P}_{x_b} - m_b)$ на функцию Грина G, получим уравнение, отличающееся от уравнения (13) перестановкой индексов "a" и "b":

$$-i[\hat{P}_{x_a} - m_a - e_a \hat{A}^e(x_a) - M][\hat{P}_{x_b} - m_b - e_b \hat{A}^e(x_b) -$$

$$- i e_b \gamma_{b\mu} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}_\mu(x_b)}] G(x_a, x_b, y_a, y_b) = \delta^4(x_a - y_a)\, \delta^4(x_b - y_b) \quad . \qquad (14)$$

Эти уравнения и есть одна из форм уравнения Швингера для двухчастичной функции Грина. Уравнения (13) и (14) можно представить в интегральной форме. Введя для упрощения операторную форму записи, перепишем уравнение (13) с помощью равенства (10) в таком виде:

$$[G_0^{-1} - i S_b^{-1} M_a - S_b^{-1} e_a \gamma_{a\mu} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}_\mu(x_a)}] G = 1 \quad ,$$

где $G_0 = i S_a S_b$ - функция Грина двух невзаимодействующих частиц. Отсюда видно, что двухчастичная функция Грина удовлетворяет линейному интегральному уравнению Бете-Солпитера

$$G = G_0 + G_0 K G \quad , \qquad (15)$$

где двухчастичное ядро взаимодействия K определено следующим представлением:

$$K G = \{ i S_b^{-1} M_a + e_a S_b^{-1} \gamma_{a\mu} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}_\mu(x_a)} \} G \quad . \qquad (16)$$

Таким же образом, исходя из уравнений (14), для ядра K найдем:

$$K G = \{ i S_a^{-1} M_b + e_b S_a^{-1} \gamma_{b\mu} \frac{\delta}{\delta \mathcal{J}_\mu(x_b)} \} G \quad . \qquad (17)$$

Часто ядро K определяют как бесконечную сумму двухчастично неприводимых диаграмм.

3. Определим теперь вершинную функцию двухчастичной системы Γ_{ab} аналогично тому, как это делается для одной частицы. С этой целью рассмотрим пятиточечную функцию Грина

$$- \frac{\delta G(x_a, x_b, y_a, y_b)}{\delta \mathcal{J}_\mu(z)} = R^\mu(x_a, x_b, y_a, y_b \,|\, z) \qquad (18)$$

и положим[6]

$$R^\mu(z) = \int d^4 z' \, \mathcal{D}^{\mu\nu}(z, z') \, G * \Gamma_{ab\nu}(z') * G \quad , \qquad (19)$$

где

$$\mathcal{D}^{\mu\nu}(x,y) = \frac{i}{S_0} \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) S | 0 \rangle - i A^{e\mu}(x) A^{e\nu}(y)$$

- полная однофотонная функция Грина в поле внешнего источника. В операторном равенстве (19) знак ($*$) обозначает интегрирование по двухчастичным виртуальным состояниям. В дальнейшем для удобства будем использовать операторную форму записи, выделяя только "фотонные" координаты[3], причем по повторяющимся "фотонным координатам" подразумевается интегрирование. Величины A и γ рассматриваются как матрицы в конфигурационном пространстве. Заметим, что вершинная функция $\Gamma_{ab}(z)$ зависит от одной "фотонной координаты", а функция Грина фотона $\mathcal{D}(z,z')$ – от двух, так что

$$\gamma(\zeta)=\gamma(\zeta;x,x')=\gamma\,\delta(\zeta-x)\,\delta(x-x'),$$

$$\langle x|A|x'\rangle=\delta(x-x')\,A(x),$$

$$\gamma A\equiv\gamma(\zeta)A(\zeta)\equiv\int d\zeta\,\gamma_\mu(\zeta)A^\mu(\zeta),$$

$$\gamma(\zeta)\mathcal{D}(\zeta\zeta')\gamma(\zeta')\equiv\int d\zeta\,d\zeta'\,\gamma_\mu(\zeta)\mathcal{D}^{\mu\nu}(\zeta,\zeta')\gamma_\nu(\zeta').$$

