СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р17 - 9762

Б.Н.Валуев

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКИ ИЗИНГА В ВИДЕ ПФАФФИАНА

1976

P17 - 9762

Б.Н.Валуев

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКИ ИЗИНГА В ВИДЕ ПФАФФИАНА

I. Точное решение двумерной модели Изинга, полученное впервые Онсагером[I], выводилось затем многими авторами и различными способами. Особое внимание привлекли подходы, связанные с использованием пфаффианов (см.[2,3,4]). Однако построение пфаффианов в этих подходах имеет скорее характер комбинаторной догадки, чем прямого вывода.

В настоящей заметке будет показано, что выражение для статистической суммы в виде некоторого пфаффиана весьма естественно следует из матричной формулировки задачи в форме, данной Кауфман[5] (см. также книгу[6]), если воспользоваться формулой Кайанелло[7] для следа произведения γ-матриц. Сначала мы рассмотрим прямоугольную решетку, для которой получающийся пфаффиан нетрудно вычислить. Это дает довольно простой и прямой вывод классической формулы Онсагера. Далее покажем, как представление в виде пфаффиана возникает для любой плоской решетки, которую можно получить из прямоугольной двумя операциями:

а) удалением связей б) стягиванием узлов, т.е. удалением связей с отождествлением "спиновых" переменных, соответствующих концам удаленной связи.

В приложении приведено определение и указаны основные свойства пфаффиана, используемые в этой заметке.

2. Рассмотрим прямоугольную решетку с размерами $p \times q$, где p - число узлов по вертикали, q - число узлов по горизонтали. Статистическая сумма в модели Изинга имеет вид

$$Q = \sum_{(s_{ik} = \pm 1)} e^{a \sum\limits_{i,k} s_{ik} s_{ik+1} + b \sum\limits_{i,k} s_{ik} s_{i+1k}} = \sum Q_s \tag{1a}$$

Здесь a, b – величины, зависящие от температуры. Переменная S_{ik} принимает значения ± 1 и соответствует узлу решетки, находящемуся в i-ой строке и k-ом столбце. Удобно добавить связи, превращающие прямоугольный кусок решетки в решетку на торе. Получающаяся статистическая сумма

$$Q(\tilde{b}) = \sum_S e^{a \sum_{i=1}^{p} S_{iq} S_{i1} + \tilde{b} \sum_{k=1}^{q} S_{pk} S_{1k}} \qquad (1б)$$

термодинамически эквивалентна исходной (1а), т.е.

$$\lim_{\substack{p \to \infty \\ q \to \infty}} \frac{\ln Q(\tilde{b})}{pq} = \lim_{\substack{p \to \infty \\ q \to \infty}} \frac{\ln Q}{pq} \quad (Q(\tilde{b}) \sim Q),$$

так как

$$Q e^{-|a|p - |\tilde{b}|q} \leq Q(\tilde{b}) \leq Q e^{|a|p + |\tilde{b}|q}.$$

Отметим, что в качестве статистической суммы можно рассматривать сумму

$$Q(\tilde{b}) + Q(-\tilde{b}), \qquad (2)$$

которая также эквивалентна исходной. Далее нам понадобится этот факт.

Будем считать, что $a > 0$, и используем матричную формулировку задачи в форме Кауфман [5,6]. В этом подходе статистическая сумма представляется в виде следа матрицы размерности 2^p:

$$Q(\tilde{b}) = (2 \operatorname{sh} 2a)^{\frac{pq}{2}} Sp(AB)^q, \qquad (3)$$

$$A = e^{i\vartheta(\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3\gamma_4 + \cdots \gamma_{2p-1}\gamma_{2p})}, \quad \operatorname{th}\vartheta = e^{-2a}, \qquad (3а)$$

$$B = e^{ib(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_4\gamma_5 + \cdots + \gamma_{2p}\gamma_1) - i\tilde{b} U \gamma_{2p}\gamma_1}. \qquad (3б)$$

Здесь γ_j $(j = 1, 2, \ldots 2p)$ – матрицы размерности 2^p, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}. \qquad (4)$$

Матрица U (аналог дираковской матрицы γ_5) обладает свойствами: $U^2 = 1$, $U\gamma_j + \gamma_j U = 0$.

При обычном подходе ищется наибольшее собственное значение матрицы AB (при $\tilde{b} = b$), что фактически требует исследования спектра собственных значений этой матрицы.

