

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P17-99-275

Е.Н.Букина\*, В.М.Дубовик

О ВЫСШИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЯРИЗАЦИЯХ  
И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЯВЛЕНИЯХ  
В СИСТЕМАХ ОБЪЕМЛЮЩИХ ТОРОВ

Направлено в журнал «Измерительная техника»

\*E-mail: bukina@thsun1.jinr.ru

1999

О высших векторных поляризациях и квазистационарных явлениях в системах объемлющих торов

Развивается методика мультипольных параметризаций дипольных сред: электрической, магнитной, полярной и аксиальной тороидных. Найдены формы взаимодействия всех базисных диполей с неоднородными и/или переменными внешними полями. Приведен вид собственных полей или потенциалов для каждого базисного диполя. Указаны способы компенсации (экранирования) продольно-поперечного векторного потенциала (ППВП) в ограниченных объемах. Обсуждается последовательность электромагнитной «распаковки» систем объемлющих торов (суперторов).

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

On Highest Vector Polarizations and Quasistationary Phenomena in the Systems of Enveloping Tori

The procedure of multipole parametrizations of dipole media: electric, magnetic, polar, and axial toroidal, is developed. The forms of interactions of all basic dipoles with ununiform and/or alternative external fields are found. The proper fields or potentials for each basic dipole are given. The method of compensation (shielding) of a longitudinal-transverse vector potential (LTVP) in limited volumes is pointed out. The succession of electromagnetic «unpacking» of the systems of enveloping tori is discussed.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

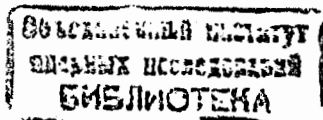
# 1 Введение

Начиная с 1984 г. теоретики из школы В.Л. Гинзбурга - Л.В. Келдыша в серии работ стали внедрять понятие тороидного диполя в рамки квантовой микроскопической теории магнитных сред. А в 1986 г. В.М. Дубовик с сотрудниками [1] ввели понятие тороидного диполя электрического происхождения как замкнутой круговой цепочки электрических диполей. Такой тороидный диполь может возникать, например, как следствие ориентационного фазового перехода в среде электрических диполей, но не как базисный диполь в электродинамике точечных зарядов Максвелла - Лоренца. Несколько лет спустя эффекты, которые были объяснены впоследствии М.А. Марценюком и Н.М. Марценюком [2] как вызываемые электрическими тороидными поляризациями, были найдены экспериментально Н.А. Толстым и А.А. Спартаковым [3].

Таким образом, в рамках электродинамики сплошных сред были определены уже четыре фундаментальные поляризации, исчерпывающих все варианты поведения при пространственно-временных отражениях, расширилось понятие магнитных кристаллических симметрий, были найдены конкретные вещества, обладающие тороидными поляризациями [4]-[6].

Развитие электродинамики тороидных моментов привело к тому, что электромагнетизм, как теория, описывающая среды, превратилась по сути в электро-тороидо-магнетизм, а ряд магнитных кристаллов, например, обладающих магнитоэлектрическими свойствами, кристаллографы теперь называют тороиками (см., напр., [7] и ссылки там). Если говорить точнее, то тороидная поляризация и в кристаллических телах, и в магнитных жидкостях обычно сопутствует намагниченности [8, 9]. Такие сочетания характерны, например, для класса магнитных кристаллов, называемых слабыми ферромагнетиками [10].

Несколько свойств тороидных диполей вносят новое качество в описание физики электромагнитных явлений. Прежде всего это обеспечивается возможностями их моделирования. Мы можем, например, представить тороидный диполь магнитного происхождения в виде токовой конфигурации и определить величину его момента через полный ток  $I$ , текущий по поверхности тора  $T = IV$ , где  $V$  - объем тора. Или, этот момент можно выразить через напряженность магнитного поля, заключенного в торе, как  $T = BsS$ , где  $s$  - площадь меридионального сечения тора, а  $S$  - площадь сечения тора по экватору и, в конечном итоге, рассматривать тороидный диполь как элементарный замкнутый вихрь потока магнитного поля с моментом  $T = \Phi S$ . Подчеркнем, и это будет очень важно в дальнейшем, что и идеальный тороид, и статический вихрь не со-



здают во внешнем пространстве ни электрического, ни магнитного поля, а только; введенный В. Францем еще в 1939 г., свободнополевой (free-field) или продольно-поперечный векторный потенциал (ППВП) [11]. Наблюдаемым его следствием является знаменитый эффект Ааронова-Бома.

Весьма интересны превращения внешних полей тороидных диполей при изменении их величин. Например, если ток в обмотке тороидного соленоида растет линейно, то линии "пустого" францевского потенциала превращаются в дипольное статическое электрическое поле. Таким образом, тороидный диполь в этом режиме имитирует точечный электрический диполь и может описываться двумя эффективными зарядами. Вследствие этого, подмеченное И.С. Желудевым еще в 1969 г. [12] тороидальное (круговое) упорядочение магнитных моментов атома кислорода в элементарной кристаллической ячейке кубического перовскита, приводит к перераспределению энергии между эффективными зарядовым и тороидными диполями на межатомном уровне, и, в конечном итоге, позволяет объяснить переход кристалла перовскита в аномальную диэлектрическую фазу.

Вернемся к различию между мультипольными разложениями в электродинамике Максвелла - Лоренца и в теории сред. В последней элементарной базисной единицей служит не заряд, а какой-либо диполь: электрический, магнитный или тороидный. С формальной точки зрения это приводит к тому, что мультипольному разложению подвергается уже не электрический ток, а плотность распределения соответствующей поляризации среды и материальные уравнения для них не являются динамическими, как условия сохранения тока в электродинамике Максвелла-Лоренца. Таким образом, структура этих разложений может быть более простой, если среда - линейна. Однако, если среда нелинейна и обладает не только одной поляризацией (тому имеется множество примеров: ферромагнетики, сегнетомагнетики и т.д.), то структура мультипольных разложений становится сложной [13].

Теперь коснемся свойств элементарных тороидных диполей. Во внешнем поле диполь магнитного происхождения ориентируется по току смещения или конвективному току, протекающему в месте его расположения, а диполь электрического происхождения ориентируется по направлению производной по времени внешнего магнитного поля. Таким образом, обе эти системы по совокупности их внутренних и внешних свойств можно назвать магнитоэлектрическими. Моделирование этих систем может помочь конструированию новых приборов, развитию новых принципов экранирования и техники обнаружения в средах вихревых структур.

