СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р17 - 9930

В.Б.Приезжев

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ БЕЗ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ

1976

P17 - 9930

В.Б.Приезжев

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ БЕЗ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Случайным путем без самопересечений называется последовательность вершин решетки S_0 , S_1 , ... , S_n , в которой все S_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ различны, а S_j и S_{j+1} $(1 \leqslant j \leqslant n)$ смежны. Целое n называется длиной пути, вершина S_0 -началом пути. Если вершины S_0 и S_n смежны, последовательность S_0 , ..., S_n может быть названа замкнутым путем длины $n+1$. В двухмерном случае множество ребер ℓ_i $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$, соединяющих вершины S_i и S_{i+1} замкнутого пути длины n, ограничивает область, называемую доменом. Введем обозначения: C_n -число всех возможных путей без самопересечения длины n на данной решетке, начинающихся в заданном узле, принимаемом для определенности за начало координат; u_n - число всех возможных замкнутых путей длины n , содержащих среди своих вершин начало координат; d_n - число всех возможных конфигураций непересекающихся доменов на двухмерной решетке, имеющих суммарную длину замкнутых ограничивающих путей,равную n .

Имеется несколько физических проблем, таких как проблема "исключенного объема" в теории полимеров, статистика доменов в магнитных двумерных системах, проблема вычисления критических показателей восприимчивости в задаче Изинга, которые приводят к необходимости изучения асимптотического поведения C_n , u_n и d_n при $n \to \infty$ для различных типов решеток. Сведения относительно поведения этих величин,полученные к настоящему времени, разделяются на три группы. К первой группе относятся немногочисленные теоремы, имеющие строгое доказательство; ко второй – факты, достоверность которых подтверждается только численными расчетами для не слишком больших n, а к третьей – правдоподобные предположения, не имеющие ни строгого доказательства, ни численного подтверждения. Три теоремы из первой группы доказаны Хаммерсли[I,2]: для решетки с целочисленными координатами существуют постоянные r, s такие, что

$$c_n = \exp(s \cdot n + O(n)), \quad n \to \infty, \tag{I}$$

$$u_n = \exp(r \cdot n + O(n)), \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Для решетки данного вида

$$r = s. \tag{3}$$

Если существуют пределы отношений c_{n+1}/c_n и u_{n+1}/u_n при $n \to \infty$, они равны, соответственно, $\lim\limits_{n\to\infty}(c_{n+1}/c_n) = e^s \equiv \mu$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}/u_n) = e^r \equiv \nu$, причем, согласно (3), $\mu = \nu$. Существование этих пределов относится ко второй группе фактов[3,4]. Приведем несколько правдоподобных предположений из третьей группы.

I° Существует предел d_{n+1}/d_n при $n \to \infty$, причем

$$\lim_{n\to\infty}(d_{n+1}/d_n) = \mu = \nu. \tag{4}$$

Это предположение, вообще говоря, требует уточнения, так как его справедливость может зависеть от характера граничных условий и от способа устремления размеров решетки к бесконечности.

Более подробное обсуждение возможного значения предела (4) см. в[5].

Для того чтобы сформулировать другие предположения, определим производящую функцию доменных конфигураций на плоской квадратной решетке, имеющей M столбцов и N строк и свернутой в тор для создания периодических граничных условий. Пусть $d(m,n)$ – число доменных конфигураций на этой решетке, имеющих суммарную длину горизонтальных границ, равную m, и вертикальных – n. Производящая функция Φ определяется равенством

$$\Phi(x,y) = \sum_{m,n} d(m,n)\, x^m y^n. \tag{5}$$

Можно рассматривать Φ как статистическую сумму системы доменов, придавая переменным x, y определенный статистический смысл, например считая, что $x = \exp(-J_x/kT)$, $y = \exp(-J_y/kT)$, J_x, J_y – энергии горизонтальных и вертикальных ребер, являющихся участками доменной границы; T – температура, k – постоянная Больцмана. Обычно рассматривается случай $x = y$, удобный для анализа. Термодинамика двумерной системы доменов должна напоминать термодинамику плоской модели Изинга. По крайней мере, является разумным предположение :

