СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P17 - 9776

Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов

КЛАСС ТОЧНО РЕШАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ С "ПЕРЕКРЕСТНЫМ" ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ.

Ш. Асимптотическое поведение функции свободной энергии

1976

P17 - 9776

Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов

КЛАСС ТОЧНО РЕШАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ С "ПЕРЕКРЕСТНЫМ" ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ.

Ш. Асимптотическое поведение функции свободной энергии

§1. ВВЕДЕНИЕ

Здесь мы продолжим начатое в работах [9,10] исследование класса модельных систем с перекрестным взаимодействием (взаимодействие типа $AB^+ + A^+B$), причем в модельный гамильтониан кроме того могут входить члены с отрицательными константами связи:

$$
\begin{aligned}
H = T_1 + T_2 - V \sum_{i=1}^{r} \{ \gamma_i (A_i B_i^+ + A_i^+ B_i) + 2\delta_i C_i D_i + \eta_i A_i^+ + \\
+ \eta_i^+ A_i + \xi_i C_i + \xi_i^+ C_i + \nu_i B_i^+ + \nu_i^+ B_i + \mu_i D_i + \mu_i^+ D_i \} - \qquad (1) \\
- V \sum_{i=r+1}^{r+s} \{ \omega_i G_i G_i^+ + \zeta_i G_i^+ + \zeta_i^+ G_i \},
\end{aligned}
$$

где V обозначает объем системы. Операторы B_i, D_i и T_2 являются комбинациями операторов Паули $S_m^{\pm}$

$$
\begin{aligned}
B_i &= \frac{1}{V} \sum_m \lambda_i^{(m)} S_m^- , \quad B_i^+ = \frac{1}{V} \sum_m \lambda_i^{(m)} S_m^+ \\
D_i &= D_i^+ = \frac{1}{V} \sum_m \rho_i^{(m)} S_m^z , \quad S_m^z = \frac{1}{2} - S_m^- S_m^+ , \qquad (2) \\
T_2 &= \sum_m T_m S_m^+ S_m^- ,
\end{aligned}
$$

$\lambda_i^{(m)}$, $\rho_i^{(m)}$, T_m – вещественные числа. Операторы T_1, A_i, C_i, G_i являются квадратичными формами по некоторым операторам рождения и уничтожения, причем они не зависят от $S_m^{\pm}$. Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$
\| A_i \| \le M_1 , \quad \| C_i \| \le M_1 , \quad \| G_i \| \le M_1 , \qquad (3)
$$

$$\|[T_1, A_i]\| \le M_2 , \quad \|[T_1, C_i]\| \le M_2 , \quad \|[T_1, G_i]\| \le M_2 , \tag{4}$$

$$\begin{gathered} \|[A_i, A_j]\| \le M_3/V , \quad \|[A_i^+, A_j]\| \le M_3/V , \\ \|[C_i, C_j]\| \le M_3/V , \quad \|[G_i, G_j]\| \le M_3/V , \\ \|[G_i^+, G_j]\| \le M_3/V , \\ \|[A_i, C_j]\| \le M_3/V , \quad \|[A_i, G_j]\| \le M_3/V , \\ \|[A_i^+, G_j]\| \le M_3/V , \quad \|[C_i, G_j]\| \le M_3/V , \end{gathered} \tag{5}$$

где M_1, M_2, M_3 – постоянные, не зависящие от V. Кроме того, требуется, чтобы

$$f_V[T_1] \le M_0, \qquad M_0 = \mathrm{const} \tag{6}$$

и чтобы

$$\frac{1}{V}\sum_m |\lambda_i^{(m)}| \le L_1 , \quad \frac{1}{V}\sum_m |\rho_i^{(m)}| \le L_1 , \tag{7}$$

$$|\lambda_i^{(m)}| \le L , \quad |\rho_i^{(m)}| \le L, \quad |T_m| \le L, \tag{8}$$

где L и L_1 – также константы, не зависящие от V.