Мы введем здесь полный набор базисных диполей для физически наиболее значимых дипольных сред [4]. Далее, исходя из математического

факта их существования, укажем ряд возможных необычных функций отклика вещества, находящегося в конденсированном состоянии, на неоднородные и/или динамические электрические и магнитные поля. Обсудим мультипольные разложения высших поляризаций. В этом отношении данная статья является развитием теоретических работ [1] и [8]. В двух последующих частях данной работы указаны принципиальные схемы экранирования ППВП, механизмы его проявления как эффективной статической электрической силы в веществе и последовательность "распаковки" свободнополевых потенциалов в системах объемлющих тором.

## 2 Мультипольные разложения поляризаций дипольных сред и взаимодействия (псевдо) векторных диполей с внешними полями

Представим, что имеется некая "среда" (система) непрерывно распределенных элементарных электрических диполей, которая описывается ограниченной в пространстве функцией  $\mathbf{d} : \mathbf{r} \in V$ , в общем случае зависящей от времени. Допустим, что в такой среде по различным причинам - вследствие внутренних взаимодействий или под влиянием внешних полей - могут возникать и выстраиваться агрегаты различных конфигураций, состоящие из конечного числа элементарных диполей. Рассмотрим картину возможных взаимодействий мультипольных моментов, описывающих такую систему, с внешним неоднородным электрическим полем. Общая формула мультипольного разложения энергии взаимодействия распределения векторной плотности с внешним полем приведена в [5], App.E. Используя ее, выпишем здесь в явном виде для нашего случая только первые члены разложения:

$$\begin{aligned} W = & - \int_V \mathbf{d}(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3r = \frac{1}{6} \overline{r_0^2} \operatorname{div} \mathbf{E} - \mathbf{Q} \mathbf{E} - \mathbf{T}^{(d)} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \\ & - \mathbf{P}^{(d)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \frac{1}{2} Q_{ij} (\nabla_i E_j + \nabla_j E_i) - T_{ij}^{(d)} \nabla_i (\operatorname{rot} \mathbf{E})_j + \\ & + \frac{1}{10} \overline{(r_d^{(2)})} \cdot \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} + \dots \Rightarrow -\mathbf{Q} \mathbf{E} - \mathbf{T}^{(d)} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{P}^{(d)} (\nabla \rho - \Delta \mathbf{E}) + \\ & + \dots \Rightarrow -\mathbf{Q} \mathbf{E} + \mathbf{T}^{(d)} \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{P}^{(d)} (\dot{\mathbf{j}} - \ddot{\mathbf{E}}) + \dots, \quad (1) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{Q} = \int \mathbf{d}(\mathbf{r}) d^3r$  - обычный полный электрический дипольный момент системы,  $\mathbf{T}^{(d)} = \frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{d}(\mathbf{r}) d^3r$  - аксиальный тороидный дипольный момент системы,  $\mathbf{P}^{(d)} = \frac{1}{10} \int [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) - 2r^2 \mathbf{d}] d^3r$  - полярный полоидальный

дипольный момент. Вместе они составляют базисную тройку векторов, каждый из которых генерирует все высшие мультипольные моменты соответствующего семейства по обычным рецептам. Кроме них в (1) имеются:  $\overline{r_0^2} = \int \mathbf{r} \mathbf{E} d^3r$  - скалярный момент, который в разложении тока соответствует временной производной от среднеквадратичного радиуса заряда, т.е. двойному сферическому слою:  $\overline{r_d^{(2)}} = \int [2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) + r^2 \mathbf{E}] d^3r$  - среднеквадратичный радиус продольной части дипольного момента  $\mathbf{Q}$ , который образуется двойным цилиндрическим слоем диполей;  $Q_{ij}$  и  $T_{ij}^{(d)}$  - электрический и тороидный квадрупольные моменты, определяемые по обычным правилам. Из формулы (1) видим, что с постоянным неоднородным электрическим полем момент  $\mathbf{P}^{(d)}$  может взаимодействовать, как среднеквадратичный радиус момента  $\mathbf{Q}$ . Отметим, что первый и последний параметры связаны с разложением максвелловской скалярной плотности распределения зарядов  $\rho^{свчз}(\mathbf{r}) = \text{div} \mathbf{d} \equiv \text{div} d_{||}(\mathbf{r})$ , в то время как тороидная и полоидальная характеристики в стандартные уравнения Максвелла вообще не входят (см. [1] и [5]). Рисунки, иллюстрирующие параметры данного разложения приведены в [13, 14].

Напомним, что в полном разложении ([15], §4) выделение тороидных моментов (и их радиусов) происходит не за счет сохранения электрического тока (см. [5] App.E), а в результате выделения кулоновских характеристик в поперечной части тока. Поэтому поучительно проследить, как в общей формуле мультипольного разложения энергии взаимодействия восстанавливается простейший в формуле (1) вклад  $\mathbf{Q}\mathbf{E}$ . Это достигается следующими формальными действиями:

$$\begin{aligned} & -[l^{-1} \dot{Q}_{lm} \Delta^{-1} Y_{lm}(\nabla)(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{D}}) - \dot{Q}_{lm} Y_{lm}(\nabla) \Delta^{-1} \text{div} \mathbf{A}]_{l=1, n=0} \Rightarrow \\ \Rightarrow & -\mathbf{Q} \Delta^{-1} (\dot{\mathbf{D}} - \nabla \text{div} \mathbf{A}) = -\dot{\mathbf{Q}} \Delta^{-1} [\text{rot rot} \mathbf{A} - \text{grad div} \mathbf{A}] = \quad (2) \\ & = -\dot{\mathbf{Q}} \Delta^{-1} \Delta \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{Q} \dot{\mathbf{A}} = -\mathbf{Q} \mathbf{E}, \end{aligned}$$

в результате которых, как мы видим, поперечный и продольный вклады складываются в  $\mathbf{Q}\mathbf{E}$ <sup>1</sup>. Естественно, выражение (1) легко получить и непосредственно, отыскивая неприводимые представления в операторах типа  $(r_i \dots \cdot r_k)(\nabla_i \dots \cdot \nabla_k)$  так, как это делается в §3 [8].