С другой стороны, с помощью определения (П) вариационную производную по $\mathcal{J}$ можно связать с вариационной производной по новому функциональному аргументу A^e.

$$\frac{\delta}{\delta\mathcal{J}(x)}=\int d\zeta\,\frac{\delta A^e(\zeta)}{\delta\mathcal{J}(x)}\,\frac{\delta}{\delta A^e(\zeta)}=-\int\mathcal{D}(\zeta,x)\frac{\delta}{\delta A^e(\zeta)}\,d\zeta\equiv$$

$$\equiv-\mathcal{D}(\zeta,x)\frac{\delta}{\delta A^e(\zeta)}\ . \qquad (20)$$

Определим обратную двухчастичную функцию Грина G с помощью равенства

$$G*G^{-1}=G^{-1}*G=1$$

и воспользуемся соотношениями (I6), (20) и тождеством

$$\frac{\delta G}{\delta A^e(z)}=-G*\frac{\delta G^{-1}}{\delta A^e(z)}*G. \qquad (21)$$

Тогда для двухчастичной вершинной функции $\Gamma_{ab}(z)$ найдем:

$$\Gamma_{ab}(z)=-\frac{\delta G^{-1}}{\delta A^e(z)}=\Gamma_0(z)+\Lambda(z), \qquad (22)$$

где

$$\Gamma_0(z)=-i\Gamma_a(z)S_b^{-1}-iS_a^{-1}\Gamma_b(z),\quad \Lambda(z)=\frac{\delta K}{\delta A^e(z)},$$

$$\Gamma_a(z)=-\frac{\delta S_a^{-1}}{\delta A^e(z)}=e_a\gamma_a(z)+\frac{\delta M_a}{\delta A^e(z)}\ . \qquad (23)$$

Теперь выведем выражение для ядра K через двухчастичную вершинную функцию Γ_{ab}. Используя соотношение (I8), перепишем уравнение (I6) в следующем виде

$$KG=iS_b^{-1}M_aG-e_a\gamma_{a\mu}S_b^{-1}R^\mu(\ldots|z).$$

Отсюда, имея в виду определение (I9), для ядра K найдем представление[7] (рис. I):

$$K=-e_a\gamma_a(\zeta)S_b^{-1}\mathcal{D}(\zeta,\zeta')G*\Gamma_{ab}(\zeta')+iS_b^{-1}M_a. \qquad (24)$$

Исходя из уравнения (I7), получим другое выражение (рис. 2):

$$K=-e_b\gamma_b(z)S_a^{-1}\mathcal{D}(z,z')G*\Gamma_{ab}(z')+iS_a^{-1}M_b\ . \qquad (25)$$

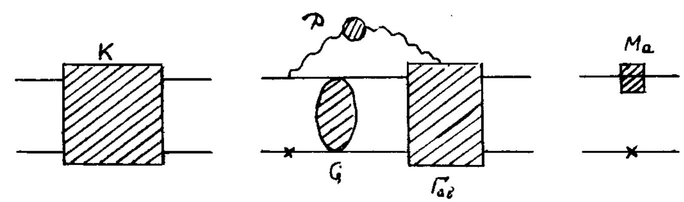

Рис. I

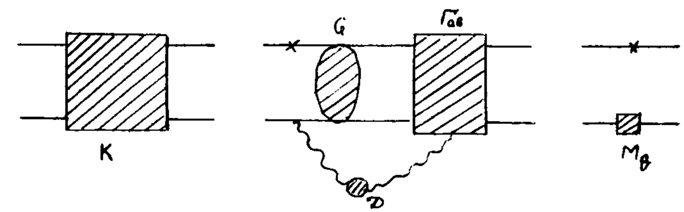

Рис. 2

На рисунках I,2 знак $-\!\!\times\!\!-$ обозначает множитель S^{-1}. При взгляде на равенства (24), (25) и рисунки I,2 видно формальное сходство этих уравнений для ядра K с уравнением Дайсона-Швингера для одночастичного массового оператора M (рис. 3)

