СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р17 - 9774

Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов

КЛАСС ТОЧНО РЕШАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ С ПЕРЕКРЕСТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ.

1. Аппроксимация гамильтониана

1976

P17 - 9774

Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов

КЛАСС ТОЧНО РЕШАЕМЫХ МОДЕЛЕЙ С ПЕРЕКРЕСТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ.

1. Аппроксимация гамильтониана

§1. ВВЕДЕНИЕ

Невозможность отыскания точного решения для большинства задач статистической механики приводит к необходимости использования для их решения различных приближенных методов. К сожалению, вопрос о правомерности того или иного приближения остается, как правило, открытым. Именно поэтому в современной статистической механике существенное внимание уделяется так называемым точно решаемым моделям и развитию методов строгого исследования статистических систем в целом.

В этом направлении значительный прогресс был достигнут в рамках метода аппроксимирующих гамильтонианов /1–3/, с помощью которого удается получить точное в термодинамическом пределе решение для ряда нетривиальных модельных систем и при этом отделить погрешности при постановке задачи от погрешностей решения, если на некоторой стадии вычисления являются приближенными.

Более того, этот метод позволяет строго установить и детально исследовать целые классы модельных гамильтонианов, что представляет особый интерес ввиду того, что условия, требуемые при рассмотрении, являются достаточно общими и, следовательно, удается с единой точки зрения описывать качественно разные статистические системы. В схеме метода аппроксимирующих гамильтонианов изучены следующие классы модельных задач: класс точно решаемых моделей с отрицательным /2/ и положительным четырехфермионным взаимодействием /4,5/, класс гамильтонианов с положительным взаимодействием с источниками [6], класс статистических систем, взаимодействующих с бозонным полем [7,8].

В настоящей работе исследуется класс модельных систем с перекрестным взаимодействием (взаимодействие типа $AB^+ + A^+B$) причем в модельный гамильтониан могут дополнительно входить и члены с отрицательным взаимодействием. Анализ класса проводится на основе процедуры, называемой авторами ϵ -процедурой: для построения аппроксимирующего гамильтониана вводятся дополнительные члены с положительным параметром ϵ, что дает возможность путем замены операторных переменных выделить члены с отрицательным и положительным взаимодействиями; для вычисления в термодинамическом пределе свободной энергии и статистических средних исходного модельного гамильтониана в соответствующих выражениях для аппроксимирующего гамильтониана следует перейти к пределу $\epsilon \to +0$.

§2. КЛАСС МОДЕЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ

Будем рассматривать следующий класс модельных гамильтонианов:

$$H = T_1 + T_2 - V\sum_{i=1}^{r}\{\gamma_i(A_iB_i^+ + A_i^+B_i) + 2\delta_iC_iD_i + \eta_iA_i^+ + \eta_i^+A_i + \xi_iC_i + \xi_i^+C_i + \nu_iB_i^+ + \nu_i^+B_i + \mu_iD_i + \mu_i^+D_i - V\sum_{i=r+1}^{r+s}\{\omega_iG_iG_i^+ + \zeta_iG_i^+ + \zeta_i^+G_i\}, \qquad (1)$$

где V обозначает объем системы. Операторы B_i, D_i и T_2 являются комбинациями операторов Паули

$$B_i = \frac{1}{V}\sum_m \lambda_i^{(m)} S_m^-, \quad B_i^+ = \frac{1}{V}\sum_m \lambda_i^{(m)} S_m^+,$$
$$D_i = D_i^+ = \frac{1}{V}\sum_m \rho_i^{(m)} S_m^z, \quad S_m^z = \frac{1}{2} - S_m^- S_m^+, \qquad (2)$$
$$T_2 = \sum_m T_m S_m^+ S_m^-,$$

($\lambda_i^{(m)}$, $\rho_i^{(m)}$, T_m - вещественные числа).