<sup>1</sup> Попадание продольных кулоновских характеристик в разложение поперечной части тока объясняется вырождением понятий продольности и поперечности, когда мы сохраняем нулевые граничные условия на поверхности образца в процессе (предельного) перехода к мультипольному описанию электромагнитных свойств образца. А именно, при изометрическом стягивании объема образца в точку, приводящем к бесконечному возрастанию описывающих его плотностей, единственная возможность сохранить нулевые граничные условия на его поверхности - это считать, что  $\mathbf{j}|_{\delta V} \equiv (\mathbf{j}_{||} + \mathbf{j}_{\perp}) \rightarrow 0$  при  $V \rightarrow 0$ , т.е.  $\mathbf{j}_{||} = \infty = -\mathbf{j}_{\perp}$  при  $V \rightarrow 0$  (см. [15] и математическое обоснование в терминах обобщенных функций в [16]).

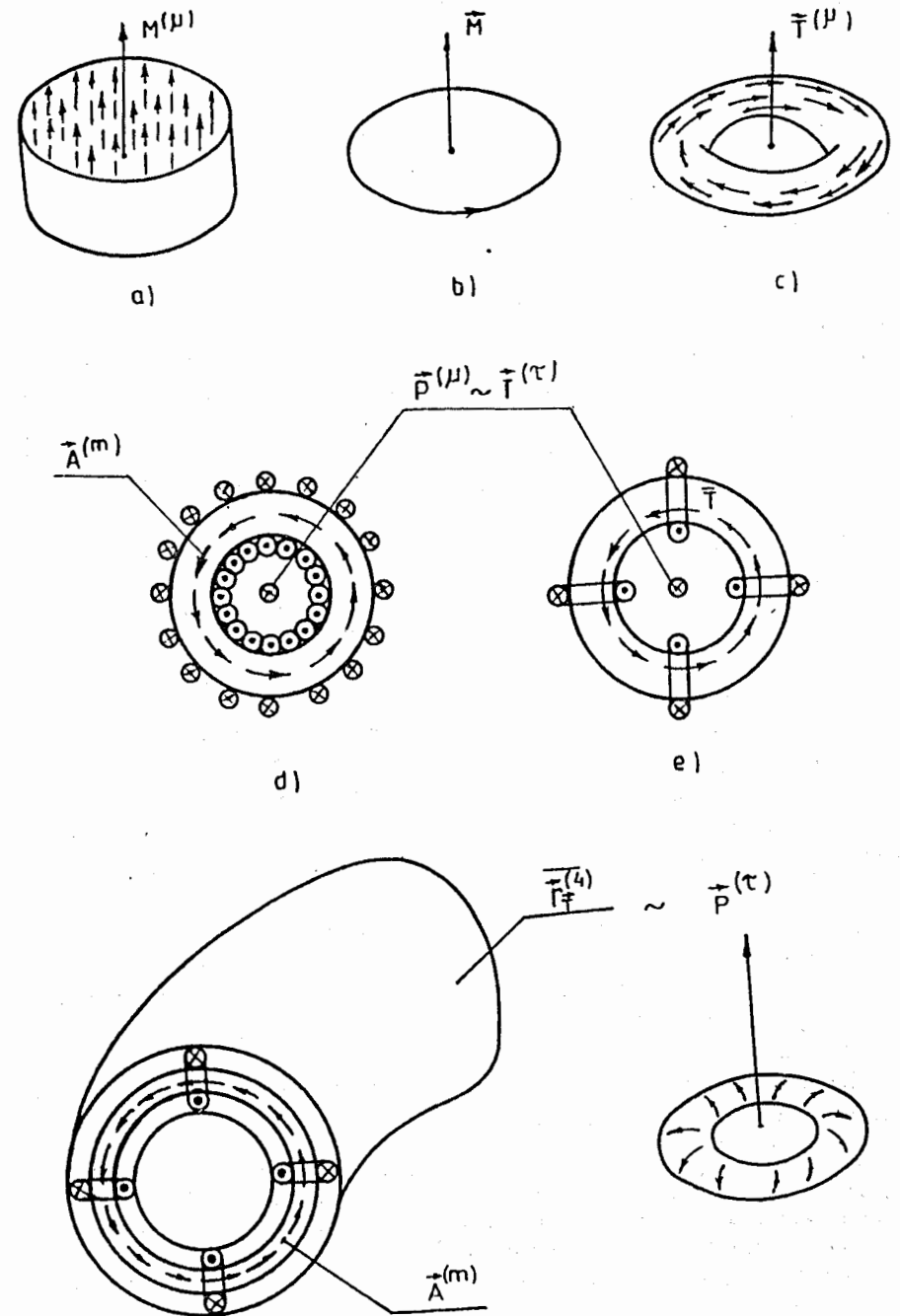


Рис. 1

Если же взаимодействие  $dE$  заменить на  $\mu B$ , то возможна идентификация всех членов мультипольного разложения плотности намагниченности с токовыми мультипольными моментами на основе гипотезы Ампера. Действительно, согласно последней  $Q$  превращается в магнитный дипольный момент  $M$  (Рис.1а), характеризующий эквивалентную рамку с током (Рис.1б);  $T^{(d)}$  - в полярный тороидный диполь  $T^\mu$  (Рис.1с), эквивалентный тороидному соленоиду;  $P^{(d)}$  - в аксиальный полоидальный диполь, связанный со среднечетвертичным радиусом токового магнитного дипольного момента  $r_\mu^{(d)}$ , что разглядеть труднее (Рис.1д и Рис.1е)<sup>2</sup>. Заметим, что в этом разложении радиусы вообще не могут давать вклада в энергию взаимодействия с внешним магнитным полем, так как  $\text{div} H = 0$ . В результате формула разложения энергии взаимодействия распределения плотности магнитных диполей с внешним неоднородным магнитным полем имеет более простой вид, чем (1):

$$\begin{aligned} W &= - \int \mu(\mathbf{r}) H(\mathbf{r}) d^3 r = -MH - T^{(\mu)} \text{rot} H - \\ &P^{(\mu)} \text{rot} \text{rot} H - \frac{1}{2} M_{ij} (\nabla_i H_j + \nabla_j H_i) - T_{ij}^{(\mu)} \nabla_i (\text{rot} H)_j + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow -MH - T^{(\mu)} \dot{E} - P^{(\mu)} (\text{rot} \dot{j} - \ddot{H}) \\ &\Rightarrow -MH - T^{(\mu)} \text{rot} H + P^{(\mu)} \Delta H^{\text{своб}} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Таким способом можно идентифицировать и все высшие мультипольные моменты разложения плотности намагниченности по токовым моментам. Поэтому, с одной стороны, разложение (3) кажется менее интересным, чем разложение распределения электрических диполей. Однако, с другой стороны, если носителями магнитных моментов являются спиновые частицы, например, нейтроны, то мультипольное разложение распределения их магнитных моментов (например, в ядре или в нейтронной звезде) получает первичный смысл (если не переходить к картине распределения заряженных кварковых токов внутри, например, самого нейтрона).