3. Мы будем вычислять след $Q(\tilde{b}) + Q(-\tilde{b})$. Как уже отмечалось, эта сумма термодинамически эквивалентна исходной. Предварительно докажем простое равенство

$$Q(\tilde{b}) + Q(-\tilde{b}) = \left[Q(\tilde{b}) + Q(-\tilde{b})\right]_{U=1}. \qquad (5)$$

Здесь сумма справа получается из суммы слева заменой матрицы U на единичную. Действительно, матрицу B можно представить в виде

$$B = (\operatorname{ch}\tilde{b} - iU\gamma_{2p}\gamma_1 \operatorname{sh}\tilde{b})\, B(\tilde{b} = 0).$$

Подставим это выражение в левую часть равенства (5) и рассмотрим по отдельности члены с четными и нечетными степенями $\operatorname{sh}\tilde{b}$. Члены с нечетными степенями уничтожатся, а в членах с четными степенями матрица U будет входить сомножителем четное число раз. Так как U коммутирует со всеми сомножителями и $U^2 = 1$, мы получаем такое же выражение, как и в правой части (5).

Таким образом, задача сводится к вычислению следов $Sp(AB_\pm)^q$, где

$$B_{\pm} = e^{\,ib(\gamma_2\gamma_3 + \gamma_4\gamma_5 + \cdots + \gamma_{2p-2}\gamma_{2p-1}) \pm ib\gamma_{2p}\gamma_1} .$$

Мы полагаем теперь $\tilde{b} = b$. Оба следа вычисляются одинаковым образом. Рассмотрим $Sp\,(AB_+)^q$. Вводя обозначения

$$th\,\vartheta = x\,,\quad th\,b = y\,,\quad \frac{Sp(\;)}{2^p} = \widetilde{Sp}(\;)\,,\quad 2^p(ch\vartheta\, ch b)^{pq} = D, \tag{6}$$

этот след можно записать в виде

$$Sp(AB_+)^q = D\,\widetilde{Sp}\,\{(1+ix\gamma_1\gamma_2)(1+ix\gamma_3\gamma_4)\cdots(1+ix\gamma_{2p-1}\gamma_{2p})\cdot(1+iy\gamma_2\gamma_3)(1+iy\gamma_4\gamma_5)\cdots(1+iy\gamma_{2p}\gamma_1)\}^q \tag{7a}$$

$$= D\,\widetilde{Sp}\,\{(\gamma_2+ix\gamma_1)\gamma_2(\gamma_4+ix\gamma_3)\gamma_4\cdots(\gamma_{2p}+ix\gamma_{2p-1})\gamma_{2p}\,\gamma_2(\gamma_2+iy\gamma_3)\gamma_4(\gamma_4+iy\gamma_5)\cdots\gamma_{2p}(\gamma_{2p}+iy\gamma_1)\}^q . \tag{7б}$$

Получилось выражение вида

$$\widetilde{Sp}\,\{\hat{P}_1\hat{P}_2\cdots\hat{P}_{2m}\}, \tag{8}$$

где $\hat{P}_k = \sum_{j=1}^{2p} P_k^j\gamma_j$, P_k^j – некоторые числа, m – целое. Такой след выражается через пфаффиан согласно формуле Кайанелло/7/, которая была получена им для дираковских матриц, но тривиально распространяется на случай γ-матриц произвольной размерности 2^p , поскольку при выводе этой формулы существенно используются лишь соотношения антикоммутации (4). Используя также известное свойство пфаффиана (формула П.5 приложения), имеем

$$\widetilde{Sp}\,\{\hat{P}_1\hat{P}_2\cdots\hat{P}_{2m}\} = Pf\,M = \pm\sqrt{Det\,M}\,, \tag{9}$$

где M – кососимметрическая матрица с элементами

$$M_{k\ell} = (P_k P_\ell) = \sum_{j=1}^{2p} P_k^j P_\ell^j \quad \text{при} \quad k<\ell\ .$$

Как видно из (7а), в нашем случае в равенстве (9) следует взять положительное значение корня.