Говоря, что операторы $S_m^{\pm}$ являются операторами Паули, мы подразумеваем, что они удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$S_m^-S_n^+ - S_n^+S_m^- = (1-2S_m^+S_m^-)\delta_{nm}, \quad S_m^-S_n^- - S_n^-S_m^- = 0,$$
$$S_m^+S_n^+ - S_n^+S_m^+ = 0, \quad S_m^-S_m^- = S_m^+S_m^+ = 0. \qquad (3)$$

Из (3) легко получить еще некоторые свойства $S_m^{\pm}$, S_m^z, которые будут полезны нам в дальнейшем, а именно:

$$[S_m^z, S_n^+] = S_m^+\delta_{mn}, \quad [S_m^z, S_n^-] = -S_m^-\delta_{mn}, \quad S_m^zS_m^z = 1/4,$$
$$S_m^-S_m^z = \frac{1}{2}S_m^-, \quad S_m^zS_m^+ = \frac{1}{2}S_m^+, \quad S_m^{\pm}S_m^z + S_m^zS_m^{\pm} = 0. \qquad (4)$$

Операторы T_1, A_i, C_i, G_i являются квадратичными формами по некоторым операторам рождения и уничтожения, причем они не зависят от $S_m^{\pm}$. Требование эрмитовости гамильтониана (1) накладывает следующие условия:

$$T_1^+ = T_1, \quad C_i^+ = C_i, \quad i = 1,2,\ldots,r. \qquad (5)$$

Операторы T_1 и T_2 имеют физический смысл собственной энергии, члены $A_iB_i^+$, $A_i^+B_i$, C_iD_i, $G_iG_i^+$ описывают взаимодействие в системе, слагаемые вида $\eta_iA_i^+ + \eta_i^+A_i$ и т.п. представляют собой "члены с источниками".

Примером взаимодействия, описываемого гамильтонианом из класса (1), может служить гамильтониан, используемый для описания явления сосуществования сверхпроводимости и ферромагнетизма в сверхпроводящих сплавах и являющийся комбинацией модели БКШ и модели Вонсовского - Зинера [9,10]. В этом случае

$$\lambda_1^{(m)} = \begin{cases} v/c, & m \le V/v \\ 0, & m > V/v \end{cases}, \qquad \rho_1^{(m)} = \begin{cases} v/c, & m \le V/v \\ 0, & m > V/v, \end{cases}$$

$r = 1,\ s = 1, \quad T_2 = 0,$

где v – объем, занимаемый одним узлом решетки сверхпроводника, c – концентрация магнитной примеси; $S_m^{(i)}$ $(i = x, y, z)$ – операторы проекции магнитного момента примеси в m-ом узле, $S_m^{\pm} = S_m^x \pm S_m^y$,

$$A_1 = \frac{v}{V} \sum_k a_{k+}^+ a_{k+}, \qquad C_1 = \frac{v}{2V} \sum_k (a_{k+}^+ a_{k+} - a_{k-}^+ a_{k-}),$$

$$G_1 = \frac{v}{V} \sum_k a_{k+}^+ a_{-k-}^+, \quad \gamma_1 = \delta_1 = Jc, \quad \omega_1 = I,$$

$a_{k\sigma}^+$, $a_{k\sigma}$ являются, соответственно, операторами рождения и уничтожения электронов с импульсом, равным k, и проекцией спина на ось z, равной σ.