Разложения, подобные (1) и (3), очевидно можно выполнить для двух оставшихся фундаментальных (тороидных) дипольных распределений  $\tau(\mathbf{r})$  и  $g(\mathbf{r})$ .

Выражение для энергии взаимодействия с переменным электрическим полем (например, с током смещения) системы, характеризующейся

<sup>2</sup> Может возникнуть вопрос, почему в разложении (3) возник сразу четвертичный радиус, а не квадратичный. Ответ таков: при представлении моментов разложены  $\mu(\mathbf{r})$  по моментам  $j(\mathbf{r})$  на место низших моментов становятся высшие, а число элементарных составляющих в них растет как  $2^l, l = 1, 2, 3, \dots$ , так что  $2^l = 2, 4, 8, 16, \dots$ , в то время как для радиуса рост числа составляющих определяется зависимостью  $2n = 2, 4, 6, 8, \dots, n = 1, 2, 3, \dots$

распределением тороидной плотности  $\tau(\mathbf{r})$  (тороидным упорядочением), имеет вид, аналогичный (1), с заменой  $E \rightarrow \dot{E}$ :

$$\begin{aligned} W &= - \int \tau(\mathbf{r}) \dot{E}(\mathbf{r}) d^3 r = -T \dot{E} - T^{(\tau)} \text{rot} \dot{E} - P^{(\tau)} \text{rot} \text{rot} \dot{E} - \\ &-\frac{1}{2} Q_{ik}^{(\tau)} (\nabla_i \dot{E}_j + \nabla_j \dot{E}_i) - T_{ij}^{(\tau)} \nabla_i (\text{rot} \dot{E})_j + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow -T(j + \text{rot} B) - T^{(\tau)} \text{rot} (\dot{j} + \text{rot} \dot{H} + P^{(\tau)} (\ddot{E} - \Delta \dot{E} - \ddot{j})) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -T \text{rot} H^{\text{своб}} - T^{(\tau)} \Delta \text{rot} E^{\text{своб}} + P^{(\tau)} \Delta \text{rot} H^{\text{своб}} + \dots = \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь учтено то, что  $\text{div} \dot{E} = \text{div} \text{rot} H \equiv 0$  для свободных полей. Знак перехода (стрелка) в (4) и (5) в последней строке указывает на замену произвольного внешнего поля волновым. Наличие лапласиана в каком-либо из конкретных вкладов означает отсутствие собственного внешнего поля (потенциала) у соответствующего дипольного момента (см. Введения в работах [15] и [17] и в [8] App.F).

При аксиальном тороидном упорядочении первые члены разложения энергии взаимодействия плотности  $g(\mathbf{r})$  с переменным магнитным полем имеют вид, аналогичный (3), с заменой  $H$  на  $\dot{H}$ :

$$\begin{aligned} W &= - \int g(\mathbf{r}) \dot{H}(\mathbf{r}) d^3 r = -G \dot{H} - T^{(g)} \text{rot} \dot{H} - P^{(g)} \text{rot} \text{rot} \dot{H} - \\ &-\frac{1}{2} G_{ij}^{(g)} (\nabla_i \dot{H}_j + \nabla_j \dot{H}_i) - G_{ij}^{(g)} \nabla_i (\text{rot} \dot{H})_j + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow G \text{rot} E + T^{(g)} (\ddot{j} - \ddot{E}) + P^{(g)} (j - \text{rot} \ddot{E}) + \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow -G \text{rot} E - T^{(g)} \Delta \text{rot} H - P^{(g)} \Delta \text{rot} E + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнивая выражения (4) с (3), а (5) с (1), находим в них аналоги по типу взаимодействия. Прежде всего, в разложениях видна последовательная эскалация операций взятия пространственных и временных производных от полей, которые стоят под интегралом в первоначальном локальном взаимодействии плотностей распределений. При этом первый член разложения, естественно, имеет форму подынтегрального выражения, в котором функция распределения электромагнитных свойств образца вещества заменена ее моментом нулевого порядка - попросту, полным объемным от нее интегралом. Далее, для распределений  $\mu(\mathbf{r})$  и  $d(\mathbf{r})$  - моменты первого порядка по  $\mathbf{r}$  имитируют (в смысле гипотезы Ампера) токовые тороидные моменты от плотностей токов электрических и магнитных зарядов соответственно (5)<sup>3</sup>. Следовательно, эти моменты

<sup>3</sup> С точки зрения геометрии эти тороидные моменты в токовой картине лучше было бы называть полоидальными, но мы будем придерживаться устоявшейся терминологии, впервые введенной в работах [15].



$T^{(d)}, T^{(\mu)}, T$  и  $G$  создают дипольные распределения электрического [18] и (экспериментально наблюдаемого через эффект Бома-Ааронова) магнитного продольно-поперечного вектор-потенциалов [11]. Соответственно, члены первого порядка в разложениях (4) и (5) совпадают с членами второго порядка в разложениях (3) и (1):  $-T^{(\tau)} \sim P^{(\mu)}, -T^{(g)} \sim P^{(d)}$ . Первая пара из этих дипольных моментов содержит статический магнитный вектор-потенциал внутри тороида, поток которого направлен коллинеарно широтам на поверхности тороида, вторая – дуальный электрический вектор-потенциал [19]. Вне (идеальных) тороидов эти потенциалы строго равны нулю. Таким образом, на соответствующих этим моментам (топологически нетривиальных) тороидах интерференционных эффектов типа Бома-Ааронова возникать уже не будет.