В работах /9,10/ был построен аппроксимирующий гамильтониан

$$\begin{aligned} H_{\epsilon 0}(a,\bar b,c,\bar d,g) = {} & T(a,c,g) + V\sum_{i=1}^{r}\Big\{ \frac{1}{\epsilon^2}\gamma_i \bar b_i B_i^+ + \frac{1}{\epsilon^2}\gamma_i \bar b_i^+ B_i - \\ & - \frac{1}{\epsilon^2}\gamma_i \bar b_i \bar b_i^+ + \frac{1}{\epsilon^2}\delta_i \bar d_i D_i^+ + \frac{1}{\epsilon^2}\delta_i \bar d_i^+ D_i - \frac{1}{\epsilon^2}\delta_i \bar d_i \bar d_i^+ - \\ & - \nu_i B_i^+ - \nu_i^+ B_i - \mu_i D_i^+ - \mu_i^+ D_i \Big\}, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} T(a,c,g) = {} & T_1 + T_2 - V\sum_{i=1}^{r}\Big\{\gamma_i a_i \big(\epsilon A_i^+ + \frac{1}{\epsilon}B_i^+\big) + \gamma_i a_i^+\big(\epsilon A_i + \\ & + \frac{1}{\epsilon}B_i\big) - \gamma_i a_i a_i^+ + \delta_i c_i\big(\epsilon C_i^+ + \frac{1}{\epsilon}D_i^+\big) + \delta_i c_i^+\big(\epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon}D_i\big) - \\ & - \delta_i c_i c_i^+ + \eta_i A_i^+ + \eta_i^+ A_i + \xi_i C_i^+ + \xi_i^+ C_i\Big\} - V\sum_{i=r+1}^{r+s}\Big\{\omega_i g_i G_i^+ + \omega_i g_i^+ G_i - \\ & - \omega_i g_i g_i^+ + \zeta_i^+ G_i + \zeta_i^+ G_i\Big\}, \end{aligned} \tag{10}$$

причем постоянные $\bar b_i$, $\bar d_i$ определяются из условия абсолютного максимума свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана по переменным b_i и d_i:

$$f_V[H_{\epsilon 0}(a,\bar b,c,\bar d,g)] = \max_{b,d} f_V[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)]. \tag{11}$$

Была показана асимптотическая близость свободных энергий для вспомогательного гамильтониана

$$H_\epsilon = H - V\sum_{i=1}^{r}\epsilon^2\{\gamma_i A_i A_i^+ + \delta_i C_i C_i^+\} \tag{12}$$

и промежуточного аппроксимирующего гамильтониана

$$\begin{aligned} H'_{\epsilon 0}(a,c,g,) = {} & T_1 + T_2 - V\sum_{i=1}^{r}\Big\{\gamma_i a_i\big(\epsilon A_i^+ + \frac{1}{\epsilon}B_i^+\big) + \\ & + \gamma_i a_i^+\big(\epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon}B_i\big) - \gamma_i a_i a_i^+ + \delta_i c_i\big(\epsilon C_i^+ + \frac{1}{\epsilon}D_i^+\big) + \\ & + \delta_i c_i^+\big(\epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon}D_i\big) - \delta_i c_i c_i^+ + \eta_i A_i^+ + \eta_i^+ A_i + \\ & + \xi_i C_i^+ + \xi_i^+ C_i\Big\} - V\sum_{i=r+1}^{r+s}\Big\{\omega_i g_i G_i^+ + \omega_i g_i^+ G_i - \omega_i g_i g_i^+ + \\ & + \zeta_i G_i^+ + \zeta_i G_i\Big\} + V\sum_{i=1}^{r}\Big\{\frac{1}{\epsilon^2}\gamma_i B_i B_i^+ + \frac{1}{\epsilon^2}\delta_i D_i D_i^+ - \\ & - \nu_i B_i^+ - \nu_i^+ B_i - \mu_i D_i^+ - \mu_i^+ D_i\Big\}, \end{aligned} \tag{13}$$

где постоянные a , c , g должны быть определены из условия абсолютного минимума свободной энергии этого гамильтониана,

$$0 \le \min_{a,c,g} f_V[H'_{\epsilon 0}(a,c,g)] - f_V[H_\epsilon] \le \delta'_\epsilon(1/V), \tag{14}$$

где $\delta'_\epsilon(1/V)\to 0$ при $V\to\infty$, а также $\delta_{1/V^z}(1/V)\to 0$ при $V\to\infty$, если $0<z<1/19$.