Однако для построения аппроксимирующего гамильтониана и проведения всех дальнейших рассуждений нам не потребуется знания явного вида операторов A_i, B_i, C_i, D_i, G_i, T_1, T_2 и чисел r, s, γ_i, δ_i, ω_i. Достаточно наложить следующие общие условия:

$$\|A_i\| \le M_1, \quad \|C_i\| \le M_1, \quad \|G_i\| \le M_1, \tag{7}$$

$$\|[T_1, A_i]\| \le M_2, \quad \|[T_1, C_i]\| \le M_2, \quad \|[T_1, G_i]\| \le M_2, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
\|[A_j, A_i]\| \le M_3/V, \quad \|[A_j^+, A_i]\| \le M_3/V, \\
\|[C_j, C_i]\| \le M_3/V, \quad \|[G_j, G_i]\| \le M_3/V, \\
\|[G_j^+, G_i]\| \le M_3/V, \quad \|[A_j, C_i]\| \le M_3/V, \\
\|[A_j, G_i]\| \le M_3/V, \quad \|[A_j^+, G_i]\| \le M_3/V, \\
\|[C_j, G_i]\| \le M_3/V,
\end{gathered} \tag{9}$$

где M_1, M_2, M_3 – постоянные, не зависящие от V. Через $\|..\|$ обозначена норма соответствующих операторов.

Предположим, что свободная энергия

$$f_V[H] = -\frac{\theta}{V} \ln \operatorname{Sp} e^{-\frac{H}{\theta}} \tag{10}$$

для гамильтониана $H = T_1$ также ограничена постоянной, не зависящей от V:

$$f_V[T_1] \le M_0, \tag{11}$$

и что s и r – фиксированные числа. Кроме того, потребуем, чтобы

$$\frac{1}{V} \sum_m |\lambda_i^{(m)}| \le L_1, \quad \frac{1}{V} \sum_m |\rho_i^{(m)}| \le L, \quad i = 1, 2, \dots, r \tag{12}$$

и чтобы

$$|\lambda_i^{(m)}| \le L, \quad |\rho_i^{(m)}| \le L, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad |T_m| \le L \tag{13}$$

для любого V, причем L и L_1 – постоянные, не зависящие от V.

§3. ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ГАМИЛЬТОНИАНА

Для дальнейшего введем в гамильтониан (1) вспомогательные члены

$$-V \sum_{i=1}^{r} \epsilon^2 \{ \gamma_i A_i A_i^+ + \delta_i C_i C_i^+ \}, \tag{14}$$

где ϵ – произвольное вещественное число, большее нуля. В таком случае получим гамильтониан

$$\begin{aligned}
H_\epsilon = T_1 + T_2 - V \sum_{i=1}^{r} \{ & \gamma_i [(\epsilon A_i + \tfrac{1}{\epsilon} B_i)(\epsilon A_i^+ + \tfrac{1}{\epsilon} B_i^+) - \\
& - \tfrac{1}{\epsilon^2} B_i B_i^+] + \delta_i [(\epsilon C_i + \tfrac{1}{\epsilon} D_i)(\epsilon C_i^+ + \tfrac{1}{\epsilon} D_i^+) - \tfrac{1}{\epsilon^2} D_i D_i^+] + \\
& + \eta_i A_i^+ + \eta_i^+ A_i + \xi_i C_i^+ + \xi_i^+ C_i + \nu_i B_i^+ + \nu_i^+ B_i + \mu_i D_i^+ + \mu_i^+ D_i \} -
\end{aligned}$$

$$-V\sum_{i=r+1}^{r+s}\{\omega_i G_i G_i^{+}+\zeta_i G_i^{+}+\zeta_i^{+}G_i\}= \tag{15}$$

$$=T'-V\sum_{i=1}^{r}\{\gamma_i(\epsilon A_i+\frac{1}{\epsilon}B_i)(\epsilon A_i^{+}+\frac{1}{\epsilon}B_i^{+})+$$

$$+\delta_i(\epsilon C_i+\frac{1}{\epsilon}D_i)(\epsilon C_i^{+}+\frac{1}{\epsilon}D_i^{+})+\eta_i(\epsilon A_i+\frac{1}{\epsilon}B_i)+$$

$$+\eta_i^{+}(\epsilon A_i+\frac{1}{\epsilon}B_i)+\xi_i(\epsilon C_i^{+}+\frac{1}{\epsilon}D_i^{+})+\xi_i^{+}(\epsilon C_i+\frac{1}{\epsilon}D_i)\}- \tag{16}$$