2° Существует критическое значение x_c, при котором теплоемкость системы доменов, как функция x, обращается в бесконечность. Темперли[5] предположил, что критическое значение x_c^I в задаче Изинга связано с пределом μ соотношением

$$\mu = 1/X_c^{I}. \tag{6}$$

Это предположение было опровергнуто Фишером и Сайксом[3], которые показали, что $\mu > 1/X_c^{I}$. Согласно (4), более естественным выглядит предположение:

3° Предел μ равен обратному значению X_c в задаче о доменах, т.е.

$$\mu = 1/X_c . \tag{7}$$

Различные численные значения μ, ν и значение $1/X_c^{I}$ для квадратной решетки представлены в таблице I.

<u>Таблица I</u>.

$1/X_c^{I}$	точное решение[6],[7]	2.4142 ...
μ	верхняя оценка[3]	2.712
μ	нижняя оценка[3]	2.5767
μ,ν	высокотемпературное разложение [3]	2.639 ± 0.003
μ,ν	.........................[8]	2.6385 ± 0.0001
μ	метод Монте Карло[9]	2.6395 ± 0.0015

В настоящей работе предлагается аналитический подход к вычислению производящей функции доменов (5) для плоской квадратной решетки и предпринимается попытка определить критическое значение X_c. Логика последующего изложения такова: принимаем

некоторое предположение относительно поведения доменных границ при $n \to \infty$, не зависящее от 1°, 2°, 3°. В тексте это предположение обозначено (A). Используя (A), вычислим статистическую сумму (5) и получим возможность исследовать термодинамику системы доменов, в частности определить критическое значение X_c. Таким образом, все три предположения 1°, 2°, 3° сведутся к (A), причем вычисляя $1/X_c$ и сравнивая это значение с вычисленными значениями μ из таблицы I, получим численный критерий истинности предположения (A).

Решение поставленной задачи существенно опирается на результаты двух предыдущих работ автора[10],[11], ссылки на которые в дальнейшем сопровождаются цифрами I, П. В работе I была вычислена производящая функция $\Phi^*(x,y)$ системы доменов на плоской квадратной решетке при дополнительном условии, накладываемом на случайный замкнутый путь, ограничивающий домен. Из определения случайного пути без самопересечений ясно, что каждой вершине пути S_i соответствуют два (и только два) ребра, соединяющих S_i со смежными ей вершинами S_{i-1} и S_{i+1}. Обозначим эту пару $(x,x)_i$, если оба ребра горизонтальны; $(y,y)_i$, если оба ребра вертикальны, и $(x,y)_i$, если одно ребро вертикально и одно горизонтально. Упомянутое дополнительное условие состоит в том, что каждой паре $(y,y)_i$ формально ставится в соответствие пара $(y,y)'_i$, а пути, содержащие $(y,y)_i$ и $(y,y)'_i$, рассматриваются как различные. Возможность принадлежности пар $(y,y)_i$ и $(y,y)'_i$ одновременно одному пути исключается. Пусть g — доменная конфигурация из множества G всех возможных доменных конфигураций на плоской квадратной решетке. Обозначим $m(g)$ и $n(g)$ числа, соответственно, горизонтальных и вертикальных ребер, принадлежащих g, и пусть $N_{xx}(g), N_{xy}(g), N_{yy}(g)$ – числа пар (x,x), (x,y), (y,y) в данной конфигурации. В этих обозначениях производящие функции $\Phi(x,y)$ и $\Phi^*(x,y)$ записываются в виде

$$\Phi(x,y) = \sum_{g \in G} x^{m(g)} y^{n(g)}, \tag{6}$$

$$\Phi^*(x,y) = \sum_{g \in G} 2^{N_{yy}(g)} x^{m(g)} y^{n(g)}. \tag{7}$$

В дальнейшем величины, относящиеся к системе доменов с дополнительным условием удваивания конфигураций, содержащих пару (y,y), будут, как и статсумма, сопровождаться звездочкой $(*)$.