4. Для упрощения вычислений выражение (7б) удобно переписать в виде

$$Sp\,(AB_+)^q = (\pm)D\,\widetilde{Sp}\,\{(\gamma_2+ix\gamma_1)(\gamma_4+ix\gamma_3)\cdots(\gamma_{2p}+ix\gamma_{2p-1})\cdot(\gamma_2+iy\gamma_3)(\gamma_4+iy\gamma_5)\cdots(\gamma_{2p}+iy\gamma_1)\}^q, \tag{10}$$

устранив множители $\gamma_2, \gamma_4, \cdots \gamma_{2p}$. Знаковый множитель $(\pm)$ несуществен, так как вычисляется квадрат пфаффиана. Кососимметрическую матрицу M, соответствующую следу (10), легко выписать:

$$M = \begin{Vmatrix} M_a & M_s & M_s & \cdots & M_s \\ -M_s & M_a & M_s & \cdots & M_s \\ -M_s & -M_s & M_a & \cdots & M_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -M_s & -M_s & -M_s & \cdots & M_a \end{Vmatrix} .$$

Эта матрица содержит q^2 блоков, каждый из которых имеет размерность $2p$:

$$M_a = \left\Vert\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & & -xy \\ -xy & 1 & & \\ & -xy & \ddots & \\ & & -xy & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} -1 & xy & & \\ & -1 & xy & \\ & & \ddots & xy \\ xy & & & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right\Vert , \quad M_s = \left\Vert\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1-x^2 & & \\ & 1-x^2 & \\ & & \ddots \\ & & & 1-x^2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & & & -xy \\ -xy & 1 & & \\ & -xy & \ddots & \\ & & -xy & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & -xy & & \\ & 1 & -xy & \\ & & \ddots & -xy \\ -xy & & & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1-y^2 & & \\ & 1-y^2 & \\ & & \ddots \\ & & & 1-y^2 \end{matrix} \end{array}\right\Vert .$$

Определитель $|M|$ сводится к произведению определителей путем преобразования матрицы M к квазидиагональному виду с помощью унитарных преобразований. Рассмотрим для этого матрицы C_+ и C_- размерности n :

$$
C_{\pm} = \left\| \begin{matrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} \\ \pm c_{n-1} & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-2} \\ \pm c_{n-2} & \pm c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-3} \\ \pm c_{n-3} & \pm c_{n-2} & \pm c_{n-1} & c_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & c_1 \\ \pm c_1 & \pm c_2 & \pm c_3 & & \pm c_{n-1} & c_0 \end{matrix} \right\| .
$$

Матрица C_+ (циркулянт) давно известна. Собственные значения $\lambda_{\pm}$ и собственные векторы этих матриц легко находятся, если заметить[2], что $C_{\pm} = \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell \omega_{\pm}^{\ell}$, где

$$
\omega_{\pm} = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ \pm 1 & & & & 0 \end{matrix} \right\| .
$$

Имеем

$$
(\lambda_+)_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell \alpha_k^{\ell}, \quad (\lambda_-)_k = \sum_{\ell=0}^{n-1} c_\ell \beta_k^{\ell}, \quad \alpha_k = e^{\frac{2\pi i}{n}k}, \quad \beta_k = e^{\frac{\pi i}{n}(2k+1)}, \qquad \text{(II)}
$$
$$
/ k = 0, 1, 2 \ldots n-1 /
$$

Если элементами матриц $C_{\pm}$ являются не числа, а матрицы, то выражения (II) определяют диагональные блоки эквивалентных квазидиагональных матриц.

Матрица M представляет собой частный случай блочной матрицы вида C_-, а блоки размерности p в матрицах M_a и M_s являются частными случаями матрицы C_+. Применяя формулы (II) и пользуясь перестановкой строк и столбцов, получаем, что $\mathrm{Det}\, M = \prod_{\ell=0}^{q-1} \prod_{k=0}^{p-1} D(k,\ell)$,

$$
D(k,\ell) = \mathrm{Det} \left\| \begin{matrix} (1-x^2)\sigma_\ell & (1-xy\bar{\alpha}_k)(\sigma_\ell+1) \\ (1-xy\alpha_k)(\sigma_\ell-1) & (1-y^2)\sigma_\ell \end{matrix} \right\| . \qquad \text{(I2)}
$$

$$
\alpha_k = e^{\frac{2\pi i}{p}k}, \quad \bar{\alpha}_k = e^{-\frac{2\pi i}{p}k}, \quad \sigma_\ell = \frac{1+\beta_\ell}{1-\beta_\ell} \cdot \quad \beta_\ell = e^{\frac{\pi i}{q}(2\ell+1)} .
$$

Полученное выражение после элементарных преобразований можно представить в виде

$$
\mathrm{Det}\, M = 2^{p(q-2)} \prod_{k,\ell} \left[(1+x^2)(1+y^2) - 4xy\cos\varphi_k - (1-x^2)(1-y^2)\cos\psi_\ell \right], \qquad \text{(I3)}
$$

$$
\varphi_k = \frac{2\pi k}{p}, \quad \psi_\ell = \frac{\pi}{q}(2\ell+1); \quad k = 0, 1, \ldots p-1; \; q = 0, 1, \ldots q-1,
$$

где выражение в квадратных скобках положительно, но может стремиться к нулю при $q \to \infty$, $x = y$. Условие $x = y$ определяет критическую температуру.