Кроме того, были доказаны неравенства

$$\left|\frac{\partial^2 f_V[H_{\epsilon 0}(a,\bar b,c,\bar d,g)]}{\partial\nu_i\,\partial\nu_i^+}\right| \le \frac{11}{4\theta} L L_1 ,$$

$$\left|\frac{\partial^2 f_V[H_{\epsilon 0}(a,\bar b,c,\bar d,g)]}{\partial\mu_i\,\partial\mu_i^+}\right| \le \frac{5}{2\theta} L L_1 ; \tag{15}$$

$$\|B_i\|\le L_1,\quad \|D_i\|\le L_1,$$

$$\|[B_i,B_j]\|\le LL_1/V,\qquad \|[B_i^+,B_j]\|\le LL_1/V,$$

$$\|[D_i,D_j]\|\le LL_1/V,\quad \|[B_i,D_j]\|\le LL_1/V. \tag{16}$$

§2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ ИСХОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Используя неравенства (16) и определение (10), нетрудно показать, что

$$\|[T,B_i]\|\le \tilde L_2,\ \|[T,D_i]\|\le \tilde L_2,\ \tilde L_2 = \text{const} \tag{17}$$

при любых a_i , c_i , g_i из некоторой ограниченной области X. Возьмем в качестве X следующую область:

$$|a_i|\le \epsilon M_1 + \frac{1}{\epsilon}L_1,\quad |c_i|\le \epsilon M_1 + \frac{1}{\epsilon}L_1,\quad |g_i|\le M_1. \tag{18}$$

Из условия (6) с помощью неравенств (3), (16) и

$$\|S_m^\pm\|\le 1,\qquad \|S_m^z\|\le 1/2$$

можно получить, что

$$|f_V[T]|\le \tilde L_0,\quad \tilde L_0 = \text{const} \tag{19}$$

для любых (a_i, c_i, g_i), принадлежащих области X.

Как показано в работе [6], из соотношений (16), (17), (19), (15) следует асимптотическая близость свободных энергий для гамильтониана $H'_{\epsilon 0}(a,c,g)$ и аппроксимирующего к нему гамильтониана $H_{\epsilon 0}(a,\bar b,c,\bar d,g)$:

$$0\le f_V[H'_{\epsilon 0}(a,c,g)] - f_V[H_{\epsilon 0}(a,\bar b,c,\bar d,g)] \le \delta_\epsilon(1/V) \tag{20}$$

$(a_i, c_i, g_i)\in X$, $\delta_\epsilon(1/V)$ стремится к нулю при V, стремящемся к бесконечности для любого фиксированного ϵ).

Минимизируем неравенство (20) по переменным a_i , c_i , g_i в области X

$$0\le \min_{(a,c,g)\in X} f_V[H'_{\epsilon 0}(a,c,g)] - \min_{(a,c,g)\in X} f_V[H_{\epsilon 0}(a,\bar b,c,\bar d,g)] \le \delta_\epsilon(1/V).$$