Выпишем для наглядности выражение для $\Phi^*(x,y)$, полученное в I, в пределе $M, N \to \infty$

$$\Phi^*(x,y) = \exp\left\{\frac{MN}{2(2\pi)^2} \iint_0^{2\pi} \ln\left(1+x^2+4y^2-2x\cos\alpha+4y\cos\beta-4xy\cos\alpha\cos\beta\right)d\alpha\, d\beta\right\}. \tag{8}$$

Задача состоит в том, чтобы, используя (7) и (8), получить замкнутое выражение для (6). Для этого нужно, вообще говоря, знать $N_{yy}(g)$ для каждой конфигурации $g \in G$. Попытаемся обойти эту трудность, пользуясь представлением о "самоусреднении" случайного пути при $n \to \infty$.

Определим величину $\mathcal{N}_{\alpha\beta}(g) = N_{\alpha\beta}(g)/[m(g)+n(g)]$ как среднее число пар вида (α,β) $[(\alpha,\beta):=(x,x),(x,y),(y,y)]$ на один узел, или на один шаг пути, в конфигурации g. Определим также среднее по ансамблю G от этой величины

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta} = \sum_{g \in G} \mathcal{N}_{\alpha\beta}(g)\, x^{m(g)} y^{n(g)} / \Phi(x,y). \tag{9}$$

Разобьем множество G на подмножества $g(m,n)$ $\left(\bigcup_{m,n} g(m,n) = G\right)$ такие, что к $g(m,n)$ принадлежат конфигурации доменов, имеющие m горизонтальных и n вертикальных ребер. Пусть $\mathcal{N}_{\alpha\beta}(m,n)$ – среднее $\mathcal{N}_{\alpha\beta}(g)$ по подмножеству $g(m,n)$, тогда

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta}(m,n) = \sum_{g \in g(m,n)} \mathcal{N}_{\alpha\beta}(g) / |g(m,n)|, \tag{10}$$

где $|g(m,n)|$-число элементов $g(m,n)$, равное $d(m,n)$. Идея самоусреднения состоит в том, что в каждой доменной конфигурации $g \in g(m,n)$ при достаточно больших значениях m, n устанавливается "равновесное" значение $\mathcal{N}_{\alpha\beta}(m,n)$. Другими словами, мы принимаем следующее предположение:

$$\text{(A)} \quad \mathcal{N}_{\alpha\beta}(g) = \mathcal{N}_{\alpha\beta}(m,n); \quad g \in g(m,n); \; m,n \to \infty. \tag{11}$$

Разумеется, всегда найдутся конфигурации доменов, не удовлетворяющие равенству (II) (достаточно, например, рассмотреть прямоугольный домен размерами $m/2 \times n/2$). Будем считать, что вклад в статсумму Φ от этих "нетипичных" конфигураций исчезающе мал в термодинамическом пределе $M, N \to \infty$.

Введем величину $d^*(m,n)$, число конфигураций доменов $g \in g(m,n)$ при дополнительном условии удваивания пар вида (y,y). Перепишем определение (7) в виде

$$\phi^*(x,y)=\sum_{m,n} d^*(m,n)\,x^m y^n. \qquad (I2)$$

Выражение для статсуммы ϕ, в соответствии с (II), примет вид

$$\Phi(x,y)=\sum_{m,n} d^*(m,n)\,2^{-\mathcal{N}_{yy}(m,n)(m+n)}\,x^m y^n. \qquad (I3)$$

Следующее упрощение в вычислении ϕ следует из свойства функции ϕ, рассматриваемой как статсумма канонического ансамбля. При фиксированной температуре T основной вклад в статсумму дают конфигурации, общая граница $(m+n)$ которых такова, что энергия доменной системы $J_x m + J_y n$ лежит в узкой окрестности средней энергии системы $U(T)$. Для того чтобы воспользоваться этим свойством канонического ансамбля, представим функцию $\Phi(x,y)$ в виде

$$\phi(x,y)=\sum_{\kappa}\Phi_{\kappa}(x,y)=\sum_{\kappa,\ell}\tilde{d}^*(\ell,\kappa)\,2^{-\tilde{\mathcal{N}}_{yy}(\ell,\kappa)\cdot\ell}\,x^{\frac{(\ell+\kappa)}{2}}\,y^{\frac{(\ell-\kappa)}{2}}, \qquad (I4)$$

