ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р17-99-274

Х.Ш.Борлаков*, В.М.Дубовик, Р.Х.Хубиев*

АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ЛАНДАУ — ЛИФШИЦА ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ПАРАМЕТРА МАГНИТНОГО ПОРЯДКА

Направлено в журнал «Физика металлов и металловедение»

*Карачаево-Черкесский государственный технологический институт

1999

Борлаков Х.Ш., Дубовик В.М., Хубиев Р.Х. Р17-99-274
Аналог уравнения Ландау — Лифшица для многокомпонентного параметра магнитного порядка

Получено обобщенное уравнение Ландау — Лифшица для произвольного магнитного параметра порядка. Это уравнение обладает тем преимуществом, что позволяет адекватным образом учитывать симметрию кристалла на всех этапах расчета. Кроме того, уравнение для описания динамики сложного антиферромагнитика получается по единому алгоритму и не требует введения дополнительных произвольных предположений, за исключением тех, которые фигурировали в классической работе Ландау — Лифшица.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1999

Borlakov Kh. Sh., Dubovik V.M., Khubiev R. Kh. P17-99-274
Landau — Lifshitz Equation for Multicomponent Magnetic Order Parameter

The generalized Landau — Lifshitz equation for any magnetic order parameter is derived. This equation allows an adequate consideration of symmetry of a crystal at all stages. Besides, the equation for the description of dynamics of a complex antiferromagnet is obtained by a unique algorithm and does not require introduction of additional assumptions, except for those, which appear in the classical work of Landau and Lifshitz.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1999

1 Введение

После работ Бирмана [1] и Гуфана [2, 3], а также более поздних работ ряда других исследователей, в феноменологической теории фазовых переходов Ландау произошла та канонизация методов и языка [4], которая свидетельствует о превращении этого раздела термодинамики в совершенно обновленную и самостоятельную научную дисциплину. Алгоритм исследования термодинамики кристалла, или иной физической системы с симметрией, приобрел почти такую же стройность и однозначность, которой характеризуются методы классической механики. К сожалению, при исследовании динамических свойств той же системы упомянутая стройность и однозначность рецептов теряется, и часто приходится прибегать к неоправданно большому числу произвольных предположений. Между тем, как оказывается, нет никаких препятствий к тому, чтобы объединить методы исследования термодинамических свойств с методами исследования динамических свойств. Мы хотим продемонстрировать возможности такого единого подхода на примере сложного антиферромагнетика, магнитное упорядочение в котором характеризуется многокомпонентным параметром порядка $\boldsymbol{c}$. Для этого мы обобщим классическое уравнение Ландау-Лифшица для ферромагнитного момента на произвольный магнитный параметр порядка $\boldsymbol{c}$.

2 Вывод обобщенного уравнения Ландау–Лифшица

Уравнение Ландау-Лифшица для вектора спонтанной намагниченности $\boldsymbol{M}$ имеет следующий вид [5]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = \gamma\,[\boldsymbol{H}_{eff}\boldsymbol{M}] + \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

где γ - гиромагнитное отношение; $\boldsymbol{R}$ - релаксационный член, отвечающий за диссипацию энергии спиновых волн и имеющий релятивистское происхождение. Эффективное магнитное поле $\boldsymbol{H}_{eff}$ определяется из термодинамического потенциала ферромагнетика с помощью вариационной производной [5, 6]

$$\boldsymbol{H}_{eff} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{M}}. \tag{2}$$

Перепишем уравнение (1) в тензорной форме (в пренебрежении релаксационным членом)

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} = \Omega_{ik} M_k. \tag{3}$$

Здесь и далее мы подразумеваем суммирование по повторяющемуся (немому) индексу и не будем писать знака суммы. Элементы антисимметричной матрицы $\Omega_{ik} = -\Omega_{ki}$ выражаются через компоненты вектора $\boldsymbol{\Omega} = \gamma \boldsymbol{H}_{eff}$ с помощью абсолютно антисимметричного единичного тензора Леви-Чивита

$$\Omega_{ik} = -\epsilon_{ikl}\Omega_l. \tag{4}$$

Выведем аналог уравнения (3) для спиновых волн в сложноупорядоченном антиферромагнетике, магнитное упорядочение в котором описывается многокомпонентным параметром порядка $\boldsymbol{c}$. В состоянии термодинамического равновесия среднее значение магнитного момента $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r})$ атома на узле кристаллической решетки $\boldsymbol{r}$ определяется выражением