Как уже отмечалось выше [9], абсолютный минимум свободной энергии гамильтониана $H'_{\epsilon 0}(a,c,g)$ существует и достигается в области X. Кроме того, можно показать, что абсолютный минимум функции $H_{\epsilon 0}(a,\bar b(a,c,g), c, \bar d(a,c,g), g)$ также существует и достигается в некоторых точках $\bar a_i$, $\bar c_i$, $\bar g_i$, принадлежащих X. В таком случае

$$\min_{(a,c,g)\in X} f_V[H'_{\epsilon 0}(a,c,g)] = \min_{a,c,g} f_V[H'_{\epsilon 0}(a,c,g)] \tag{21}$$

$$\min_{(a,c,g)\in X} f_V[H_{\epsilon 0}(a,\bar b,c,\bar d,g)] = \min_{a,c,g} f_V[H_{\epsilon 0}(a,\bar b,c,\bar d,g)] \tag{22}$$

и мы получаем

$$0\le \min_{a,c,g}\max_{b,d} f_V[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)] - \min_{a,c,g} f_V[H'_{\epsilon 0}(a,c,g)] \le \delta_\epsilon(1/V). \tag{23}$$

Более того, используя результаты работы [3], нетрудно показать, что $\delta_{1/V^z}(1/V)\to 0$ при $V\to\infty$, если $0<z<1/19$.

Складывая полученное неравенство с (14), получаем

$$\delta_\epsilon(1/V)\le \min_{a,c,g}\max_{b,d} f_V[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)]-f_V[H_\epsilon]\le \delta'_\epsilon(1/V). \quad (24)$$

Покажем теперь, что

$$f_V[H_\epsilon]-f_V[H]\to 0 \qquad \text{при} \qquad V\to\infty \quad (25)$$

для любого ϵ. Для этого воспользуемся неравенством Н.Н.Боголюбова для свободных энергий [3] для гамильтониана H_ϵ (12); имеем:

$$\frac{1}{V}<-\epsilon^2 V\sum_{i=1}^{r}\{\gamma_i A_i A_i^+ +\delta_i B_i B_i^+\}>_{H_\epsilon}\le f_V[H_\epsilon]-f_V[H]\le$$

$$\le \frac{1}{V}<-\epsilon^2 V\sum_{i=1}^{r}\{\gamma_i A_i A_i^+ +\delta_i B_i B_i^+\}>_H .$$

Принимая во внимание условие ограниченности операторов A_i и B_i (3) и положительную определенность операторов $A_i A_i^+$ и $B_i B_i^+$, получаем

$$-\epsilon^2\cdot r(\tilde\gamma+\tilde\delta)M_1^2\le f_V[H_\epsilon]-f_V[H]\le 0, \quad (26)$$

где $\tilde\gamma=\max_i\gamma_i$, $\tilde\delta=\max_i\delta_i$, что и доказывает соотношение (25).

Постоянная ϵ входит в знаменатели части слагаемых гамильтониана $H_{\epsilon 0}(\bar a,\bar b,\bar c,\bar d,\bar g)$, поэтому он не существует при $\epsilon=0$. Однако мы все-таки сможем, используя свободнук энергию гамильтониана $H_{\epsilon 0}(\bar a,\bar b,\bar c,\bar d,\bar g)$, при $\epsilon\ne 0$, вычислить свободную энергию гамильтониана $H=H_\epsilon|_{\epsilon=0}$.

А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1

Пусть операторы B_i, D_i, T_2 имеют вид (2), а операторы A_i, C_i, G_i, T_1 удовлетворяют условиям (3)-(6), пусть, кроме того, выполняются неравенства (7), (8),

тогда предел разности свободных энергий аппроксимирующего гамильтониана с $\epsilon=1/V^z$ и исходного модельного при $V\to\infty$ существует и равен нулю при $0<z<1/19$:

$$\lim_{V\to\infty}\{f_V[H_{1/V^z,0}(\bar a,\bar b,\bar c,\bar d,\bar g)]-f_V[H]\}=0, \qquad 0<z<1/19. \quad (27)$$

Для доказательства сложим почленно неравенства (24) и (26)

$$\delta_\epsilon(1/V)-\epsilon^2 r(\tilde\gamma+\tilde\delta)M_1^2\le f_V[H_{\epsilon 0}(\bar a,\bar b,\bar c,\bar d,\bar g)]-f_V[H]\le\delta'_\epsilon(1/V). \quad (28)$$