Из формул (4) и (5) видно, что момент  $P^{(\tau)}$  является глобальной характеристикой двуслойных токовых торов, надетых на тор большего размера [19] (см. также сноску<sup>3</sup>). Глобально такая конструкция эквивалентна среднечетвертичному радиусу токового момента  $T$ . Вследствие этого распределение потенциала  $A^{(m)}$  содержится в такой системе только в “зазоре” между двумя (конгруэнтными) двуслойными торами [5].

Принцип дальнейших переразложений становится ясным. Он может быть применен для построения базисов в средах, состоящих из диполей  $T^{(\tau)}$  или  $T^{(g)}$ . Однако с точки зрения внешнего наблюдателя полученные конфигурации вряд ли будут интересны, т.к. даже внутри них будут отсутствовать направления глобальной ориентации потоков вектор-потенциалов  $A^{(m)}$  или  $A^{(e)}$ . С технической же точки зрения такие конфигурации могут оказаться весьма полезными. Не исключено, что подобные структуры могут имитировать электромагнитное строение биомолекул [17].

### 3 Способы экранирования свободнополевых потенциалов. Проявление ППВП как эффективной электрической силы

Исходя из конструкций, рассмотренных ранее, сделаем несколько довольно очевидных утверждений о возможности компенсации (или экранировки) магнитных полей и ППВП. В научно-технической литературе подобное утверждение применительно к ППВП нам не встречалось.

Задача экранирования или компенсации электрического, в частности кулонова, поля решается на основании различных физических подходов с помощью множества электротехнических устройств. Проблема экраниро-

вания, точнее местной компенсации, магнитного поля неизмеримо сложнее, поскольку в природе отсутствуют свободные магнитные заряды.

Очевидно, что в некотором ограниченном объеме однородное магнитное поле можно компенсировать, например, с помощью обычного прямолинейного соленоида, а круговое с помощью тороидального. В самом деле, путем выбора тока соответствующего направления и регулирования его силы можно добиться того, чтобы, например, внутри тороидального соленоида компенсировалось магнитное поле, создаваемое постоянным током, текущим в прямолинейном проводнике, который расположен вдоль оси аксиальной симметрии этого соленоида.

Во многих работах делается странное утверждение о невозможности экранировки ППВП. Поскольку такой потенциал не дает вклада в силу Лоренца, то автоматического (естественного) экранирования ППВП за счет свойств поляризации какой-либо физической среды, то есть через функцию отклика последней на этот потенциал, действительно трудно ожидать (см. вторую часть данного параграфа). Однако его компенсация в ограниченном объеме осуществляется точно так же, как и компенсация магнитного поля.

Очевидно, что цилиндр, на который надеты тороидальные соленоиды, будет содержать внутри себя приблизительно однородные распределения ППВП. Таким образом, с помощью такой конструкции можно добиться экранирования объектов “в поле” однородного внешнего ППВП. Столь же очевидно, что азимутали осесимметричного распределения ППВП вокруг прямолинейного (очень длинного) соленоида можно компенсировать в ограниченном объеме, располагая вокруг соленоида кольцо, на которое плотно надеты тороидальные соленоиды (см. Рис. 1е).

Все это было бы пустой игрой воображения, если бы не существовало задачи детального изучения природы эффекта Ааронова-Бома, уже перспективного даже для технологических применений. Действительно, если мы построим экспериментальную установку, в которой сможем регулировать величину компенсации ППВП, создаваемого, например, длинным прямолинейным соленоидом и, таким образом, научимся плавно сдвигать интерференционную картину в двухщелевом варианте опыта Ааронова-Бома, это будет очевидным подтверждением опосредования взаимодействия между электронами пучка и соленоидом через ППВП.

Еще более наглядным можно сделать это явление в опыте с возникновением сверхпроводящего тока в металлическом кольце (или цилиндре), надетом на прямолинейный очень длинный (лучше круговой с большим радиусом) соленоид – предложение Лианга и Динга [20]. Охлаждение такого кольца до температуры сверхпроводящего перехода вызовет появление в нем тока, компенсирующего нецелочисленность в единицах флюксо-

нов магнитного потока в соленоиде. За счет этого тока подобное мезоскопическое устройство как бы "подгоняет себя" под модель элементарного вихря Абрикосова, в котором флюксон конфинируется круговыми микроскопическими токами сверхпроводимости внутри образца. В данном случае, поскольку экспериментальное устройство имеет мезоскопические размеры, мы вправе задаться вопросом: какие электромагнитные "силы" заставляют электроны начать движение в кольце? Ясно, что ни энергия, ни момент импульса от центрального соленоида в кольцо в этом опыте не передаются, но в то же время упорядочение тепловых движений электронов должно происходить под действием какого-то эффективного электрического поля.

Рассмотрим на простейшем примере, каким представляется ППВП электрону, совершающему хаотические движения в материале кольца, т.е. электрону, находящемуся в собственной системе отсчета, которая является неинерциальной относительно источника потенциала - соленоида. Действительно, помимо кулоновских потенциалов ионов решетки и соседних электронов, электроны проводимости в каждый данный момент времени испытывают воздействие магнитных полей, создаваемых спинами и конвективными токами. Заменяем кусочек криволинейной траектории данного электрона проводимости приближенно на круговую. Тогда, благодаря давней работе Л. Шиффа [21] (см. также [22]), мы можем сделать локальное преобразование векторного и скалярного потенциалов  $\mathbf{A}$  и  $\phi$ , действующих на электрон, из системы покоя во вращающуюся систему координат:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}, \quad \phi' = \phi - \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ , а  $\boldsymbol{\omega}$  - угловая скорость вращающейся системы координат. В рассматриваемом нами конкретном случае  $\mathbf{A}$  имеет единственную ненулевую компоненту  $A = \hat{n}_\varphi / r$  при  $\text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B} \equiv 0$  вне центрального соленоида, а случайная по величине угловая скорость  $\boldsymbol{\omega} = -1/2 \text{rot} \mathbf{v}$ , где  $\mathbf{v}$  - приближенно равномерная скорость выделенного электрона на криволинейном участке пути.

Из формулы (6) следует общее выражение для определения полей во вращающейся системе координат:

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad \mathbf{E}' = -\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right)' - \nabla \phi + \nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}). \quad (7)$$

Первый член для  $\mathbf{E}'$  в (7), который может возникать из-за нестационарности источника, отсутствует у нас по условию постановки эксперимента, равно как и  $\mathbf{B}' = \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \equiv 0$  в соответствии с определением ППВП.