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}) = \sum_i c_i \cdot \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{r}), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{r})$ - векторные базисные функции неприводимого представления (НП), по которому преобразуется параметр порядка $\boldsymbol{c}$. Чтобы рассмотреть динамику магнитной подсистемы, будем считать, что среднее значение магнитного момента зависит от времени, и эта зависимость от времени определяется зависимостью от времени параметра порядка $\boldsymbol{c}(t)$, так что имеем:

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_i c_i(t) \cdot \boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{r}). \tag{6}$$

Предположим, что изменение вектора $\boldsymbol{m}(\boldsymbol{r}, t)$ во времени представляет собой прецессию этого вектора вокруг некоторого направления в пространстве без изменения длины этого вектора. Физически, сохранение модуля $\boldsymbol{m}$ означает то, что величина атомного магнитного момента определяется гораздо более сильными внутриатомными взаимодействиями, чем взаимодействия, определяющие упорядочение и динамику магнитных моментов. Так как базисные функции НП $\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{r})$ удовлетворяют соотношению ортогональности $\boldsymbol{\phi}_i(\boldsymbol{r})\boldsymbol{\phi}_k(\boldsymbol{r}) = \delta_{ik}$, то, возводя обе части равенства (6) в квадрат, получим:

$$\boldsymbol{m}^2(\boldsymbol{r}, t) = \sum_i c_i^2(t). \tag{7}$$

Так как квадрат модуля вектора $\boldsymbol{m}$ есть, по нашему предположению, величина постоянная, то, взяв производную по времени от обеих частей равенства (7), получим

$$\boldsymbol{m} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial t} = \sum_i c_i \frac{\partial c_i}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

Мы видим из (8), что скорость изменения вектора $\boldsymbol{m}$ ортогональна самому этому вектору, а правая часть этого уравнения может быть записана так:

$$\boldsymbol{c} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial t} = 0. \tag{9}$$

То есть параметр порядка $\boldsymbol{c}$ прецессирует в n-мерном действительном евклидовом пространстве (ϵ- пространстве по [2] или пространстве образа по [4]) согласно уравнению

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \Omega_{ik} c_k. \tag{10}$$

В многомерном пространстве, как и в обычном трехмерном, можно получить вектор Ω путем взятия вариационной производной:

$$\Omega = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{c}}, \tag{11}$$

где Ω уже не трехмерный, а n-мерный вектор в пространстве параметра порядка. Но в пространстве, размерность которого больше трех, мы уже не можем выразить компоненты антисимметричного тензора Ω_{ik} через компоненты вектора $\boldsymbol{\Omega}$. Таким образом, трафаретное обобщение уравнения (1) возможно только до известной степени и для получения содержательных результатов требуются дополнительные физические соображения.

3 Дальнейшая конкретизация методами дифференциальной геометрии

Как хорошо известно [7], в n-мерном пространстве существует ортонормированный базис, в котором антисимметричная матрица имеет максимально простой (канонический) вид. Компактную и ковариантную запись нужных нам соотношений удобнее всего получить, используя элементы теории внешних форм [8, 9]. Антисимметричной матрице соответствует бивектор $\hat{\Omega}$, который выражается через компоненты этой матрицы следующим образом:

$$\hat{\Omega} = \Omega_{ij} \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j, \tag{12}$$

а внешнее произведение базисных векторов антисимметрично: $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_i$. В каноническом базисе разложение бивектора имеет вид

$$\hat{\Omega} = \sum_s \omega^s \boldsymbol{a}^s \wedge \boldsymbol{b}^s. \tag{13}$$

Явная запись формулы и ее геометрическое толкование несколько отличаются для случая четно-мерного и нечетно-мерного евклидовых пространств. Далее, антисимметричную матрицу и соответствующий ей бивектор будем обозначать одним и тем же символом $\hat{\Omega}$.