Положим здесь $\epsilon=1/V^z$, $0<z<1/19$

$$\delta_{1/V^z}(1/V)-\frac{1}{V^{2z}}r(\tilde\gamma+\tilde\delta)M_1^2\le f_V[H_{1/V^z,0}]-f_V[H]\le\delta'_{1/V^z,0}. \quad (29)$$

Как уже указывалось выше, $\delta_{1/V^z}(1/V)$ и $\delta'_{1/V^z}(1/V)$, где $0<z<1/19$, стремятся к нулю при $V\to\infty$. Таким образом, совершая в неравенстве (29) предельный переход $V\to\infty$, получаем утверждение теоремы.

Предположим теперь, что при любом достаточно малом $\epsilon>0$ существует предел

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\epsilon 0}(\bar a,\bar b,\bar c,\bar d,\bar g)]=f_\infty[H_{\epsilon 0}], \quad (30)$$

то есть, что для любого $\kappa>0$ существует $\tilde V$ такое, что для любого $V>\tilde V$

$$|f_\infty[H_{\epsilon 0}]-f_V[H_{\epsilon 0}(\bar a,\bar b,\bar c,\bar d,\bar g)]|<\kappa .$$

Тогда, согласно неравенству (28),

$$\delta_\epsilon(1/V)-\epsilon^2 r(\tilde\gamma+\tilde\delta)M_1^2-\kappa\le f_\infty[H_{\epsilon 0}]-f_V[H]\le\delta'_\epsilon(1/V)+\kappa .$$

Поскольку $\delta_\epsilon(1/V)$ и $\delta'_\epsilon(1/V)$ стремятся к нулю при $V\to\infty$ при любом ϵ, существует $\tilde{\tilde V}$ такое, что для любого $V>\tilde{\tilde V}$

$$-\kappa<\delta_\epsilon(1/V), \qquad \delta'_\epsilon(1/V)<\kappa .$$

Следовательно, для любого $\epsilon>0$ существует $\bar V=\max\{\tilde V,\tilde{\tilde V}\}$ такое, что для любого $V>\bar V$

$$-\epsilon^2 r(\tilde\gamma+\tilde\delta)M_1^2-2\kappa\le f_\infty[H_{\epsilon 0}]-f_V[H]\le 2\kappa . \quad (31)$$

Перепишем неравенство (31) для произвольного $V'>\bar{V}$, отличного от V,

$$-2\kappa \le f_{V'}[H] - f_\infty[H_{\epsilon 0}] \le \epsilon^2 r(\tilde{\gamma}+\tilde{\delta})M_1^2 + 2\kappa \; . \tag{32}$$

Складывая почленно неравенства (31) и (32), получаем следующее утверждение: для любого $\epsilon > 0$ для любого $\kappa > 0$ существует $\bar{V}$ такое, что для любых $V, V' > \bar{V}$

$$|f_V[H] - f_{V'}[H]| \le \epsilon^2 r(\tilde{\gamma}+\tilde{\delta})M_1^2 + 4\kappa \; ,$$

откуда, согласно признаку сходимости Больцано-Коши, следует, что функция свободной энергии $f_V[H]$ имеет предел при $V \to \infty$, который мы обозначим через $f_\infty[H]$. В таком случае мы можем совершить в неравенстве (24) предельный переход $V \to \infty$:

$$-\epsilon^2 r(\tilde{\gamma}+\tilde{\delta})M_1^2 \le f_\infty[H_{\epsilon 0}] - f_\infty[H] \le 0.$$

Поскольку и правая и левая части этого неравенства стремятся к нулю при $\epsilon \to 0$, находим, что существует предел функции $f_\infty[H_{\epsilon 0}]$ при $\epsilon \to 0$, причем он равен $f_\infty[H]$. Итак, мы доказали сейчас следующую теорему.