Третий же член в выражении для  $\mathbf{E}'$  представим следующим образом:

$$\nabla(\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{V}. \quad (8)$$

В этой формуле третий член выпадает, т.к.  $\text{rot} \mathbf{A} = 0$ , а остальные исчезнут в процессе усреднения случайных величин  $\mathbf{V}$  и  $\text{rot} \mathbf{V}$ , когда мы попытаемся найти глобальный эффект.

Совсем иная картина возникает, если рассматривать данную кинематику в процессе охлаждения кольца. Напомним, что именно в переходных процессах устанавливаются поля, которые потом лишь поддерживаются стационарными токами. При всестороннем охлаждении кольца возникают градиенты скорости электронов, направленные к внутренней азимутальной оси кольца от его поверхности. Однако, если теплота уходит во внешнюю среду из системы кольцо - соленоид, то поток теплоты в конечном итоге в основном направлен к охладителю по радиусам, проведенным от точки пересечения соленоида плоскостью, в которой расположено кольцо. Для упрощения картины будем считать, что весь теплообмен происходит только в упомянутой плоскости, т.е. градиент скорости  $\mathbf{V}$  направлен строго по  $\mathbf{r}$ . Тогда эта неусредняющаяся, неизотропная добавка к скоростям  $\delta \mathbf{V}$  даст следующую эффективную силу, действующую на электроны проводимости:

$$e\mathbf{E}^{eff} = (\delta V_r \nabla_r) \frac{\hat{n}_\varphi}{r} = -e\delta V_r \frac{\hat{n}_\varphi}{r^2}. \quad (9)$$

С динамической точки зрения, мы должны рассматривать не скорости, а токи. Тогда надо учесть, что в процессе перехода в сверхпроводящее состояние уменьшается плотность нормальных электронов и увеличивается плотность сверхпроводящих электронов. В сверхпроводящем состоянии электроны в составе куперовских пар переходят в режим когерентного ламинарного течения вдоль кольца [23], а потому более не подвергаются ускорению. Более же общее выражение силы (9) должно принять вид:

$$e\mathbf{E}^{eff} = eA \text{div} \{ \rho(\mathbf{r}, t) \delta \mathbf{V} \} \quad \text{при} \quad \text{rot} \{ \rho(\mathbf{r}, t) \delta \mathbf{V} \} \rightarrow 0, \quad (10)$$

где  $\rho(\mathbf{r}, t)$  - плотность распределения электронов проводимости в кольце, исчезающая после их объединения в куперовские пары. В конечном итоге, в результате сверхпроводящего перехода импульс, компенсирующий импульс, полученный парами, частично диссипируется в охладителе, частично релаксируется ионами решетки в кольце с опосредованием ППВП.

Имеется еще одна тонкость микроскопического описания этого явления. Как мы уже упоминали, после перехода мезоскопическая система превращается в подобие вихря Абрикосова в сверхпроводнике. Отличие



состоит в том, что в “теплом” соленоиде магнитное поле остается некваंटованным и лишь после перехода охватывающего его кольца в сверхпроводящее состояние в нем условно (см. замечание ниже) число флюксонов становится целочисленным при учете магнитного поля, создаваемого током в кольце. Однако направление тока в кольце устанавливается неоднозначно по сравнению с картиной токов сверхпроводимости, обжимающих флюксон в металле. Дело в том, что при плотности магнитного поля в соленоиде, превышающей целое число флюксонов  $N$  на величину, меньшую половины одного флюксона, этот избыток вычитается, т.е. компенсируется магнитным полем, возникающего в кольце тока [24]<sup>4</sup>. Если же этот избыток больше половины флюксона, то ток сверхпроводимости добавляет недостающую часть до общего числа флюксонов, равного  $N + 1$ . Это явно противоречит нашему грубому предположению об однозначной направленности градиента скоростей из системы во вне, на основании которого было получено выражение (9).

Вероятно, в системах, имеющих микронные размеры, которые исследуются экспериментально, процесс теплообмена подвержен сильным флуктуациям, и, возникающие за счет них токи, не столь однозначны по направлениям. В процессе перехода в сверхпроводящее (квантовое) состояние, токи “пробуют” установиться в обоих направлениях на оси кольца, а и реализуется наиболее экономный вариант. Т.е. из двух точек  $N$  или  $N + 1$  равновесие наступает в той, для которой требуется меньшая величина флуктуации. И, надо думать, что этот минимум условный, а абсолютный наступает лишь тогда, когда все электроны проводимости перейдут в сверхпроводящее состояние.

Бесспорно, детальное динамическое описание того, как формируется продольное движение куперовских пар внутри кольца, будет существенно определяться граничными условиями и пространственными размерами кольца. Последнее хорошо известно экспериментаторам. По-видимому, важно, чтобы поперечный диаметр кольца был сравним с радиусом корреляции электронов, составляющих куперовскую пару. Заметим, что при формальных расчетах тока сверхпроводимости, который должен возникать в этом опыте, используется (квантовое!) уравнение Гинзбурга-Ландау (см., напр., [11, 20]). При этом явного ограничения на размеры кольца не накладывают. Это и не удивительно, поскольку мезоскопическое уравнение Гинзбурга-Ландау не описывает микроскопического электромагнетизма в сверхпроводнике, также как уравнение Шредингера мало

<sup>4</sup> Конечно, все эти рассуждения - классические, а в действительности микроскопическая электродинамика сверхпроводимости скорее всего не только нелинейна, но и нелокальна. Тогда можно представить, что, например, избыток магнитного поля будет уничтожаться не просто в контуре кольца, а именно внутри соленоида.

что говорит об электродинамике атома.

В заключение заметим, что данный анализ представляет собой лишь грубый сценарий сверхпроводящего перехода в рассмотренной системе и его детальное изучение требует применения теории стохастических процессов [25, 26] на квантовом уровне и углубленного понимания микроскопической электродинамики сверхпроводников (см., напр., [27]).