$$-V\sum_{i=r+1}^{r+s}\{\omega_i G_i G_i^{+}+\zeta_i G_i^{+}+\zeta_i^{+}G_i\},$$

где

$$T'=T_1+T_2+\frac{1}{\epsilon^2}V\sum_{i=1}^{r}\{\gamma_i B_i B_i^{+}+\delta_i D_i D_i^{+}\}-$$

$$-V\sum_{i=1}^{r}\{\eta_i(1-\epsilon)A_i^{+}+\eta_i^{+}(1-\epsilon)A_i+\xi_i(1-\epsilon)C_i^{+}+\xi_i^{+}(1-\epsilon)C_i+ \tag{17}$$

$$+\nu_i(1-\frac{\eta_i}{\nu_i}\frac{1}{\epsilon})B_i^{+}+\nu_i^{+}(1-\frac{\eta_i^{+}}{\nu_i^{+}}\frac{1}{\epsilon})B_i+\mu_i(1-\frac{\xi_i}{\mu_i}\frac{1}{\epsilon})D_i^{+}+$$

$$+\mu_i^{+}(1-\frac{\xi_i^{+}}{\mu_i^{+}}\frac{1}{\epsilon})D_i\ .$$

Оценим нормы операторов $\epsilon A_i^{\#}+\frac{1}{\epsilon}B_i^{\#}$, $\epsilon C_i+\frac{1}{\epsilon}D_i$, $G_i^{\#}$, T' и нормы их коммутаторов. Для этого сначала произведем соответствующие оценки для операторов $B_i^{\#}$ и D_i *:

$$\|B_i\|\le\frac{1}{V}\sum_m|\lambda_i^{(m)}|\cdot\|S_m^{-}\|,$$

$$\|D_i\|\le\frac{1}{V}\sum_m|\rho_i^{(m)}|\cdot\|S_m^{z}\|\ .$$

---

*Символ # обозначает наличие знака эрмитова сопряжения или его отсутствие.

Учитывая условия (12) и то, что

$$\|S_m^{-}\|\le 1\,,\quad \|S_m^{z}\|\le 1/2\,, \tag{18}$$

имеем

$$\|B_i\|\le L_1\,,\quad \|D_i\|\le L_1\,,\quad i=1,2,\ldots,r\,. \tag{19}$$

Далее,

$$\|[B_j\,,B_i]\|=0,\quad \|[D_j\,,D_i]\|=0, \tag{20}$$

$$\|[B_j^{+},B_i]\|\le\sum_{\ell,m}\frac{1}{V}|\lambda_j^{(\ell)}|\,\frac{1}{V}|\lambda_i^{(m)}|\,\|[S_\ell^{+},S_m^{-}]\|=$$

$$=\frac{1}{V}\cdot\frac{1}{V}\sum_{\ell,m}|\lambda_j^{(\ell)}|\,|\lambda_i^{(m)}|\cdot 2\|S_m^{z}\|\,\delta_{\ell m}\le\frac{1}{V}\cdot\frac{1}{V}\sum_m|\lambda_j^{(m)}|\,|\lambda_i^{(m)}|\le \tag{21}$$

$$<\frac{1}{V}\max_m\{|\lambda_i^{(m)}|\}\cdot\frac{1}{V}\sum_m|\lambda_j^{(m)}|\le L\,L_1/V\ .$$

