сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р19-91-122

Д.В.Ктитарев

МЕТОД МИНИМАЛЬНОЙ НОРМЫ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ БИОМАГНЕТИЗМА

1991

Создание высокотемпературных квантовых интерферометров, позволяющих проводить измерения очень слабых магнитных полей, положило начало развитию нового направления в биомагнетизме и медицине - исследованию свойств органов человека по создаваемому ими магнитному полю. Одна из актуальных задач этого направления состоит в реконструкции распределения токов источника по полученным из измерений характеристикам магнитного поля. Возникающие в реальной практике задачи такого типа, обычно называемые обратными, чрезвычайно сложны и требуют серьезных теоретических исследований и технических разработок. В настоящее время предложено несколько подходов к решению таких задач, различающихся как в связи со специфическими особенностями каждого исследуемого органа, так и по выбору конкретных методов оптимизации алгоритма реконструкции и имеющихся вычислительных средств (см., например, [1-7]). Мы рассмотрим результаты некоторых теоретических работ, отражающих основные направления в решении обратных задач биомагнетизма для мозга и сердца.

Математическая постановка обратной задачи для модельной ситуации состоит в следующем: пусть в некоторой области $G_J \subset R^3$, имеющей постоянную магнитную проницаемость, задано некоторое распределение тока $\vec{J}$. В некоторой области G_B, не пересекающейся с областью G_J, измеряется вектор магнитной напряженности поля $\vec{B}$, созданного током $\vec{J}$. Эти величины связаны соотношением, называемым законом Био-Савара:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{G_J} \frac{\vec{J}(\vec{y}) \times (\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \, d\vec{y}, \text{ или } \vec{B} = \Phi(\vec{J}) . \qquad (1)$$

Требуется по данному полю $\vec{B}$ найти неизвестное распределение $\vec{J}$.

Одна из основных сложностей этой задачи заключается в том, что в такой постановке она является некорректной, в частности, не имеет единственного решения. В настоящее время в большинстве работ, посвященных обратной задаче магнитокардиологии и магнитоэнцефалогии, используется метод минимальной нормы, позволяющий выбрать из множества решений то, которое имеет наименьшее значение по некоторой норме, тем самым определив его однозначно.

Суть этого метода состоит в том, что ищется решение задачи (1), ортогональное ядру интегрального оператора Φ, минимизирующее норму в пространстве решений, например, $L_2(G_J)$:

$$\|\vec{J}\| = \left(\int_{G_J} |\vec{J}(\vec{x})|^2 \, d\vec{x} \right)^{1/2} \longrightarrow \min .$$

Другая сторона некорректности проявляется в ходе решения задачи, когда вычислительный итерационный процесс может оказаться неустойчивым. Для того, чтобы преодолеть эту трудность, на том или ином этапе применяется некоторая регуляризация, т. е. замена задачи

на другую, решение которой слабо отличается от исходной, чтерационный процесс для которой будет устойчивым.

Так, в работе [8] применена регуляризация Тихонова, орая приводит к замене уравнения (1) на уравнение

$$(\vec{x},\vec{y}) \int_{G_J} \vec{K}(\vec{x},\vec{z}) \vec{J}(\vec{z}) d\vec{z} d\vec{x} + \alpha \left\{ p(\vec{y}) \vec{J}(\vec{y}) - q(\vec{y}) \Delta \vec{J}(\vec{y}) \right\}$$

$$= \int_{G_B} \vec{B}(\vec{x}) \vec{K}(\vec{x},\vec{y}) d\vec{x},$$

K определяет оператор Φ: $\int_{G_J} \vec{K}(\vec{x},\vec{z}) \vec{J}(\vec{z}) d\vec{z} = \Phi(\vec{J})$, a

,q - параметры регуляризации. Дискретизация этого

знения приводит к системе линейных уравнений с иетричной положительно определенной матрицей.

Аналогичная процедура может быть произведена после кретизации задачи (1). Тогда система линейных знений

$$g = Af + n, \qquad (2)$$

g, f, n - векторы, обозначающие магнитную индукцию, и шум соответственно, а матрица A - дискретный юг оператора Φ, заменяется на уравнение

$$A^t g = (A^t A + \alpha I) f , \qquad (3)$$

α - параметр регуляризации.

Другая проблема при решении реальной задачи - учет возможных ошибок измерения. В работе [9] предлагается считать, что результаты измерения магнитометров f_k отличаются от теоретических значений m_k на некоторые ошибки ε_k, $k=1,\dots,N$, имеющие нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ. Зафиксировав значение среднеквадратичного отклонения $\chi^2=\sum_{k=1}^{N}(f_k-m_k(J))^2/\sigma$, ищут решение, для которого максимальное значение принимает энтропия

$$S=\sum_{i=1}^{N} f_i\left(\sum_{k=1}^{N} f_k\right)^{-1}\log\left[f_i\left(\sum_{k=1}^{N} f_k\right)^{-1}\right].$$

Используя такой метод и предполагая, что искомое распределение тока J носит вероятностный характер, исходную задачу сводят к уравнению (3), где векторы f, g и параметр α - случайные величины. В статье [10] приведены результаты некоторых вычислений с использованием этого подхода. Авторы отмечают, что вычисления некоторых тестов двумерных реконструкций на "стандартном университетском компьютере" занимают около 10 часов времени работы центрального процессора, а для вычислений трехмерных реконструкций приходилось использовать комплекс из 30 транспьютеров Т800.