где введены новые переменные $\ell=m+n$, $\kappa=m-n$ и произведен переход к этим переменным в функциях d^* и $\mathcal{N}_{yy}$

$$\tilde{d}^*(\ell,\kappa)=d^*\left(\frac{\ell+\kappa}{2},\frac{\ell-\kappa}{2}\right), \qquad (I5)$$

$$\tilde{\mathcal{N}}_{yy}(\ell,\kappa)=\mathcal{N}_{yy}\left(\frac{\ell+\kappa}{2},\frac{\ell-\kappa}{2}\right). \qquad (I6)$$

Представим множество G в виде $G=\bigcup_{\kappa} G_{\kappa}$, $G_{\kappa}\cap G_{\kappa'}=0$ для $\kappa\neq\kappa'$, где G_{κ} – множество всех доменных конфигураций с фиксированным значением разности числа горизонтальных и вертикальных ребер κ. Пусть $\mathcal{N}_{\kappa}$ –среднее значение $\mathcal{N}_{yy}(g)$ по подсистеме G_{κ}, тогда

$$\mathcal{N}_{\kappa}=\sum_{g\in G_{\kappa}}\mathcal{N}_{yy}(g)\,x^{m(g)}y^{n(g)}/\Phi_{\kappa}. \qquad (I7)$$

Из приведенного выше свойства канонического ансамбля для подсистемы G_{κ} следует

$$\Phi_{\kappa}(x,y)=\sum_{\ell}\tilde{d}^*(\ell,\kappa)\,2^{-\mathcal{N}_{\kappa}\cdot\ell}\,x^{\frac{(\ell+\kappa)}{2}}\,y^{\frac{(\ell-\kappa)}{2}}, \qquad (I8)$$

поскольку в сумме (I4) можно заменить функцию $\tilde{\mathcal{N}}_{yy}(\ell,\kappa)$ ее значением $\tilde{\mathcal{N}}_{yy}(\bar{\ell},\kappa)$ при $\ell=\bar{\ell}$, где $J_x(\bar{\ell}+\kappa)/2+J_y(\bar{\ell}-\kappa)/2=U_{\kappa}(T)$, U_{κ} – средняя энергия подсистемы G_{κ}. Такая же замена подразумевается и в сумме (I7). В изотропном случае ($x=y$) выражение для статсуммы $\Phi(x)$ принимает вид

$$\Phi(x)=\sum_{\kappa}\sum_{\ell}\tilde{d}^*(\ell,\kappa)\,(x\cdot 2^{-\mathcal{N}_{\kappa}})^{\ell}=\sum_{\kappa}\Phi^*_{\kappa}(x\cdot 2^{-\mathcal{N}_{\kappa}}). \qquad (I9)$$

Таким образом, задача вычисления $\Phi(x)$ сводится к изменению масштаба перечисляющего параметра x в известной функции $\Phi^*_{\kappa}(x)$. Для нахождения явного вида $\Phi^*_{\kappa}(x)$ рассмотрим функцию $\Phi^*(xe^{i\varphi},ye^{-i\varphi})_{x=y}$. Если подействовать на эту функцию интегральным оператором $(1/2\pi)\int_0^{2\pi}(\cdot)\,e^{-i\kappa\varphi}\,d\varphi$, в сумме (I2) останутся только члены с фиксированным значением разности $m - n = k$. Поэтому, с учетом выражения (8), получим

$$\Phi_k^*(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} exp\left\{\frac{MN}{2(2\pi)^2}\iint_0^{2\pi} ln\left(1 + x^2 e^{2i\varphi} + 4x^2 e^{-2i\varphi} - 2xe^{i\varphi}\cos\alpha + 4xe^{-i\varphi}\cos\beta - 4x^2\cos\alpha\cos\beta\right) d\alpha\, d\beta\right\} e^{-ik\varphi}\, d\varphi . \qquad (20)$$