Отметим, что результат для второго следа $\widetilde{Sp}\,(AB_-)^q$ отличается лишь заменой $\varphi_k \to \tilde{\varphi}_k = \frac{\pi}{p}(2k+1)$ и поэтому дает такой же термодинамический предел, как и первый след. Это означает, что если в выражении (3) положить U =I, то получится эквивалентная статистическая сумма, а члены $e^{i(\ell,\gamma_p)_i}$ можно трактовать как некоторое сложное граничное условие. Независимость предельного результата от такого рода условий кажется оправданной из физических соображений, но доказательство может оказаться непростым делом (см. по этому поводу замечание Березина в работе[8]).

Если теперь выразить функции ϑ в (I3) через функции a $(\mathrm{sh}\,2\vartheta\,\mathrm{sh}\,2a = 1,\ \mathrm{ch}\,2\vartheta\,\mathrm{sh}\,2a = \mathrm{ch}\,2a)$, то получим для статистической суммы выражение

$$
Q \sim 2^{pq} \prod_{k,\ell} \sqrt{\mathrm{ch}\,2a\,\mathrm{ch}\,2b - \mathrm{sh}\,2a\cos\psi_\ell - \mathrm{sh}\,2b\cos\varphi_k},
$$

которое и ведет к формуле Онсагера.

5. Окончательный результат в случае прямоугольной решетки довольно просто следует из представления (9). Возможно, что аналогичное представление для других плоских решеток также окажется полезным.

Будем исходить из общего выражения вида (I), в котором каждой линии прямоугольной решетки поставлена в соответствие своя величина $a(ik, ik+1)$ или $b(ik, i+1k)$. Полагая некоторые из этих коэффициентов равными нулю, мы тем самым устраняем соответствующие связи. Если в прямоугольной решетке удалить соответствующие линии, то получится уже другая решетка. Так, если положить $p = 2p'$, $q = 2q'$ и в каждом нечетном столбце удалить нечетные вертикальные связи, а в каждом четном - четные связи, то получится решетка типа кирпичной кладки, которая эквивалентна гексагональной /2/.

Рассмотрим также замену множителя $e^{ass'}$ (или $e^{bss'}$) на множитель $\frac{1}{2}(1+ss')$, обладающий свойствами δ-функции:

$$\sum_{s'=\pm 1} \frac{1}{2}(1+ss')f(s') = f(s).$$

Эта операция эквивалентна устранению связи с отождествлением соответствующих узлов, т.е. может быть изображена в виде стягивания соседних узлов решетки в один. Если применить стягивание в приведенном выше примере, то получится треугольная решетка.

Комбинируя эти операции, можно получить довольно широкий класс плоских решеток, но нельзя таким путем прийти к решеткам с пересекающимися связями.

Пусть сначала все величины a и b в статистической сумме (I) различны и отличны от нуля $(a > 0)$. Тогда вместо выражения (3) будем иметь

$$Q(\tilde{b}) = \prod_{i,k} \sqrt{2\,\mathrm{sh}\,2a(ik, ik+1)} \cdot Sp\Big(\prod_{e=1}^{q} A_e B_e\Big), \qquad (I4)$$

где A_e и B_e имеют вид (3а) и (3б), но величины ϑ и b зависят от соответствующих индексов.

Нетрудно получить следующие правила.

Iа) Удаление a-связи (связи по горизонтали) соответствует замене множителя $\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,2a}\, e^{ia\gamma\gamma'}$ на $(1+i\gamma\gamma')$.

Iб) Удаление b-связи соответствует тому, что в (I4) соответствующий параметр b следует приравнять нулю.

2а) Стягивание соседних узлов по горизонтали соответствует замене $\sqrt{2\,\mathrm{sh}\,2a}\, e^{i\vartheta\gamma\gamma'}$ на I.

2б) Стягивание соседних узлов по вертикали соответствует замене $e^{ib\gamma\gamma'}$ на $\frac{1}{2}(1+i\gamma\gamma')$.