Теорема 2

Если операторы B_i , D_i , T_2 имеют вид (2), причем выполняются неравенства (7), (8), операторы A_i , C_i , G_i , T_1 удовлетворяют условиям (3)-(6), и если при любом достаточно малом $\epsilon > 0$ существует предел функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана $f_V[H_{\epsilon 0}(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{g})]$ при $V \to \infty$,

то существует предел функции свободной энергии исходного модельного гамильтониана $f_V[H]$ при $V \to \infty$, который равен $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\lim\limits_{V\to\infty}\{f_V[H_{\epsilon 0}(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{g})]\}$:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\epsilon 0}(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{g})] - f_V[H] \underset{V\to\infty}{\to} 0. \tag{33}$$

Пусть теперь при любых a_i , b_i , c_i , d_i , g_i , для любого достаточно малого $\epsilon > 0$ существует предел $\lim\limits_{V\to\infty} f_V[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)]$. Предел этот будем обозначать через $f_\infty[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)]$. Следуя методу работы [3], можно показать, что решение $\bar{a}_i^\infty$, $\bar{b}_i^\infty$, $\bar{c}_i^\infty$, $\bar{d}_i^\infty$, $\bar{g}_i^\infty$ минимаксной задачи

$$f_\infty[H_{\epsilon 0}(\bar{a}^\infty,\bar{b}^\infty,\bar{c}^\infty,\bar{d}^\infty,\bar{g}^\infty)] = \min_{a,c,g}\max_{b,d} f_\infty[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)]$$

существует, причем оно лежит в области

$$|a_i| \le \epsilon M_1 + \frac{1}{\epsilon}L_1 \; , \quad |c_i| \le \epsilon M_1 + \frac{1}{\epsilon}L_1, \; |g_i| \le M_1$$

$$|b_i| \le L_1, \; |d_i| \le L_1,$$

(которую мы обозначим через Y), и что справедливо следующее неравенство:

$$\delta_\epsilon(1/V) - \kappa_\epsilon(1/V) \le f_\infty[H_{\epsilon 0}(\bar{a}^\infty,\bar{b}^\infty,\bar{c}^\infty,\bar{d}^\infty,\bar{g}^\infty)] - f_V[H_\epsilon] \le \delta'_\epsilon(1/V) + \kappa_\epsilon(1/V) \; , \tag{34}$$

где

$$\kappa_\epsilon(1/V) = \max_{(a,b,c,d,g)\in Y} |f_V[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)] - f_\infty[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)]| \to 0$$

при $V \to \infty$ что для любого $\epsilon > 0$.

Складывая почленно неравенства (25) и (34), найдем

$$\delta_\epsilon(1/V) - \kappa_\epsilon(1/V) - \epsilon^2 \cdot r(\tilde{\gamma}+\tilde{\delta})M_1^2 \le f_\infty[H_{\epsilon 0}(\bar{a}^\infty,\bar{b}^\infty,\bar{c}^\infty,\bar{d}^\infty,\bar{g}^\infty)] - f_V[H] \le \delta'_\epsilon(1/V) + \kappa_\epsilon(1/V) \; .$$

Отсюда точно так же, как в доказательстве теоремы II, можно показать, что существует предел

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H] = f_\infty[H] \; .$$

Следовательно, мы можем совершить в неравенстве (35) предельный переход $V \to \infty$. Переходя далее в полученном неравенстве к пределу $\epsilon \to 0$, находим, что предел функции $f_V[H_{\epsilon 0}(\bar{a}^\infty,\bar{b}^\infty,\bar{c}^\infty,\bar{d}^\infty,\bar{g}^\infty)]$ при $\epsilon \to 0$ существует и равен $f_\infty[H]$:

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_\infty[H_{\epsilon 0}(\bar{a}^\infty,\bar{b}^\infty,\bar{c}^\infty,\bar{d}^\infty,\bar{g}^\infty)] - f_\infty[H] = 0.$$

Таким образом, резюмируя полученные сейчас результаты, убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