(22)

$$\|[D_j\,,B_i]\|\le\sum_{\ell,m}\frac{1}{V}|\rho_j^{(\ell)}|\,\frac{1}{V}|\lambda_i^{(m)}|\,\|[S_\ell^{z}\,,S_m^{-}]\|=$$

$$=\frac{1}{V}\cdot\frac{1}{V}\sum_{\ell,m}|\rho_j^{(\ell)}|\,|\lambda_i^{(m)}|\,\|S_m^{-}\|\,\delta_{\ell m}\le\frac{1}{V}\cdot\frac{1}{V}\sum_m|\rho_j^{(m)}|\,|\lambda_i^{(m)}|< \tag{23}$$

$$\le\frac{1}{V}\max_m\{|\lambda_i^{(m)}|\}\,\frac{1}{V}\sum_m|\rho_j^{(m)}|\le L L_1\ /V\ .$$

$$\|[T_2\,,B_i]\|\le\sum_{\ell,m}|T_\ell|\,\frac{1}{V}|\lambda_i^{(m)}|\,\|[S_\ell^{z}\,,S_m^{-}]\|=$$

$$=\frac{1}{V}\sum_{\ell,m}|T_\ell|\,|\lambda_i^{(m)}|\,\|S_m^{-}\|\,\delta_{\ell m}\le\frac{1}{V}\sum_m|T_m|\,|\lambda_i^{(m)}|\le$$

$$\le\max_m\{|T_m|\}\,\frac{1}{V}\sum_m|\lambda_i^{(m)}|\le L L_1\ .$$

$$\|[T_2, D_i]\| \le \sum_{\ell, m} |T_\ell| \, |\frac{1}{V}| \, |\rho_i^{(m)}| \, \|[S_\ell^z, S_m^z]\| = 0. \qquad (24)$$

При выводе (20)-(24) были использованы неравенства (5) и условия (12) и (13). Очевидно, что

$$\|\epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i\| \le \epsilon \|A_i\| + \frac{1}{\epsilon} \|B_i\|$$

$$\|\epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon} D_i\| \le \epsilon \|C_i\| + \frac{1}{\epsilon} \|D_i\|.$$

Учитывая (19) и условия (7), имеем

$$\begin{aligned} &\|\epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i\| \le \epsilon M_1 + \frac{1}{\epsilon} L_1, \\ &\|\epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon} D_i\| \le \epsilon M_2 + \frac{1}{\epsilon} L_1, \qquad (25) \\ &\|G_i\| \le M_1. \end{aligned}$$

Далее,

$$\|[T', \epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i]\| \le \epsilon \|[T_1, A_i]\| + V \sum_{j=1}^{r} \{ |\eta_j| (1-\epsilon) \epsilon \times$$

$$\times \|[A_j^+, A_i]\| + |\eta_j^+| (1-\epsilon) \epsilon \|[A_j, A_i]\| + 2 |\xi_i| (1-\epsilon) \epsilon \times$$

$$\times \|[C_j, A_i]\| + \frac{1}{\epsilon^3} \gamma_j \|[B_j B_j^+, B_i]\| + \frac{1}{\epsilon^3} \delta_j \|[D_j D_j, B_i]\| +$$

$$+ \frac{1}{\epsilon} |\nu_j| (1 - |\frac{\eta_i}{\nu_j}| \frac{1}{\epsilon}) \times \|[B_j, B_i]\| + \frac{1}{\epsilon} |\nu_j^+| (1 - |\frac{\eta_j^+}{\nu_j^+}| \frac{1}{\epsilon}) \times$$

$$\times \|[B_j, B_i]\| + 2 \frac{1}{\epsilon} |\mu_j| (1 - |\frac{\xi_j}{\mu_j}| \frac{1}{\epsilon}) \|[D_j, B_i]\| + \frac{1}{\epsilon} \|T_2, B_i\| \}.$$

Принимая во внимание (8), (9), (20)-(24), а также, что

$$\|[B_j B_j^+, B_i]\| \le \|B_j [B_j^+, B_i]\| \le \|B_j\| \|[B_j^+, B_i]\| \le L L_1^2 / V,$$

$$\|[D_j D_j, B_i]\| \le 2 \|D_j\| \|[D_j, B_i]\| \le 2 L L_1^2 / V,$$

получаем

$$\|[T', \epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i]\| \le L_2, \qquad (26)$$

где L_2 – постоянная, не зависящая от V.