Для модифицированной таким путем статистической суммы остается справедливым равенство (5). Кроме того, сформулированные правила замены таковы, что по-прежнему возможно представление статистической суммы в виде (8). Итак, статистическую сумму любой решетки, которая получается из прямоугольной удалением связей и стягиванием узлов, можно записать в виде пфаффиана.

Отметим, однако, что представление в виде (8) еще не означает окончательного решения задачи. В каждом конкретном случае нетрудно выписать соответствующую матрицу M и представить $\mathrm{Det}\, M$ в виде произведения множителей $D(k,e)$ аналогично (I2). Так, в случае гексагональной решетки $D(k,e)$ - определитель 6-го порядка. Трудность состоит в том, что $D(k,e)$ по-разному зависит от α_k и β_e, что является следствием асимметрии матричного подхода. Это видно и на примере прямоугольной решетки (см. (12)), но в этом случае равноправие величин α_k и β_ℓ восстанавливается после элементарных преобразований.

Автор благодарен за обсуждение и замечания В.И.Огиевецкому, И.В.Полубаринову, В.Б.Приезжеву, А.Ульману и В.К.Федянину.

Приложение. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПФАФФИАНА

Удобно дать определение пфаффиана с помощью алгебры Грассмана (мы следуем Кайанелло/7/). Пусть $A = (a_{ij})$ – кососимметрическая матрица, $a_{ij} = -a_{ji}$. Введем форму $f = \sum\limits_{i,j=1}^{2m} a_{ij} x_i x_j$, где $x_1, x_2 \ldots x_{2m}$ – грассмановы переменные, подчиняющиеся ассоциативному закону умножения со свойством

$$x_i x_j = -x_j x_i \qquad (x_i^2 = 0). \tag{П.1}$$

Это свойство сохраняется при любом невырожденном линейном преобразовании грассмановых переменных. Рассмотрим m-ую степень формы f:

$$f^m = \sum_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_m j_m} x_{i_1} x_{j_1} \ldots x_{i_m} x_{j_m}. \tag{П.2}$$

В силу свойств умножения (П.1) в этой сумме отличны от нуля лишь члены с различными индексами, т.е. всего $(2m)!$ членов. Среди всех перестановок индексов перестановки пар индексов $i_\alpha j_\alpha \leftrightarrow i_\beta j_\beta$ (их $m!$) и перестановки индексов внутри каждой из пар $i_\alpha j_\alpha \leftrightarrow j_\alpha i_\alpha$ (их 2^m) дают одинаковые члены. Поэтому

$$f^m = 2^m \cdot m! \, Pf A \, x_1 x_2 \ldots x_{2m}, \tag{П.3}$$

где функция элементов кососимметрической матрицы $Pf A$ называется пфаффианом. Такое формальное алгебраическое определение $Pf A$ как коэффициента при $x_1 x_2 \ldots x_{2m}$ в выражении для $(2^m \cdot m!)^{-1} f^m$ удобно для вывода основных свойств пфаффиана[x)]. Так, исходя из (П.2), (П.3), имеем

$$Pf A = \frac{1}{2^m \cdot m!} \sum_{i_1 j_1 \ldots i_m j_m} \delta_p \, a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_m j_m},$$

где δ_p – четность перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & 2m \\ i_1 & j_1 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$, или

$$Pf A = \sum_{\substack{i_1 < j_1, \ldots i_m < j_m \\ i_1 < i_2 < \ldots < i_m}} \delta_p \, a_{i_1 j_1} \ldots a_{i_m j_m}. \tag{П.4}$$

Ясно, что $i_1 = 1$. Выражение (П.4) часто принимается за определение пфаффиана/3/ и имеет уже комбинаторный характер.

С помощью (П.3) нетрудно получить основное свойство пфаффиана

$$(Pf A)^2 = Det A. \tag{П.5}$$

---

x) Как указал автору В.И.Огиевецкий, пфаффиан можно определить также как $\int e^{f/2} (dx) = \int \frac{f^m}{2^m m!} (dx)$,

где интеграл по антикоммутирующим переменным понимается в смысле определения Березина (см./8/). Вывод (П.5), приводимый ниже, фактически совпадает с вычислением этого интеграла в работе/8/.