## 4 Квазистационарные явления в системах объемлющих торов

Эффект создания электрической струны плотно насаженными на тонкий длинный цилиндр малыми тороидальными соленоидами с линейно растущими в них токами впервые рассмотрел М.А. Миллер [18]. В данной работе мы рассматриваем системы, образуемые малыми соосными плотно пригнанными торами, из которых образуются торы больших размеров. Двукратное повторение такой операции привело нас к системе, изображенной на Рис.1f. В принципе, эту операцию можно повторять произвольное число раз, все усложняя систему. Будем называть обычную тороидальную катушку тороидом первого порядка. Если ток в ее обмотке постоянен, то внутри такой катушки возникает постоянное круговое магнитное поле, а снаружи — продольно-поперечный магнитный векторный потенциал [28]. Будем называть этот потенциал магнитным “пустым” потенциалом первого порядка. Заметим, что малый тор первого порядка является моделью тороидного диполя  $T$  [15], создающего дипольное распределение векторного потенциала первого порядка вида

$$A^{(1m)}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}T^{(1m)}) - r^2T^{(1m)}}{r^5} + 4\pi T^{(1m)}\delta(\mathbf{r}). \quad (11)$$

Здесь  $\mathbf{r} = 0$  — точка расположения тороидного диполя, а радиус-вектор  $\mathbf{r}$  задает произвольную точку в пространстве. Точкой наблюдения потенциала  $A^{(1m)}$  в данном случае мы ее назвать не можем, т.к. в отличие от напряженностей полей локальное значение потенциала мы измерять не умеем. Нам доступно лишь наблюдение изменения его распределения в квантовом интерференционном эксперименте [29].

В данном случае нас будут интересовать другие эффекты. Если ток в обмотке тороида первого порядка будет расти линейно, то очевидно, что такой тороид будет создавать в окружающем пространстве распределение электрического поля, подобное тому, которое создавал бы в этой точке

точечный зарядовый диполь:

$$E(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}^{(1m)}(t, \mathbf{r}) = -\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}\dot{T}^{(1m)}) - r^2\dot{T}^{(1m)}}{cr^5} - \frac{4\pi}{c} \dot{T}^{(1m)}\delta(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Для  $T^{(1m)} = T_0^{(1m)} \frac{t}{\tau}$  мы можем записать следующее соотношение эквивалентности:

$$-\frac{1}{c\tau} \dot{T}_0^{(1m)} = d^{\text{eff}}. \quad (13)$$

Очевидно, что в тороиде второго порядка  $T^{(2m)}$  линейно растущие токи в обмотках малых катушек дадут круговое электрическое поле внутри большого тора. Таким образом, полевая структура  $T^{(2m)}$  окажется составной: на большом торе напряженность (полоидального) магнитного поля будет линейно расти согласно заданному условию, а внутри большого тора будет заперто постоянное электрическое поле, которое, в свою очередь, создаст в пространстве, окружающем эту систему, "пустой" электрический вектор - потенциал первого порядка:

$$A^{(1e)}(\mathbf{r}) = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r}P^{(1e)}) - r^2P^{(1e)}}{r^5} + 4\pi P^{(1e)}\delta(\mathbf{r}). \quad (14)$$

Здесь  $P^{(1e)}$  — полоидальный электрический дипольный момент, равный

$$P^{(1e)} = -\frac{1}{2c\tau} \sum_n [\mathbf{r}_n \times T_{0n}^{(1m)}],$$

где  $T_{0n}^{(1m)}$  - тороидные диполи, описывающие катушки, распределенные на большом торе. Очевидно, что в том случае, когда ток в малых катушках будет иметь квадратичную зависимость роста во времени, внутри большого тороида образуется эффективный ток

$$\mathbf{j}^{\text{eff}} = -\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{c\tau} \mathbf{A}^{(1e)},$$

который создаст в окружающем пространстве магнитное поле, распределенное так, как если бы в точке, в которой находится тороид, располагался бы точечный магнитный диполь:

$$\boldsymbol{\mu}^{\text{eff}} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}^{\text{eff}}] d^3r,$$

где  $V$  - объем тороида.

Исходя из изложенного, можно представить себе картину "распаковки" (будем подразумевать под этим термином выход поля из системы объемлющих торов) тороида  $n$ -го порядка. Если  $n$  - четное число, то постоянное магнитное поле, имеющее дипольный характер на больших расстояниях, будет появляться при изменении тока в обмотках малых катушек,

пропорциональному  $t^n$ . При  $n$  - нечетном подобная система будет создавать аналогичное распределение электрического поля. Представим себе, что в нашей конструкции значение  $n$  весьма велико, а ток в малых катушках изменяется синусоидально во времени. Очевидно, что в соответствии с разложением синуса в степенной ряд снаружи тороидного диполя появятся и электрическое, и магнитное поля, величины которых будут значительно подавлены большими значениями  $1/n!$ . Таким образом, рассматриваемые системы оказываются весьма консервативными, как относительно их поведения во внешних полях, так и по свойствам их излучения во внешнее пространство. По-видимому, природа воспроизводит свойства таких систем в плотных укладках полимерных цепей. В [24] изучались системы вообще не обладающие свойством излучения, которые могли бы быть полезны в качестве моделей как микроскопических образований типа шаровых молний, так и элементарных частиц.

## 5 Заключение

Наиболее загадочными и труднопредставимыми для нас до сих пор остаются процессы, происходящие в вакууме при распространении электромагнитных возбуждений. Визуализацией этих процессов занимался еще сам создатель теории электромагнетизма, Дж. Максвелл, пытавшийся построить аналоговые механические модели. Это направление мысли сохранилось до сих пор даже в терминологии. Например, употребляется термин напряженность электрического поля, хотя "напрягается" отнюдь не само поле и было бы правильнее говорить, скажем, о поле напряженности электрического типа.

Заметим, что при рассмотрении поля конденсатора, в котором линейно растет ток смещения, мы, согласно уравнениям Максвелла, должны говорить о том, что ток смещения порождает постоянное круговое магнитное поле. Если же ток растет квадратично, то это магнитное поле, в свою очередь, будет создавать торообразные поверхности постоянного электрического поля. Таким образом, геометрия этого слоя будет напоминать ту, что мы можем создавать искусственно в системах объемлющих торов. Таким образом, исследования свойств последних должны иметь большое фундаментальное и прикладное значение.

Авторы благодарны МНТП "Фундаментальная метрология" за поддержку этой тематики по соглашению 2.51.