Аналогичным образом нетрудно показать, что

$$\|[T', \epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon} D_i]\| \le L_2, \quad \|[T', G_i]\| \le L_2. \qquad (27)$$

Из условий (9) и неравенств (20)-(24) также вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &\|[\epsilon A_j + \frac{1}{\epsilon} B_j, \epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i]\| \le L_3 / V, \\ &\|[\epsilon A_j^+ + \frac{1}{\epsilon} B_j^+, \epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i]\| \le L_3 / V, \\ &\|[\epsilon C_j + \frac{1}{\epsilon} D_j, \frac{1}{\epsilon} C_i + \frac{1}{\epsilon} D_i]\| \le L_3 / V, \qquad (28) \\ &\|[\epsilon A_j + \frac{1}{\epsilon} B_j, \epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon} D_i]\| \le L_3 / V, \\ &\|[\epsilon A_j + \frac{1}{\epsilon} B_j, G_i]\| \le L_3 / V, \quad \|[\epsilon A_j + \frac{1}{\epsilon} B_j, G_i]\| \le L_3 / V, \\ &\|[\epsilon C_j + \frac{1}{\epsilon} D_j, G_i]\| \le L_3 / V. \end{aligned}$$

Кроме того, условия (9)требуют

$$\|[G_j, G_i]\| \le L_3 / V, \quad \|[G_j^+, G_i]\| \le L_3 / V. \qquad (29)$$

Из (11) с помощью неравенств (7), (18), (19) легко получить

$$f_V[T'] \le L_0, \quad L_0 = \mathrm{const}. \qquad (30)$$

Как показано в работе /2/, из соотношений (25)-(29) следует асимптотическая близость свободных энергий для гамильтониана H_ϵ (16) и аппроксимирующего гамильтониана

$$H'_{\epsilon 0}(a,c,g) = T' - V \sum_{i=1}^{r} \{ \gamma_i a_i (\epsilon A_i^+ + \frac{1}{\epsilon} B_i^+) + \gamma_i a_i^+ (\epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i) -$$

$$- \gamma_i a_i a_i^+ + \delta_i c_i (\epsilon C_i^+ + \frac{1}{\epsilon} D_i^+) + \delta_i c_i^+ (\epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon} D_i) - \delta_i c_i c_i^+ +$$

$$+\eta_i(\epsilon A_i^+ + \frac{1}{\epsilon} B_i^+) + \eta_i^+(\epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i) + \xi_i(\epsilon C_i^+ + \frac{1}{\epsilon} D_i^+) +$$

$$+\xi_i^+(\epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon} D_i)\} - V \sum_{i=r+1}^{r+s} \{\omega_i g_i G_i^+ + \omega_i g_i^+ G_i - \omega_i g_i g_i^+ +$$

$$+\zeta_i G_i^+ + \zeta_i^+ G_i\} = T_1 + T_2 - V \sum_{i=1}^{r} \{\gamma_i a_i(\epsilon A_i^+ + \frac{1}{\epsilon} B_i^+) +$$

$$+\gamma_i a_i^+(\epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i) - \gamma_i a_i a_i^+ + \delta_i c_i(\epsilon C_i^+ + \frac{1}{\epsilon} D_i^+) + \tag{31}$$

$$+\delta_i c_i^+(\epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon} D_i) - \delta_i c_i c_i^+ + \eta_i A_i^+ + \eta_i^+ A_i + \xi_i C_i^+ + \xi_i^+ C_i\} -$$

$$-V \sum_{i=r+1}^{r+s} \{\omega_i g_i G_i^+ + \omega_i g_i^+ G_i - \omega_i g_i g_i^+ + \zeta_i G_i^+ + \zeta_i^+ G_i\} +$$