Перейдем теперь к вычислению величины $\mathcal{N}_k$. В работе П для системы доменов, описываемой статсуммой $\Phi^*(x,y)$, была вычислена функция $P_{yy}^*(x,y)$ как средняя плотность узлов, в которых доменная граница представлена парой (y,y), а именно

$$P_{yy}^*(x,y) = \sum_{g\in G}{}'' 2^{N_{yy}(g)} x^{m(g)} y^{n(g)} \Big/ \Phi^*(x,y) . \qquad (21)$$

Двойной штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется только по тем конфигурациям, которые содержат среди своих вершин начало координат, причем в начале координат доменная граница представлена парой (y,y). Явное выражение для $P_{yy}^*(x,y)$, полученное в работе П, имеет вид

$$P_{yy}^*(x,y) = (1 - A(x,y))^2 + B(x,y)\, C(x,y) , \qquad (22)$$

$$A(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_0^{2\pi} d\alpha\, d\beta \left[1 + x^2 - 2x\cos\alpha + 2y(1 - x\cos\alpha)\cos\beta\right] / D, \qquad (23)$$

$$B(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_0^{2\pi} d\alpha\, d\beta \left(1 - x\cos\alpha + 2y\cos\beta\right) / D, \qquad (24)$$

$$C(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_0^{2\pi} d\alpha\, d\beta \left[y(1 + x^2 - 2x\cos\alpha)\cos\beta + 2y^2(1 - x\cos\alpha)\right] / D, \qquad (25)$$

$$D = 1 + x^2 + 4y^2 - 2x\cos\alpha + 4y\cos\beta - 4xy\cos\alpha\cos\beta . \qquad (26)$$

В этой же работе вычислена средняя плотность узлов, принадлежащих доменной стенке для системы доменов, соответствующей статсумме $\Phi^*(x,y)$:

$$\rho^*(x,y) = \sum_{g\in G}{}' 2^{N_{yy}(g)} x^{m(g)} y^{n(g)} \Big/ \Phi^*(x,y) \qquad (27)$$

Штрих у знака суммы означает, что суммирование ведется только по конфигурациям, содержащим начало координат среди своих вершин. В работе П получено следующее выражение для этой функции:

$$\rho^*(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint_0^{2\pi} d\alpha\, d\beta \left(x^2 + 4y^2 - x\cos\alpha + 2y\cos\beta - 4xy\cos\alpha\cos\beta\right) / D . \qquad (28)$$

Воспользуемся формулами (22)-(26) и (28) для получения искомой величины $\mathcal{N}_k$. Прежде всего, введем вспомогательные функции. Определим функции $P_k^*(x,y)$ и $P_k^*(\ell)$ равенствами

$$P_k^*(x,y) = \sum_{g\in G_k}{}'' 2^{N_{yy}(g)} x^{m(g)} y^{n(g)} = \sum_{\ell} P_k^*(\ell)\, x^{\frac{(\ell+k)}{2}} y^{\frac{(\ell-k)}{2}} \qquad (29)$$

и функции $r_k^*(x,y)$ и $r_k^*(\ell)$ равенствами

$$r_k^*(x,y) = \sum_{g\in G_k}{}' 2^{N_{yy}(g)} x^{m(g)} y^{n(g)} = \sum_{\ell} r_k^*(\ell)\, x^{\frac{(\ell+k)}{2}} y^{\frac{(\ell-k)}{2}} , \qquad (30)$$