По-видимому, учет статистической информации в решении реальных задач необходим, поэтому авторы [11] исследовали с помощью численного эксперимента влияние априорной статистической информации на процесс реконструкции и корректировки соответствующего алгоритма. Использовалась формула среднеквадратичного отклонения, полученного в результате реконструкции решения от начально заданного распределения тока:

$$MSE=tr\{K_f-K_fA^T[AK_fA^T+K_n]^{-1}AK_f\}/tr[K_f],$$

где K_f и K_n - ковариантные матрицы для распределений тока f и шума n соответственно (см. уравнение (2)). Были проведены расчеты для различных комбинаций априорной информации и двух вариантов расположения детекторов, в результате которых установлено, что использование таких априорных данных существенно влияет на процесс решения обратной задачи. Кроме того, установлено, что один из вариантов расположения детекторов - вокруг измеряемого объекта - наиболее предпочтителен.

Поиски повышения эффективности вычислительного алгоритма реконструкции токового распределения источника ведутся и в других направлениях. Так, в [12] метод минимальной нормы используется в комбинации с методами анализа конечных элементов. Искомое распределение тока ищется в виде

$$\vec{J}(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}\vec{J}(\vec{x}_i)f_i(\vec{x}),$$

где f_i - конечный набор некоторых интерполяционных полиномов. Такой метод позволил провести расчеты для реальных геометрий мозга и сердца человека и сравнить его эффективность с традиционным методом дипольного представления источника тока. Результаты работы показывают, что эффективность метода минимальной нормы особенно проявляется при исследовании непрерывных исходных токовых распределений, однако для более тонкого исследования локальных особенностей источника, по-видимому, необходимо создание метода, объединяющего метод минимальной нормы и метод эквивалентного дипольного представления.

Автор благодарен Б.В.Васильеву и Ю.Е.Журавлеву за помощь при подготовке этого обзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. R.J.Ilmoniemi, M.S.Hamalainen, J.Knuutila. "The forward and Inverse Problem in the Spherical Model".- in *Biomagnetism: Applications and Theory,* H.Weinberg, G.Stroink, T.Katila, Eds., 278-282 (Pergamon, New York, 1985).
2. M.Singh, D.Doria, V.W.Henderson, G.C.Huth, J.Beatty. "Reconstructions of Images from Neuromagnetic Fields".- IEEE Trans. NS-31, 585-589 (1984).
3. B.Jeffs, R.leahy, M.Singh. "An Evaluation of Methods for Neuromagnetic Image Reconstruction".- IEEE Trans. BME-34, 713-723 (1987).
4. W.J.Dallas, "Fourier Space Solution to the Magnetostatic Imaging Problem".- Appl. Opt. 24, 4543-4546 (1985).
5. W.Kullmann, W.J.Dallas. "Fourier Imaging of Electrical Currents in the Human Brain from their Magnetic Fields".- IEEE Trans. BME-34, 837-842 (1987).
6. D.I.F.Grimes, A.A.Ioannides. Recnstructing 3-Dimentional Line Current Sources from Magnetic Field Data".-In: *Biomagnetism'87*, K.Atsumi, M.Kotani, S.Ueno, T.Katila, S.J.Williamson Eds., Tokyo Denki Univ. Press, Tokyo, 1988.
7. Y.Yamashita, Y.Uchikawa, M.Kotani. "Regularization of Inverse Magnetic Problems".- In: *Biomagnetism'87,* Tokyo, 1988.
8. S.L.Nikulin, Yu.E.Zhuravlev, A.N.Matlashov, A.Ya.Lipovich. "Tichonov Regularization Approach to Dinamic Biomagnetic Imaging".- in: Proceedings of *Concerted Action in Biomagnetism,* Swansea, 1990.
9. C.J.S.Clarke, B.S.Janday. "The Solution of the Biomagnetic Inverse Problem by Maximum Statistical Entropy". Inverse Problems, 5, 483-500 (1989).
10. C.J.S.Clarke, A.A.Ioannides, J.P.R.Bolton. "Localized and Distributed Source Solutions for the Biomagnetic Inverse Problem". - in *Advances in Biomagnetism,* S.J.Williamson, Ed., Plenum, New York, 1990.
11. W.E.Smith, W.J.Dallas, W.H.Kullmann, H.A.Schlitt. "Lenear Estimation Theory Applied to the Reconstruction of a 3-D Vector Current Distribution". -Appl. Opt., 29, 658-667 (1990).
12. C.W.Crowley, R.E.Greenblatt, I.Khalil. "Minimum Norm Estimation of Current Distributions in Realistic Geometries".- in *Advances in Biomagnetism,* S.J.Williamson, Ed., Plenum, New York, 1990.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 марта 1991 года.

Ктитарев Д.В. P19-91-122

Метод минимальной нормы
для обратной задачи биомагнетизма

Дается краткий обзор результатов работ, выполненных в течение последних двух лет и посвященных реконструкции распределений токов мозга и сердца человека по создаваемому ими магнитному полю. В основе теоретической части для решения соответствующих уравнений использован тот или иной вариант метода минимальной нормы.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод автора

Ktitarev D.V. P19-91-122

Minimum Norm Method
for Biomagnetic Inverse Problem

We give a brief review of papers published during the latest two years and devoted to the reconstruction of source distributions of the human brain or heart currents from their magnetic field data. The theoretical foundations for the solution of the corresponding equations are based on variants of the minimum norm method.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991