$$+V \sum_{i=1}^{r} \{\frac{1}{\epsilon^2} \gamma_i B_i B_i^+ + \frac{1}{\epsilon^2} \delta_i D_i D_i^+ - \nu_i B_i^+ - \nu_i^+ B_i - \mu_i D_i^+ -$$

$$-\mu_i^+ D_i\},$$

если постоянные a, c, g определяются из условия абсолютного минимума свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана $H'_{\epsilon 0}(a,c,g)$ в области всех комплексных переменных a_i, c_i, g_i:

$$0 \le \min_{a,c,g} f_V[H'_{\epsilon 0}(a,c,g)] - f_V[H_\epsilon] \le \delta'_\epsilon(1/V), \tag{32}$$

где $\delta'_\epsilon(1/V)$ стремится к нулю при V, стремящемся к бесконечности. Кроме того, используя результаты работы [2], нетрудно доказать, что $\delta'_{1/V^z}(1/V) \to 0$ при $V \to \infty$, если $0<z<1/19$. Далее, следуя методу работы [3], можно показать, что минимум свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана существует и достигается в некоторых точках $\tilde{a}_i$, $\tilde{c}_i$, $\tilde{g}_i$, причем

$$|\tilde{a}_i| \le \|\epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i\| \le \epsilon M_1 + \frac{1}{\epsilon} L_1,$$

$$|\tilde{c}_i| \le \|\epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon} D_i\| \le \epsilon M_1 + \frac{1}{\epsilon} L_1, \tag{33}$$

$$|\tilde{g}_i| \le \|G_i\| \le M_1.$$

В гамильтониан $H'_{\epsilon 0}(a,c,g)$ входят члены $B_i B_i^+$ и $D_i D_i$, которые делают невозможным вычисление свободной энергии этого гамильтониана. Поэтому для получения окончательного результата нам необходимо сделать еще один шаг аппроксимации. А именно, запишем гамильтониан (31) в виде

$$H'_{\epsilon 0}(a,c,g) = T(a,c,g) + V \sum_{i=1}^{r} \{\frac{1}{\epsilon^2} \gamma_i B_i B_i^+ +$$
$$+\frac{1}{\epsilon^2} \delta_i D_i D_i^+ - \nu_i B_i^+ - \nu_i^+ B_i - \mu_i D_i^+ - \mu_i^+ D_i\}, \tag{34}$$

где

$$T(a,c,g) = T_1 + T_2 - V \sum_{i=1}^{r} \{\gamma_i a_i(\epsilon A_i + \frac{1}{\epsilon} B_i) + \gamma_i a_i^+(\epsilon A_i^+ + \frac{1}{\epsilon} B_i^+) -$$
$$-\gamma_i a_i a_i^+ + \delta_i c_i(\epsilon C_i^+ + \frac{1}{\epsilon} D_i^+) + \delta_i c_i^+(\epsilon C_i + \frac{1}{\epsilon} D_i) - \tag{35}$$
$$-\delta_i c_i c_i^+ + \eta_i A_i^+ + \eta_i^+ A_i + \xi_i C_i^+ + \xi_i^+ C_i\} - V \sum_{i=r+1}^{r+s} \{\omega_i g_i G_i^+ + \omega_i g_i^+ G_i -$$
$$-\omega_i g_i g_i^+ + \zeta_i G_i^+ + \zeta_i^+ G_i\}.$$