Рассмотрим невырожденное линейное преобразование грассмановых переменных: $x_i = \sum_k L_{ik} y_k$, $Det\, L \neq 0$. При этом

$$x_1 x_2 \dots x_{2m} = Det\, L\, y_1 y_2 \dots y_{2m},$$

$$f = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \sum_{k,e} \tilde{a}_{ke} y_k y_e, \quad \tilde{A} = (\tilde{a}_{ke}) = L^T A L.$$

Значок T означает транспонирование. Используя (П.3), получаем

$$Pf A\, x_1 x_2 \dots x_{2m} = Pf A\, Det L\, y_1 y_2 \dots y_{2m} = Pf \tilde{A}\, y_1 y_2 \dots y_{2m},$$

откуда

$$Pf(\tilde{A}) = Pf A \cdot Det L.$$

Если A – вещественная матрица, то ортогональным преобразованием ее можно преобразовать к нормальной форме (см. /9/)

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & \lambda_1 & & \\ -\lambda_1 & 0 & & \\ & & 0 & \lambda_2 \\ & & -\lambda_2 & 0 \\ & & & & \ddots \end{array} \right\| .$$

Это преобразование можно выбрать так, чтобы $det\, L = 1$. Тогда

$$Pf A\, x_1 x_2 \dots x_{2m} = Pf \tilde{A}\, y_1 y_2 \dots y_{2m} =$$
$$= \frac{1}{m!}(\lambda_1 y_1 y_2 + \dots + \lambda_m y_{2m-1} y_{2m})^m = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m y_1 y_2 \dots y_{2m}.$$

Так как $Det A = Det \tilde{A} = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m)^2$, получаем (П.5). Поскольку (П.5) есть соотношение между полиномами, то оно сохраняется и при комплексных a_{ij}.

Выведем теперь с помощью (П.4) формулу Кайанелло, использованную в тексте (см. (9)):

$$\widetilde{Sp}(\hat{P}_1 \hat{P}_2 \dots \hat{P}_{2m}) = Pf((P_i P_j)) \quad /i<j/. \qquad (\text{П}.6)$$

Из антикоммутационных соотношений для γ-матриц имеем хорошо известное равенство

$$\widetilde{Sp}(\hat{P}_1 \hat{P}_2 \dots \hat{P}_{2m}) = \sum_{k>1} (-1)^k (P_1 P_k)\, \widetilde{Sp}(\hat{P}_2 \dots \hat{P}_{k-1} \hat{P}_{k+1} \dots \hat{P}_{2m}). \qquad (\text{П}.7)$$

Замечая, что $(-1)^k$ равно четности перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2m \\ 1 & k & \dots & 2m \end{pmatrix}$ и применяя m раз формулу (П.7), имеем

$$\widetilde{Sp}(\hat{P}_1 \hat{P}_2 \dots \hat{P}_{2m}) = \sum{}' \delta_P (P_1 P_{j_1})(P_{i_2} P_{j_2}) \dots (P_{i_m} P_{j_m}),$$

где δ_P есть четность перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 2m \\ 1 & j_1 & i_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$.

Из способа получения этой формулы ясно, что сумма распространяется лишь на значения, ограниченные неравенствами

$$1 < i_2 < \dots < i_m,$$
$$1 < j_1, \; i_2 < j_2, \dots \; i_m < j_m.$$

Поскольку при такой редукции получается $(2m-1)!! = \frac{(2m)!}{2^m m!}$ формально различных членов, суммирование распространяется на все значения индексов, удовлетворяющих указанным неравенствам. Сравнение с (П.4) дает (П.6).

Л и т е р а т у р а

I. L.Onsager. Phys. Rev., 65, 117 (1944).

2. H.S.Green, C.A.Hurst. Order-Disorder Phenomena, Interscience Publishers, 1964.

3. Э.Монтролл. Статистика решеток. Статья в сборнике "Прикладная комбинаторная математика". Изд-во "Мир", I968.

4. Ф.Дайсон, Э.Монтролл, М.Кац, М.Фишер. Устойчивость и фазовые переходы. Изд-во "Мир", I973. (Лекции Э.Монтролла по модели Изинга).

5. B.Kaufmann. Phys. Rev., 76, 1232 (1949).

6. К.Хуанг. Статистическая механика. Изд-во "Мир", I966.

7. R.E.Caianiello. Nuovo Cim. Suppl., 14, 177 (1959).

8. Ф.А.Березин. УМН, т. XXIУ, вып. 3, 3(I969).

9. Ф.Р.Гантмахер. Теория матриц. Изд-во "Наука", I967.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 мая I976 года.