Теорема 3

Если операторы B_i, D_i, T_2 имеют вид (2), причем выполняются неравенства (7), (8), операторы A_i, C_i, G_i, T_1 удовлетворяют условиям (3), (6), и, если при любом достаточно малом $\epsilon>0$ существует предел функции свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана

$$\lim_{V\to\infty} f_V[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)] = f_\infty[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)], \qquad (36)$$

то

1) для этой предельной функции существует решение следующей минимаксной задачи:

$$f_\infty[H_{\epsilon 0}(\bar{a}^\infty,\bar{b}^\infty,\bar{c}^\infty,\bar{d}^\infty,\bar{g}^\infty)] = \min_{a,c,g}\max_{b,d} f_\infty[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)],$$

причем это решение лежит в следующей области:

$$|a_i| \le \epsilon M_1 + \frac{1}{\epsilon} L_1, \quad |c_i| \le \epsilon M_1 + \frac{1}{\epsilon} L_1,$$
$$|g_i| \le M_1, \quad |b_i| \le L_1, \quad |d_i| \le L_1. \qquad (38)$$

2) Предельное значение при $V\to\infty$ свободной энергии исходного модельного гамильтониана существует и равняется

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_\infty[H_{\epsilon 0}(\bar{a}^\infty,\bar{b}^\infty,\bar{c}^\infty,\bar{d}^\infty,\bar{g}^\infty)]:$$
$$-\epsilon^2 r(\tilde{\gamma}+\tilde{\delta})M_1^2 \le f_\infty[H_{\epsilon 0}(\bar{a}^\infty,\bar{b}^\infty,\bar{c}^\infty,\bar{d}^\infty,\bar{g}^\infty)] - \lim_{V\to\infty} f_V[H] \le 0. \qquad (39)$$

§3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе, как и в предшествующих /9,10/, установлен и исследован класс точно решаемых модельных задач с "перекрестным" взаимодействием, причем в гамильтониан могут также входить и члены с отрицательным взаимодействием. Путем введения в исходный модельный гамильтониан дополнительных членов с параметром включения ϵ был построен аппроксимирующий гамильтониан $H_{\epsilon 0}(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{g})$, где постоянные $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$, $\bar{d}_i$, $\bar{g}_i$ определяются из условия минимакса. Доказана близость в термодинамическом пределе свободных энергий этих гамильтонианов при $\epsilon\to+0$.

Основным итогом данных работ являются теоремы I–III. Следует отметить, что в то время, как в теоремах I – II для вычисления в термодинамическом пределе функции свободной энергии исходного гамильтониана H постоянные $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$, $\bar{c}_i$, $\bar{d}_i$, $\bar{g}_i$ определяются при конечном объеме V и затем функция $f_V[H_{\epsilon 0}(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d},\bar{g})]$ устремляется к пределу $V\to\infty$, в теореме III эти параметры порядка находят, исходя уже из предельного $(V\to\infty)$ выражения для свободной энергии.

Предложенный подход, называемый авторами ϵ -процедурой, может быть использован для исследования квантово-статистических систем других типов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Боголюбов (мл.). Вестник МГУ, сер. физ. астр., №1, 1966.
2. Н.Н.Боголюбов (мл.) Physica, 32, 933, 1966.
3. Н.Н.Боголюбов (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. М., Наука, 1974.
4. Н.Н.Боголюбов (мл.). ИТФ-68-65, Киев, 1968.
5. Н.Н.Боголюбов (мл.). ЯФ, 10, 425, 1969.
6. Н.Н.Боголюбов (мл.), В.Н.Плечко. ОИЯИ, Р4-8491, Дубна, 1974.
7. Н.Н.Боголюбов (мл.), В.Н.Плечко. ICTP-75-68, Trieste, 1975.
8. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.М.Курбатов, В.Н.Плечко. ОИЯИ, Д17-9737, Дубна, 1976.
9. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. ОИЯИ, Р17-9774, Дубна, 1976.
10. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. ОИЯИ, Р17-9775, Дубна, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 мая 1976 года.