## Литература

- [1] Дубовик В.М., Тосунян Л.А., Тугушев В.В. *Аксиальные торoidalные моменты в электродинамике и физике твердого тела*, ЖЭТФ, 1986, **63**, т.90, вып. 2, с.590-605.
- [2] Марценюк М.А., Марценюк Н.М. *О происхождении аромагнетизма*. Письма в ЖЭТФ, 1991, **53**, в. 5, с.229-232.
- [3] Толстой Н.А., Спартаков А.А. *Новый вид магнетизма – аромагнетизм*, Письма в ЖЭТФ, 1990, **52**, в.3, с.796-798.
- [4] Дубовик В.М., Кротов С.С., Тугушев В.В. *Макроскопическая симметрия и микроскопическая природа параметров порядка при токовом и спин-токовом упорядочении в кристаллах*, Кристаллография, 1987, **32**, N3 с.540-549.
- [5] Dubovik V.M. and Tugushev V.V. *Toroid Moments in Electrodynamics and Solid-state Physics*, Phys. Reports, 1990, **187**, п.4, p.145-202.
- [6] Дубовик В.М., Марценюк М.А., Марценюк Н.М. *Мультипольное описание антиферромагнитных структур*, Препринт ОИЯИ P17-93-455, 1993.
- [7] Попов Ю.Ф., Кадомцева А.М., Звездин А.К., Белов Д.В., Воробьев Г.П. *Индукирование магнитным полем торoidalного момента в магнитоэлектрике  $Cr_2O_3$* , Письма в ЖЭТФ, 1999, **69**, вып.4, с.302-306.
- [8] Дубовик В.М., Марценюк М.А., Марценюк Н.М. *Торoidalная поляризация агрегированных магнитных суспензий и композитов*, Физика элем. частиц и ат. ядра (ЭЧАЯ), 1993, **24**, вып.4, с.1056-1132.
- [9] Dubovik V.M., Martsenyuk M.A., Martsenyuk N.M. *Reversal of Magnetization of Aggregates of Magnetic Particles by a Vorticity Field and Use of Toroidness for Recording Information*. J. of Mag. and Mat. 1995, **145**, p.211-230.
- [10] Попов Ю.Ф., Звездин А.К., Кадомцева А.М. и др. *Магнитоэлектрический эффект и торoidalное упорядочение в кристаллах  $Ga_{2-x}Fe_xO_3$* . ЖЭТФ, 1998, **114**, вып.1(7), с.263-272.
- [11] Dubovik V. M. and Shabanov S. V. *Free-field Potentials in Electrodynamics*. Phys. Lett. A, 1989, **142**, p.211-215 and *Transverse-longitudinal Part of the Vector Potential in Classical Electrodynamics*, J. Phys. A: Math. Gen., 1990, **23**, p.3245-3255.
- [12] Желудев И.С. *Об одной формальной возможности создания спонтанной поляризации за счет упорядоченного движения электронов*, Изв. АН, сер. Физическая, 1969, **XXXIII**, N2, с.204-206.
- [13] Букина Е.Н., Дубовик В.М. *Вклады поляризуемостей в четыре базисные поляризации электромагнитных сред*, Препринт ОИЯИ P17-99-276, 1999.
- [14] Dubovik V.M. and Kurbatov A.M. *Multipole Interactions of Dipole and Spin Systems with External Fields* in: (Eds. A.O. Barut a.o.) Proc. of Int. Symposium, "Quantum Systems: New Trends and Methods", May 23-29, 1994, Minsk., WS, Singapore, 1995, p.117-124.
- [15] Дубовик В.М., Чешков А.А. *Мультипольные разложения в классической и в квантовой теории поля и излучение*. Физ. элем. частиц и ат. ядра (ЭЧАЯ), 1974, **5**, в.3, с.791-837; см. также препринты ОИЯИ P2-5283 и P2-5284, Дубна 1970.
- [16] Bukina E.N., Dubovik V.M. *The gauge freedoms of enlarged Helmholtz theorem and the Debye potentials; their use in the multipole expansion of conserved current*, Tr.J.Phys., 1998, **22** p.1-9.
- [17] Дубовик В.М., Тосунян Л.А. *Торoidalные моменты в физике электромагнитных и слабых взаимодействий*. Физ. элем. частиц и ат. ядра (ЭЧАЯ), 1983, **14**, в.5, с.1193-1228.
- [18] Миллер М.А. *Зарядовая и токовая электростатика. Нестационарные источники статических полей*, УФН, 1984, **142**, вып.1, стр.147-158; Afanasiev G.N. *Static and Non-Static Electrical Solenoids*, J. Phys. A: Math. Gen., 1993, **26** p.731-742; Dubovik V.M., Afanasiev G.N., Misticu S. *Explicit Realizations of Static and Nonstatic solenoids and Conditions for their Existence*. J.Phys.A, 1993, v.26, n.13, p.3279-3284.
- [19] Afanasiev G.N. *Toroidal Solenoids in Electrodynamical Field and Toroidal Aharonov-Casher Effect*, Physica Scripta, 1993, **48**, p.385-392
- [20] Liang J.Q. and Ding X.X. *Fractional Angular Momentum and Magnetic-Flux Quantization*, Phys. Rev. Lett. 1987, v. 60, N9, p. 836-839.
- [21] Schiff L.I. *A Question in General Relativity*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S. 1939, v. 25, n.2 p. 391-395.

- [22] Modesitt G.E. *Maxwell Equations in a Rotating Reference Frame*, Am. J. Phys. 1970, v.38, n.12, p. 1487-1489.
- [23] Фейнман Р. *Статистическая механика*. Мир, М. 1975, гл.12.
- [24] Afanasiev G.N., Dubovik V.M. *Some Remarkable Charge-Current Configurations*, Phys.Elem. Part.and At.Nucl.(Particles & Nuclei), 1998, 29, N.4, p.891-945.
- [25] Боголюбов Н.Н. *Проблемы динамической теории в статистической физике*. М.; Л.; ГТТИ, 1946.
- [26] Боголюбов Н.Н., Гуров К.П.. *Кинетические уравнения квантовой механике ЖЭТФ*, 1947, т.17, вып.7, с.614-628.
- [27] Боголюбов Н.Н.(мл.), Бранков И.Г., Загребнов В.А, Курбатов А.М., Тончев Н.С., *Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике*, София, 1981.
- [28] Афанасьев Г.Н. *Старые и новые проблемы в теории эффекта Ааронова-Бома*, Физика, ЭЧАЯ, 1990, том 21, вып. 1, с. 172-240.
- [29] Tonomura A., Fukuhara A., Phys.Rev.Lett., 1989, v.62, p.113.

Рукопись поступила в издательский отдел  
18 октября 1999 года.