где, как и ранее, $\ell = m+n$, $K = m-n$. Определения (2I), (29) и (27), (30) связаны соотношениями

$$P^*_{yy}(x,y) = \sum_K P^*_K(x,y) / \Phi^*(x,y); \tag{3I}$$

$$\rho^*(x,y) = \sum_K r^*_K(x,y) / \Phi^*(x,y). \tag{32}$$

Определим соответствующие величины без звездочки:

$$P_{yy}(x,y) = \sum_K P_K(x,y)/\Phi(x,y) = \sum_K \sum_{g\in G_K}'' x^{m(g)} y^{n(g)} / \Phi(x,y); \tag{33}$$

$$\rho(x,y) = \sum_K r_K(x,y)/\Phi(x,y) = \sum_K \sum_{g\in G_K}' x^{m(g)} y^{n(g)} / \Phi(x,y); \tag{34}$$

$$P_K(x,y) = \sum_\ell P_K(\ell)\, x^{(\ell+K)/2} y^{(\ell-K)/2}; \tag{35}$$

$$r_K(x,y) = \sum_\ell r_K(\ell)\, x^{(\ell+K)/2} y^{(\ell-K)/2}. \tag{36}$$

Заметим теперь, что из выражений (29) и (35) на основании (A) следует равенство

$$P_K(\ell) = \left(2^{-\tilde{\mathcal{N}}_{yy}(\ell,K)(\ell-1)-1}\right) P^*_K(\ell). \tag{37}$$

Отличие (37) от аналогичной формы в (I4) состоит в том, что суммирование с двойным штрихом в (29) отбирает конфигурации $g \in G_K$,у которых число пар (y,y) на $1-\tilde{\mathcal{N}}_{yy}(\ell,K)$ больше, чем $\tilde{\mathcal{N}}_{yy}(\ell,K)$, так как в начале координат пара (y,y) находится с достоверностью. Сравнение (30) с (36) дает равенство

$$r_K(\ell) = 2^{-\tilde{\mathcal{N}}_{yy}(\ell,K)\cdot\ell}\, r^*_K(\ell). \tag{38}$$

Рассуждая так же, как и при получении формулы (I8), с помощью (37) и (38) получим в изотропном случае ($X = y$)

$$P_K(x) = \sum_\ell P^*_K(\ell)\, x^\ell 2^{-\mathcal{N}_K(\ell-1)-1} = 2^{\mathcal{N}_K-1} P^*_K(x\cdot 2^{-\mathcal{N}_K}); \tag{39}$$

$$r_K(x) = \sum_\ell r^*_K(\ell)\, x^\ell 2^{-\mathcal{N}_K\cdot\ell} = r^*_K(x\cdot 2^{-\mathcal{N}_K}). \tag{40}$$

Еще раз воспользуемся тем обстоятельством, что основной вклад в статсумму Φ , а следовательно, и в суммы (39) и (40) происходит от конфигураций $g \in G$ с длиной доменной границы, равной $\bar{\ell}$. Тогда искомое значение $\mathcal{N}_K$ равно

$$\mathcal{N}_K(x) = P_K(x)/r_K(x) = 2^{\mathcal{N}_K-1} P^*_K(x\cdot 2^{-\mathcal{N}_K}) / r^*_K(x\cdot 2^{-\mathcal{N}_K}). \tag{4I}$$

Явное выражение для функции P^*_K получается из (8), (22)-(26), (3I) с использованием того же приёма, что и при выводе формулы (20):

$$P^*_K(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P^*_{yy}(xe^{i\varphi}, xe^{-i\varphi})\, \Phi^*(xe^{i\varphi}, xe^{-i\varphi})\, e^{-iK\varphi} d\varphi. \tag{42}$$

Аналогично, формулы (8), (28), (32) приводят к выражению

$$r^*_K(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho^*(xe^{i\varphi}, xe^{-i\varphi})\, \Phi^*(xe^{i\varphi}, xe^{-i\varphi})\, e^{-iK\varphi} d\varphi. \tag{43}$$

Выражения (I9) и (4I) с учетом явного вида функций Φ^*_K, ρ^*_K ,

r_k^* , определенного формулами (20), (22)-(26), (28), (42), (43), представляют собой систему двух трансцендентных уравнений относительно Φ и $\mathcal{N}_k$. Наличие в интегралах (20), (42), (43) фактора $exp(MN\cdots)$ дает основание для попыток вычислить эти интегралы методом перевала. В настоящей статье мы ограничимся приближенным решением системы (I9), (4I) для того, чтобы на упрощенном примере продемонстрировать эффективность изложенного метода.