$$M_a = -i e_a \gamma_a(3) \mathcal{D}(3,3') S_a \Gamma_a(3') \quad ,$$

$$M = S_f^{-1} - S^{-1} \quad , \tag{26}$$

где S_f - функция Грина свободной частицы (без учета взаимодействия с полем фотонов), удовлетворяющая уравнению

$$(\hat{p} - m - e\hat{A}^e) S_f = 1 \quad .$$

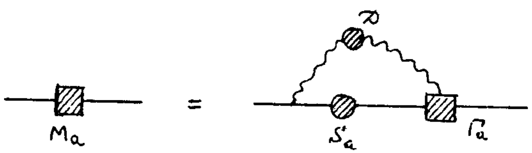

Рис. 3

В дальнейшем полагаем, что внешний источник фотонов выключен, т.е. $\mathcal{J}=0$, $A^e=0$.

Решим уравнения (24) или (25) итерациями по модифицированной теории возмущений. Полагаем $G \simeq G_0$, $\Gamma_{a\ell} \simeq \Gamma_0$, $\Gamma_{a,\ell} = e_{a,\ell}\gamma_{a,\ell}$. Тогда в качестве исходного приближения для ядра K найдем ядро однофотонного обмена $K^{(\gamma)}$ (рис. 4):

$$K^{(\gamma)} = - e_a e_\ell \gamma_{a\mu}(3) \mathcal{D}^{\mu\nu}(3,3') \gamma_{\ell\nu}(3') \quad . \tag{27}$$

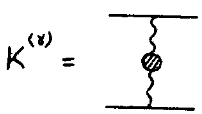

Рис. 4.

Множитель $e_a e_\ell$ можно записать в виде

$$e_a e_\ell = z_a z_\ell e^2 = 4\pi z_a z_\ell \alpha \, , \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137} \, ,$$

где $z_{a,\ell}$ – заряды частиц в единицах элементарного электрического заряда, т.е. $e_{a,\ell} = z_{a,\ell} e$. Решая уравнение Бете-Солпитера (I5) с ядром $K^{(\gamma)}$, найдем соответствующее приближение для двухчастичной функции Грина $G^{(\gamma)}$. Это приближение, очевидно, описывается суммой лестничных диаграмм (рис. 5)

$$G^{(\gamma)} = G_0 + G_0 K^{(\gamma)} G_0 + G_0 K^{(\gamma)} G_0 K^{(\gamma)} G_0 + \dots \tag{28}$$

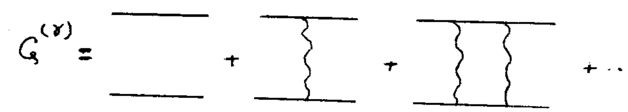

Рис. 5

4. Теперь мы найдем следующее приближение для ядра K, учитывая эффекты "связанности" с помощью функции $G^{(\gamma)}$. Для того, чтобы не учитывать "связанность" дважды по G и по $\Gamma_{a\ell}$, оставляем $G^{(\gamma)}$ при несвязанной части вершинной функции Γ_0, и G_0 – при связанной части вершинной функции Λ. При этом выражение для ядра K можно представить в виде:

$$K = K^{(\gamma)} + \Delta K \quad . \tag{29}$$

Наша цель - найти нужное приближение для ΔK. Подставляя определение (22) в уравнение (24), с учетом сказанного выше для ядра K найдем:

$$K = K^{(\gamma)} + \Delta K = K_{\Gamma_0} + K_\Lambda + i S_\ell^{-1} M_a \quad , \tag{30}$$

где

$$K_{\Gamma_0} = -e_a\gamma_a(\zeta')S_b^{-1}\mathcal{D}(\zeta',\zeta)G^{(\gamma)}\Gamma_0(\zeta) \quad , \tag{31}$$

$$K_{\Lambda} = -e_a\gamma_a(\zeta')S_b^{-1}\mathcal{D}(\zeta',\zeta)G_0\Lambda(\zeta) \quad . \tag{32}$$