Рассмотрим вначале четно-мерный случай $n = 2r$. Тогда, суммирование в формуле (13) идет от $s = 2$ до $s = r$. В плоскости, определяемой базисными векторами $(\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{b}^1)$, вращения вектора $\boldsymbol{c}$ не происходит. В каждой из плоскостей, определяемых парой векторов $(\boldsymbol{a}^s, \boldsymbol{b}^s)$, происходит вращение вектора $\boldsymbol{c}$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_s$. Отметим, что объединение векторов канонического базиса в пары $(\boldsymbol{a}^s, \boldsymbol{b}^s)$ продиктовано следующим обстоятельством: собственные значения антисимметричной матрицы являются чисто мнимыми: $\hat{\Omega}\boldsymbol{z}^s = i\omega_s \boldsymbol{z}^s$, а соответствующие собственные векторы являются комплексными: $\boldsymbol{z}^s = \boldsymbol{a}^s + i\boldsymbol{b}^s$ [7, 8]. Выразим компоненты бивектора Ω_{ij} через собственные значения ω_s, которые, без потери общности, можно считать положительными и упорядоченными по величине [7]. Для этого следует выразить векторы канонического базиса $\{\boldsymbol{a}^s, \boldsymbol{b}^s\}$ через исходный ортонормированный базис в ϵ-пространстве $\{\boldsymbol{e}_i\}$: $\boldsymbol{a}^s = a^s_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b}^s = b^s_i \boldsymbol{e}_i$. Подставляя эти разложения в (13) и учитывая свойства внешнего умножения базисных векторов, получаем искомую связь:

$$\Omega_{ij} = \sum_{s=2}^{r} \omega \left(a^s_i b^s_j - a^s_j b^s_i \right). \tag{14}$$

В нечетно-мерном ϵ-пространстве суммирование в формуле (14) начинается с $s = 1$, так как в этом случае, для $\hat{\Omega}$-матрицы общего вида, имеется только одномерное подпространство, инвариантное относительно поворотов вокруг соответствующего направления [7].

Чисто алгебраические рассуждения приводят к возможности существования $r - 2$ различных собственных значений у $\hat{\Omega}$-матрицы и в четно-мерном $(n = 2r)$, и в нечетно-мерном $(n = 2r - 1)$ случае при отсутствии вырождения. В трехмерном пространстве существовало только одно собственное значение $\hat{\Omega}$-матрицы, которое определялось модулем вектора $\boldsymbol{\Omega} = \gamma \boldsymbol{H}_{eff}$. Чтобы термодинамические рассуждения могли замыкать нашу схему и в n—мерном случае, мы допустим, что собственные значения $\hat{\Omega}$- матрицы вырождены и их квадраты равны величине

$$\omega_s^2 = \omega^2 = \frac{\partial F}{\partial c_i}\frac{\partial F}{\partial c_i}. \tag{15}$$

Физически, такое требование представляется оправданным, так как невозможно представить, чтобы внешнее поле частоты ω приводило к колебаниям с разными частотами в разных плоскостях.

Коснемся теперь определения канонического базиса $\{\boldsymbol{a}^s, \boldsymbol{b}^s\}$. В конкретном случае расчета спектра низкочастотных колебаний магнитного параметра порядка $\boldsymbol{c}$ можно выделить инвариантную плоскость при $n = 2r$ или инвариантное направление при $n = 2r - 1$. При этом векторы $\{\boldsymbol{a}^s, \boldsymbol{b}^s\}$ образуют базис в ортогональном дополнении к этим инвариантным подпространствам. Отметим, что стандартный алгебраический алгоритм нахождения ортонормированного базиса в ортогональном дополнении к некоторому инвариантному подпространству приведен, например, в [8].

4 Заключение

При исследовании динамики конкретного кристалла параметр порядка удобно разложить на критический и некритические параметры порядка, преобразующиеся по различным НП группы симметрии парамагнитного кристалла. При таком способе рассмотрения критическим будет магнитный параметр порядка, а среди некритических могут быть и такие, которые описывают немагнитные степени свободы кристалла, например, упругие колебания кристалла или колебания электрической поляризации в сегнетомагнетиках. Так как компоненты любого из вторичных параметров порядка входят в потенциал в виде квадратичного инварианта и в виде смешанных инвариантов, линейных по компонентам вторичного параметра порядка и нелинейных по компонентам критического параметра порядка [10], то динамические уравнения для каждого из вторичных параметров порядка имеют универсальный и более простой вид, чем аналогичное уравнение для критического параметра порядка.