Предположим, что вероятность появления пары вида (α,β) в узле, принадлежащем доменной границе, равна для всех $g \in G$. В принятых обозначениях (см. (9)) это значит, что

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta}(g) = \mathcal{N}_{\alpha\beta} \quad \text{для всех } g \in G . \tag{44}$$

В этом случае величина $\mathcal{N}_k$ не зависит от индекса k и мы можем положить

$$\mathcal{N}_k = \mathcal{N} , \tag{45}$$

где $\mathcal{N}$ зависит теперь только от температуры системы. В приближении (45) отпадает необходимость представлять статсумму в виде (I4). Поэтому равенства (I9) и (4I) упрощаются:

$$\Phi(x) = \phi^*(x \cdot 2^{-\mathcal{N}}) , \tag{46}$$

$$\mathcal{N} = 2^{\mathcal{N}-1} P^*_{yy}(x \cdot 2^{-\mathcal{N}}) / \rho^*(x \cdot 2^{-\mathcal{N}}) , \tag{47}$$

где $P^*_{yy}(x \cdot 2^{-\mathcal{N}}) \equiv P^*_{yy}(x 2^{-\mathcal{N}}, x 2^{-\mathcal{N}})$, $\rho^*(x 2^{-\mathcal{N}}) \equiv \rho^*(x 2^{-\mathcal{N}}, x 2^{-\mathcal{N}})$.
Введем переменную $z = x\, 2^{-\mathcal{N}}$ и заметим, что в изотропном случае $(x = y)$ статсумма $\phi^*(z)$ имеет критическую точку z = I/3. Тогда выражения для критического значения принимают вид

$$x_c = (1/3)\, 2^{\mathcal{N}} ; \tag{48}$$

$$\mathcal{N} \cdot 2^{1-\mathcal{N}} = P^*_{yy}(1/3) / \rho^*(1/3) . \tag{49}$$

Вычисление интегралов (23)-(25) в случае $x = y = 1/3$ дает

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{3\sqrt{5}}{5\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{5}}{5} ; \tag{50}$$

$$B = \frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{5}}{5\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{5}}{5} ; \tag{5I}$$

$$C = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \operatorname{arctg} 2\sqrt{2} - \frac{7\sqrt{5}}{30} + \frac{7\sqrt{5}}{15\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{5}}{5} , \tag{52}$$

так что $P^*_{yy}(1/3) = (1-A)^2 + BC$. Выражение для $\rho^*(1/3)$ получим, сравнивая (24) и (28):

$$\rho^*(1/3) = 1 - \frac{B}{2} . \tag{53}$$

Таким образом, для величины $1/x_c$ в приближении (45) получаем

$$1/x_c = 2.62729..., \tag{54}$$

что согласуется с расчетами из таблицы I с точностью 0,5%.

Литература

1. J.M. Hammersley. Proc. Camb. Phil. Soc., 53,642,1957.
2. J.M. Hammersley. Proc. Camb. Phil. Soc., 57,516,1961.
3. M.E. Fisher, M.F. Sykes. Phys. Rev., 114,45,1959.
4. B.J.Hiley,M.F. Sykes.J.Chem. Phys., 34,1531,1961.
5. H.N. Temperley. Phys. Rev., 103,1,1956.
6. N.A. Kramers, G.H. Wannier. Phys. Rev., 60,252,1941.
7. L. Onsager. Phys. Rev., 65, 117, 1944.
8. M.F. Sykes, A.J. Guttman, M.G. Watts, P.D. Roberts. J. Phys., A5, 653, 1972.
9. F.T. Wall, J.J. Erpenbeck. J. Chem. Phys., 30, 634, 1959.
10. В.Б. Приезжев. ОИЯИ, Р17-9633, Дубна, 1976.
11. В.Б. Приезжев. ОИЯИ Р17-9632, Дубна, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 июля 1976 г.