Найдем для ядра ΔK такое приближение, при котором второе слагаемое выражения (30) K_Λ имеет тот же порядок по α, как и первое слагаемое K_{Γ_0}. Для этого рассмотрим выражение для функции $\Lambda(\zeta)$, полученное с помощью уравнения (25)

$$\Lambda(\zeta) = \frac{\delta}{\delta A^e(\zeta)}\left\{-e_b\gamma_b(z')S_a^{-1}\mathcal{D}(z,z')G\Gamma_{ab}(z) + iS_a^{-1}M_b\right\}\Big|_{A^e=0} . \tag{33}$$

Отсюда видно, что слагаемые с вариационной производной от S_a^{-1}, M_a не дают вклада в данное приближение ядра K_Λ, так как они содержат лишний множитель по α, по сравнению с K_{Γ_0}. Вклад слагаемого с вариационной производной от $\mathcal{D}(z',z)$ равен нулю по теореме Фарри. Таким образом, нужное нам $\Lambda(\zeta)$ может быть записано так:

$$\Lambda(\zeta) = -e_b\gamma_b(z')S_a^{-1}\mathcal{D}(z',z)\left\{G\Gamma_{ab}(\zeta)G\Gamma_{ab}(z) + G\frac{\delta\Gamma(z)}{\delta A^e(\zeta)}\Big|_{A^e=0}\right\} , \tag{34}$$

где использовано соотношение (21). На первый взгляд кажется, что вкладом этих членов тоже можно пренебречь. Но, как мы покажем ниже, повторным применением уравнения Бете–Солпитера можно убрать лишний множитель по α в некоторых членах выражения (34). Для того, чтобы найти искомое приближение для ядра ΔK, в выражениях для K_{Γ_0}, K_Λ примем $G \simeq G_0$, $\Gamma_{ab} \simeq \Gamma_0$, $\Gamma_{a,b} \simeq e_{a,b}\gamma_{a,b}$. "Связанность" будем учитывать с помощью функции $G^{(\gamma)}$, которая расположена между двумя вершинными функциями Γ_0. Тогда получим:

$$K_{\Gamma_0} = ie_ae_b\gamma_a(\zeta')S_b^{-1}\mathcal{D}(\zeta',\zeta)G^{(\gamma)}\left[S_a^{-1}\gamma_b(\zeta) + \gamma_a(\zeta)S_b^{-1}\right] , \tag{35}$$

$$K_\Lambda = -ie_ae_b\gamma_a(\zeta')\mathcal{D}(\zeta',\zeta)\gamma_b(z')\mathcal{D}(z',z)G_0\left[e_a\gamma(\zeta)S_b^{-1} + e_bS_a^{-1}\gamma_b(\zeta)\right]G^{(\gamma)}\left[e_a\gamma_a(z)S_b^{-1} + e_bS_a^{-1}\gamma_b(z)\right] - ie_a^2e_b^2\gamma_a(\zeta')\gamma_b(z')\mathcal{D}(\zeta',\zeta)\mathcal{D}(z',z)S_aS_b\gamma_b(\zeta)\gamma_a(z) . \tag{36}$$

Отсюда видно, что K_Λ все еще содержит лишний множитель по α, по сравнению с K_{Γ_0}. Из четырех членов первого слагаемого в равенстве (36) два дают вклад в следующее по α приближение K_Λ. Перепишем оставшиеся два члена (рис. 6):

$$e_a^2e_b^2\gamma_a(\zeta')\gamma_b(z')\mathcal{D}(\zeta',\zeta)\mathcal{D}(z',z)\gamma_b(\zeta)G^{(\gamma)}\gamma_a(z) + e_ae_b^3\gamma_a(\zeta')S_b\mathcal{D}(\zeta',\zeta)\gamma_b(z')\mathcal{D}(z',z)\gamma_b(\zeta)G^{(\gamma)}S_a^{-1}\gamma_b(z) . \tag{37}$$

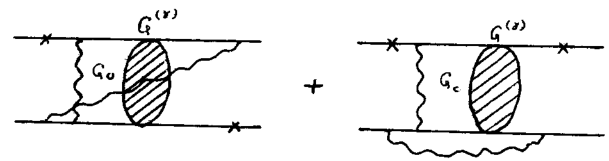

Рис. 6

Воспользовавшись уравнением Бете–Солпитера с ядром $K^{(\gamma)}$

$$G^{(\gamma)} = G_0 + G_0K^{(\gamma)}G^{(\gamma)} ,$$

$$K^{(\gamma)}G^{(\gamma)} = G_0^{-1}\left(G^{(\gamma)} - G_0\right) , \tag{38}$$