При обсуждении вопроса о спин-волновой частоте в литературе (см. [11] и ссылки к [11]) развернулась широкая дискуссия о справедливости модели "застывшей" решетки, или, напротив, "свободной" решетки. В нашем подходе ситуация проявляется столь прозрачным образом, что места для дискуссии не остается. Действительно, из изложенного выше ясно, что мы рассматриваем динамику на фоне установившегося равновесного состояния. Полагая, что переменная составляющая по модулю значительно меньше равновесного значения параметра порядка и линеаризуя уравнение Ландау-Лифшица (10) стандартным способом, мы получаем линейное уравнение на фоне "застывшей" решетки. "Застывшая" решетка, в каждой из низкосимметричных фаз, характеризуется равновесными значениями критического $\boldsymbol{c}_{cr}$ и некритических $\boldsymbol{c}_j$ параметров порядка, входящих в полный конденсат стационарных векторов, а также соответствующей группой симметрии G_D. Если же рассматривается эволюция параметров порядка из сильно неравновесного состояния, то подход, основанный на уравнении Ландау-Лифшица, не годится, и следует применять существенно иные методы исследования, изложенные, например, в [12].

Следует отметить, что при ряде условий (сверхтонкие пленки, см., например, [13], или наличие слабого ферромагнетизма, например, [14]) основная часть микромагнетизма в магнетике "расходуется" на создание вихревых структур. Тогда описание их поведения как мезоскопических образований требует использования аналога уравнения Ландау-Лифшица, описывающего эволюцию тороидных диполей [15, 16]. Описание же магнитной среды в этом случае будет производиться также модифицированными уравнениями Максвелла [17, 18].

Литература

[1] Birman I.L. *Simplified theory of symmetry change in second-order phase transition application to V_3Si*, Phys. Rev. Lett., 1966. **17(24)**, No.3, p. 1216-1219.

[2] Гуфан Ю.М. *К теории фазовых переходов, характеризуемых многокомпонентным параметром порядка*, ФТТ, 1971. **13**, No.4, с. 225-230.

[3] Гуфан Ю.М. *Структурные фазовые переходы.* М.: Наука, 1982.

[4] Изюмов Ю.А., Сыромятников В.Н. *Фазовые переходы и симметрия кристаллов.* М. Наука, 1984. 248 с.

[5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *К дисперсии магнитной проницаемости*, в кн. Ландау Л. Д. *Собрание трудов.* Т.1. М.: Наука, 1969, с.128-143.

[6] Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. *Спиновые волны.* М.: Наука, 1967. 368 с.

[7] Беллман Р. *Введение в теорию матриц*, М.: Наука, 1969, 366 с.

[8] Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* М.: Наука, 1970, 528 с.

[9] Ефимов Н.В. *Введение в теорию внешних форм.* М.: Наука, 1977, 88 с.

[10] Сахненко В.П., Таланов В.М., Чечин Г.М., *Теоретико-групповой анализ полного конденсата, возникающего при структурных фазовых переходах*, ФММ, 1986, 62, No.5, с. 847-856.

[11] Туров Е. А., Шавров В. Г. *Нарушенная симметрия и магнитоакустические эффекты в ферро- и антиферромагнетиках*, УФН, 1983. **140**, No.3, с. 429-462.

[12] Олемской А. И., Коплык И. В. *Теория пространственно-временной эволюции неравновесной термодинамической системы*, УФН, 1995. **165**, No.10, с. 1105-1144.

[13] Филиппов Б.Н., Корзунин Л.Г. и др. *Нелинейная динамика вихревых доменных стенок в магнитных пленках в широкой области толщин*, Физ.Мет.и Металловед., 1999, **87**, No.6, с. 17-23.

[14] Usov N.A. *Magnetization curling in soft type ferromagnetic particles with large aspect ratios*, J.Mag.and Mag.Mat., 1999, **203**, p. 277-279.

[15] V.M. Dubovik, I.V. Lunegov and M.A. Martsenyuk, *Toroidal response in nuclear magnetic resonance*, Phys. Part. Nucl., 1995, **26**, No.1, p.29-59.

[16] Dubovik V.M., Martsenuyk M.A., Martsenuyk N.M. *Reversal of Magnetization of Aggregates of Magnetic Particles by a Vorticity Field and Use of Toroidness for Recording Information.* J. of Mag. and Mat. 1995, **145**, No.1, p. 211-230.

[17] Dubovik V.M. and Magar E.N. *Inversion Formulas for the Decompositions of Vector Fields and Theory of Continuous Media.* J. Mosc. Phys. Soc. 1994, **3** p. 1-9.

[18] Dubovik V.M., Saha B. and Martsenuyk M.A. *Generalized Equations of Electrodynamics of Continuous Media* in Proc. S. Jeffers et al (eds.), *The Present Status of the Quantum Theory of Light*, Kluwer Acad.Publ., 1997, p. 141-150.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 октября 1999 года.