Аппроксимирующий гамильтониан к $H'_{\epsilon 0}(a,c,g)$ возьмем в следующей форме:

$$H_{\epsilon 0}(a,\bar{b},c,\bar{d},g) = T(a,c,g) + V \sum_{i=1}^{r} \{\frac{1}{\epsilon^2} \gamma_i \bar{b}_i B_i^+ + \frac{1}{\epsilon^2} \gamma_i \bar{b}_i^+ B_i -$$
$$-\frac{1}{\epsilon^2} \gamma_i \bar{b}_i \bar{b}_i + \frac{1}{\epsilon^2} \delta_i \bar{d}_i D_i + \frac{1}{\epsilon^2} \delta_i \bar{d}_i^+ D_i - \frac{1}{\epsilon^2} \delta_i \bar{d}_i \bar{d}_i^+ - \tag{36}$$
$$-\nu_i B_i^+ - \nu_i^+ B_i - \mu_i D_i^+ - \mu_i^+ D_i\},$$

причем постоянные $\bar{b}_i$, $\bar{d}_i$ должны быть определены из условия абсолютного максимума свободной энергии аппроксимирующего гамильтониана $H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)$ по переменным b_i и d_i:

$$f_V[H_{\epsilon 0}(a,\bar{b},c,\bar{d},g)] = \max_{b,d} f_V[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)]. \tag{37}$$

Следуя методу работы [3], можно показать, что абсолютный максимум функции свободной энергии гамильтониана $H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)$ по переменным b_i и d_i существует и достигается в некоторых точках $\bar{b}_i$, $\bar{d}_i$ при любых фиксированных a_i, c_i, d_i, причем

$$|\bar{b}_i| \le \|B_i\| \le L_1 , \quad |\bar{d}_i| \le \|D_i\| \le L_1 \qquad (38)$$

также при любых a_i, c_i и g_i. Таким образом, постоянные $\bar{b}_i$ и $\bar{d}_i$ становятся функциями комплексных переменных a_i, c_i, g_i: $\bar{b}_i = \bar{b}_i(a_i, c_i, g_i)$, $\bar{d}_i = \bar{d}_i(a_i, c_i, g_i)$.

Таким образом, в настоящей работе найден способ аппроксимации, позволяющий использовать основную теорему метода [3] для получения оценок для функции свободной энергии.

Для модельной задачи (1) построен аппроксимирующий гамильтониан $H_{\epsilon 0}(a,\bar{b},c,\bar{d},g)$ (36), причем постоянные $\bar{b}_i$ и $\bar{d}_i$ должны быть определены из условия абсолютного максимума функции $f_V[H_{\epsilon 0}(a,b,c,d,g)]$ (37). Доказана асимптотическая близость свободных энергий вспомогательного гамильтониана H_ϵ и аппроксимирующего гамильтониана $H'_{\epsilon 0}(\tilde{a},\tilde{c},\tilde{g})$ (31), где постоянные $\tilde{a}_i$, $\tilde{c}_i$, $\tilde{g}_i$ определяются из условия абсолютного минимума его свободной энергии (32). Получен ряд неравенств (19)-(24) для операторов B_i, D_i, T_2. Последние два результата будут использованы при доказательстве термодинамической эквивалентности исходного модельного (1) и аппроксимирующего гамильтонианов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н.Боголюбов (мл.). Вестник МГУ, сер. физ. астр., №1, 1966.
2. Н.Н.Боголюбов (мл.). Physica, 32, 933, 1966.
3. Н.Н.Боголюбов (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. М., Наука, 1974.
4. Н.Н.Боголюбов (мл.). ИТФ-68-65, Киев, 1968.
5. Н.Н.Боголюбов (мл.). ЯФ, 10, 425 (1969).
6. Н.Н.Боголюбов (мл.), В.Н.Плечко. ОИЯИ, Р4-8491, Дубна, 1974.

7. Н.Н.Боголюбов (мл.), В.Н.Плечко. ICTP-75-68, Trieste, 1975.
8. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.М.Курбатов, В.Н.Плечко. ОИЯИ, Д17-9737, Дубна, 1976.
9. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов, ОИЯИ, Р4-9772, Дубна, 1976.
10. Н.Н.Боголюбов (мл.), А.Н.Ермилов, А.М.Курбатов. ОИЯИ, Р4-9773, Дубна, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 мая 1976 года.