равенствами (26), (27), преобразуем выражение (37) к виду:

$$\left[i e_a e_b \gamma_b(z') S_a^{-1} \mathcal{D}(z',z)\, G^{(\gamma)} \gamma_a(z) S_b^{-1} - K^{(\gamma)} \right] +$$

$$+ \left[i e_b^2 \gamma_b(z') S_a^{-1} \mathcal{D}(z',z)\, G^{(\gamma)} S_a^{-1} \gamma_b(z) + i S_a^{-1} M_b \right] . \qquad (39)$$

Таким образом, для искомого приближения ядра K_Λ найдем:

$$K_\Lambda = i e_a e_b \gamma_b(z') S_a^{-1} \mathcal{D}(z',z)\, G^{(\gamma)} \gamma_a(z) S_b^{-1} +$$

$$+ i e_b^2 \gamma_b(z') S_a^{-1} \mathcal{D}(z',z)\, G^{(\gamma)} S_a^{-1} \gamma_b(z) - K^{(\gamma)} + i S_a^{-1} M_b -$$

$$- i e_a^2 e_b^2 \gamma_a(\xi') \gamma_b(z') \mathcal{D}(\xi',\xi) \mathcal{D}(z',z) S_a' S_b' \gamma_b(\xi) \gamma_a(z). \qquad (40)$$

Последний вычитаемый член в выражении (40) нужно сохранить, так как он учитывается дважды - и в K_{Γ_0} и в K_Λ . Подставляя выражения (35), (40) в уравнение (30), получим соответствующее приближение для ядра ΔK (рис. 7)

$$\Delta K \cong i e_a e_b \gamma_a(\xi') S_b^{-1} \mathcal{D}(\xi',\xi)\, G^{(\gamma)} S_a'^{-1} \gamma_b(\xi) - K^{(\gamma)} +$$

$$+ i e_a^2 \gamma_a(\xi') S_b'^{-1} \mathcal{D}(\xi',\xi)\, G^{(\gamma)} \gamma_a(\xi) S_b^{-1} + i S_b^{-1} M_a +$$

$$+ i e_b^2 \gamma_b(z') S_a^{-1} \mathcal{D}(z',z)\, G^{(\gamma)} \gamma_b(z) S_a^{-1} + i S_a^{-1} M_b +$$

$$+ i e_a e_b \gamma_b(z') S_a^{-1} \mathcal{D}(z',z)\, G^{(\gamma)} \gamma_a(z) S_b^{-1} - K^{(\gamma)} - \qquad (41)$$

$$- i e_a^2 e_b^2 \gamma_a(\xi') \gamma_b(z') \mathcal{D}(\xi',\xi) \mathcal{D}(z',z) S_a' S_b' \gamma_b(\xi) \gamma_a(z) .$$

Найдем выражение для ΔK в импульсном представлении. Определим переменные полного $\mathcal{P}, Q$ и относительного p, q импульсов:

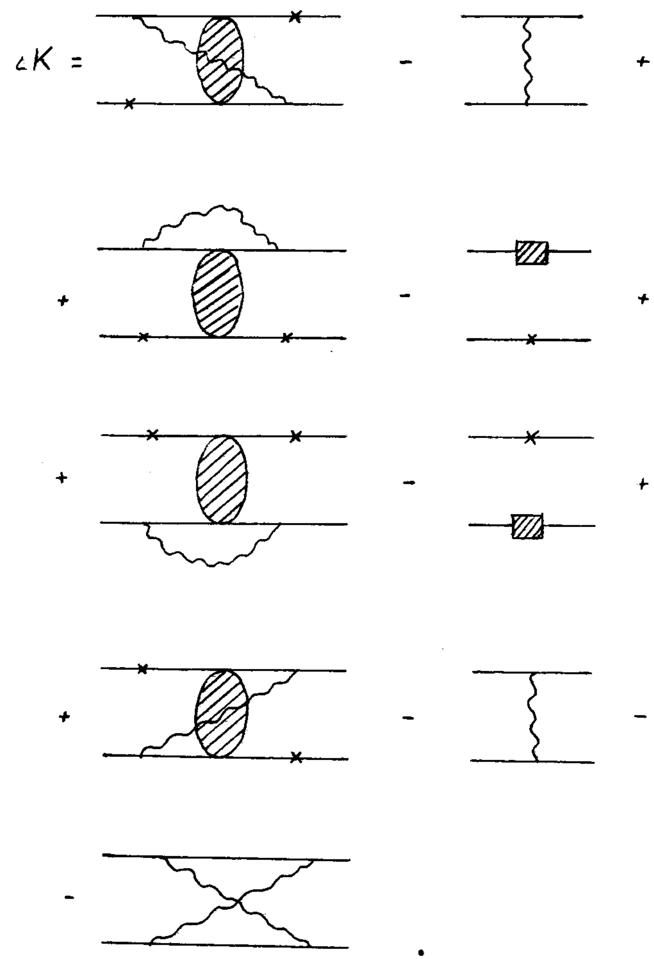

Рис. 7

$$\mathcal{P} = p_a + p_b\,, \qquad p = \eta_b p_a - \eta_a p_b\,,$$
$$Q = q_a + q_b\,, \qquad q = \eta_b q_a - \eta_a q_b\,,$$
$$\eta_a + \eta_b = 1\,, \tag{42}$$
$$p_a = \eta_a \mathcal{P} + p\,, \qquad q_a = \eta_a Q + q\,,$$
$$p_b = \eta_b \mathcal{P} - p\,, \qquad q_b = \eta_b Q - q\,.$$

Введем фурье-образы функции Грина S, G, $\mathcal{D}$ и ядра K с учетом трансляционной инвариантности:

$$G(x_a, x_b, y_a y_b) = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4p_a\, d^4p_b\, d^4q_a\, d^4q_b\, e^{-ip_a x_a - ip_b x_b + iq_a y_a + iq_b y_b} \otimes$$
$$\otimes\, \delta^4(\mathcal{P} - Q)\, G(\mathcal{P}, p, q)\,,$$

$$K(x_a, x_b; y_a, y_b) = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \int d^4p_a\, d^4p_b\, d^4q_a\, d^4q_b\, e^{-ip_a x_a - ip_b x_b + iq_a y_a + iq_b y_b} \otimes$$
$$\otimes\, \delta^4(\mathcal{P} - Q)\, K(\mathcal{P}, p, q)\,, \tag{43}$$
$$S(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, e^{-ip(x-y)} S(p)\,,$$
$$\mathcal{D}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k\, e^{ik(x-y)} \mathcal{D}(k)\,.$$

Подставляя фурье-преобразование (43) в уравнения (24) и (4I), для фурье-образа ядра K найдем:

$$K(\mathcal{P}; p, q) = i(2\pi)^4 \delta^4(p_b - q_b)\, S_b^{-1}(p_b)\, M_a(p_a) -$$
$$- e_a \gamma_{a\mu} S_b^{-1}(p_b) \int \frac{d^4k\, d^4p'}{(2\pi)^8} \mathcal{D}^{\mu\lambda}(k)\, G(\mathcal{P}-k; p - \eta_b k, p')\, \Gamma_{ab\lambda}(\mathcal{P}, \mathcal{P}-k; p', q), \tag{44}$$

$$\Delta K(\mathcal{P}, p, q) \cong \frac{i e_a e_b}{(2\pi)^4} \gamma_a S_b^{-1}(p_b) \int d^4k\, \mathcal{D}(k)\, G^{(\gamma)}(\mathcal{P}-k, p - \eta_b k, q - \eta_b k)\, \gamma_a S_a^{-1}(q_a) -$$
$$- K^{(\gamma)}(\mathcal{P}, p, q) + \frac{i e_a^2}{(2\pi)^4} \gamma_a S_b^{-1}(p_b) \int d^4k\, \mathcal{D}(k)\, G^{(\gamma)}(\mathcal{P}-k, p - \eta_b k, q - \eta_b k)\, \gamma_a S_b^{-1}(q_b) +$$

$$+ \frac{i e_b^2}{(2\pi)^4} \gamma_b S_a^{-1}(p_a) \int d^4k\, \mathcal{D}(k)\, G^{(\gamma)}(\mathcal{P}-k, p + \eta_a k, q + \eta_a k)\, \gamma_b S_a^{-1}(q_a) +$$
$$+ \frac{i e_a e_b}{(2\pi)^4} \gamma_b S_a^{-1}(p_a) \int d^4k\, \mathcal{D}(k)\, G^{(\gamma)}(\mathcal{P}-k, p + \eta_a k, q + \eta_a k)\, \gamma_a S_b^{-1}(q_b) +$$
$$+ i S_b^{-1}(p_b) M_a(p_a) + i S_a^{-1}(p_a) M_b(p_b) - K^{(\gamma)}(\mathcal{P}, p, q) -$$
$$- \frac{i e_a^2 e_b^2}{(2\pi)^4} \gamma_{a\mu} \gamma_{b\rho} \int d^4k\, d^4\ell\, \mathcal{D}^{\mu\lambda}(k)\, \mathcal{D}^{\rho\sigma}(\ell)\, S_a(p_a - k + \ell)\, S_b(p_b - \ell + k)\, \gamma_{a\sigma} \gamma_{b\lambda}\,. \tag{45}$$

Основным достоинством изложенной процедуры является возможность явного и прямого учета связанности в промежуточных виртуальных состояниях ядра взаимодействия. В самом деле, даже первое (лестничное) приближение $G^{(\gamma)}$ для функции Грина воспроизводит существующие связанные состояния. Для слабо связанных систем в квантовой электродинамике связанность важна только в промежуточных состояниях с низкочастотными фотонами. В этой области мы можем использовать нерелятивистское выражение для двухчастичной функции Грина. Область высоких частот может быть описана с помощью обычных борновских приближений. Сумма обоих вкладов дает полностью сходящийся в инфракрасной области результат для сдвигов уровней энергии связанных состояний /5,7/.

Перенормировка уравнения (24) для ядра K не представляет особых трудностей и может быть выполнена стандартным способом /I,2/ (ср. перенормировку уравнений Дайсона-Швингера для одночастичного массового оператора). Она состоит в приписывании константы Z_1 перенормировки вершины к голой (точечной) вершине в уравнении (24) и введении перенормированных величин, таких как заряд, массы, пропагаторы и вершины.

Наиболее удобным методом релятивистского описания связанной двухчастичной системы является квазипотенциальный метод Логунова и Тавхелидзе[8,9]. Ядро этого трехмерного уравнения - квазипотенциал определено в терминах двухвременной функции Грина двух частиц $G(x_a, x_b; y_a, y_b)\Big|_{\substack{x_a^0 = x_b^0 \\ y_a^0 = y_b^0}}$.
Такой подход значительно облегчает вычисление уровней энергии связанных систем[7,9].

Мы надеемся, что предложенное уравнение (24) для ядра Бете-Солпитера может оказаться полезным также в некоторых других задачах.

В заключение авторы выражают благодарность Н.Н.Боголюбову и А.Н.Тавхелидзе за полезные советы и обсуждения.

Литература:

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Наука, 1973.
2. K.Nishijima. Field Theory and Dispersion relations, New-York-Amsterdam, 1969.
3. J.Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, 455, (1951).
4. F.Dyson, Phys. Rev., 75, 1736, (1949).
5. T.Fulton, P.Martin, Phys. Rev. 95, 811 (1954).
6. S.Mandelstam, Proc. Roy. Soc., 233A, 248 (1955).
7. Р.Н.Фаустов. Связанная система двух частиц в квантовой электродинамике. Лекции для молодых ученых, ОИЯИ 8246, Дубна (1974).
8. A.Logunov, A.Tavkhelidze, Nuovo cim., 29, 380 (1963).
9. Р.Н.Фаустов, ЭЧАЯ, 3, 238 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел
13 сентября 1976 года.