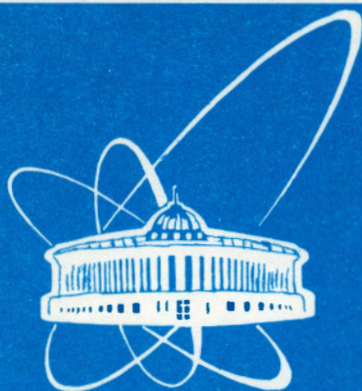


97-405



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P17-97-405

Б.В.Васильев*

МОДЕЛЬ ЗЕМЛИ,
ПОСТРОЕННАЯ МЕТОДОМ
МИНИМИЗАЦИИ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ

*Институт физико-технических проблем, 141980, Дубна, Россия

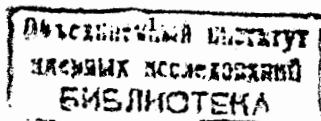
1997

1. Введение

Измерения показывают, что по мере удаления от поверхности вглубь Земли плотность ее вещества растет сначала более или менее монотонно, а при переходе внутрь ядра - скачком. Существует ряд моделей Земли [1, 2], описывающих этот рост, объясняющих причину разделения материи внутри Земли на ядро и мантию и определяющих величину скачка плотности на их границе.

Особняком стоит модель, объясняющая происхождение земного магнетизма. Эта модель базируется на общепринятой в настоящее время гидродинамической гипотезе, разработанной в 40-50 годы нашего столетия. Основная задача, которую пытается решить эта модель, - это получить ответ на вопрос: почему главное магнитное поле Земли, имеет вблизи полюсов величину порядка одного эрстеда? Такая формулировка основной задачи модели земного магнетизма в настоящее время представляется неприемлемой, так как начавшиеся в 60-ые годы космические полеты и дальнейшее развитие наземной астрономии позволили к настоящему времени получить данные о магнитных полях всех планет Солнечной системы, некоторых их спутников и целого ряда звезд. При этом обнаружился замечательный неизвестный ранее факт: магнитные моменты всех космических тел, для которых они были измерены, оказались пропорциональны их собственным моментам вращения, а коэффициент пропорциональности почти одинаков и примерно равен $G^{1/2}/c$ (G -гравитационная постоянная, c -скорость света) (рис. 1) [3, 4]. Причем линейность этой зависимости сохраняется в пределах двадцати (!) порядков изменения самих величин моментов. Этот факт заставляет переформулировать главную задачу модели земного магнетизма - она должна объяснять, во-первых, почему магнитный момент Земли, как и других космических тел, пропорционален ее моменту вращения и, во-вторых, почему коэффициент пропорциональности близок к указанному отношению мировых констант.

Цель настоящей работы - показать, что построение такой модели возможно методом минимизации полной энергии. Эта модель позволяет по-новому взглянуть на разделение Земли на ядро и мантию, что позволяет изжить те недостатки, которые связаны с независимым существованием разных моделей, касающихся этого вопроса.



2. Уравнение состояния

Первой задачей построения модели Земли является нахождение зависимости плотности вещества внутри нее $\gamma(r)$. Для нахождения этой зависимости необходимо определить уравнение равновесия сил, приложенных к веществу, и уравнение состояния вещества, т.е. зависимость его плотности от давления. Будем исходить из того, что при малых давлениях зависимость плотности вещества от давления описывается законом Гука

$$\gamma = \gamma_0 \left(\frac{1}{1 - p/B} \right), \quad (1)$$

т.е. при малых давлениях уравнение состояния есть

$$p = B (1 - \gamma_0/\gamma). \quad (2)$$

Здесь γ_0 - плотность вещества при нулевом давлении;

B - модуль упругого сжатия вещества.

При высоких давлениях модуль упругого сжатия сам начинает зависеть от плотности. Эту зависимость можно описать политропной функцией

$$B = \alpha \gamma^{1+1/k}, \quad (3)$$

где α - константа;

k - показатель политропы, характеризующий упругие свойства вещества ($k=0$ соответствует несжимаемому веществу).

Поэтому уравнение состояния можно записать в виде

$$p = \alpha \gamma^{1+1/k} (1 - \gamma_0/\gamma), \quad (4)$$

которое при малых давлениях переходит в закон Гука, а при больших давлениях приобретает стандартный вид политропы

$$p = \alpha \gamma^{1+1/k}. \quad (5)$$

3. Ядро и мантия

Предположим, что рассматриваемое сферическое тело разделено на две области - внутреннее ядро и наружную мантию. При этом будем считать, что мантия построена из твердого камня (типа базальта) и характеризуется, как это обычно принимается, политропным индексом $k=1$ [5], а ядро металлизировано под действием сверхвысоких давлений и в связи с этим

характеризуется политропным индексом $k=3/2$.

Сделаем еще одно важное допущение - будем считать, что внутри ядра вещество может быть электрически поляризовано. Обычно эта возможность совсем не принимается во внимание на том основании, что возникновение электрической поляризации связано с появлением дополнительной электрической энергии, а значит энергетически невыгодно. При этом совершенно выпадает из внимания тот факт, что возникновение электрической поляризации изменяет и может уменьшить другие виды энергии - гравитационную и внутреннюю.

Предположив, что внутри планеты расположено электрически поляризованное ядро радиуса R_N , а во внешнем слое - мантии - вещество неполяризовано, мы будем иметь целью решения нашей задачи определение радиуса электрически поляризованного ядра R_N для конфигурации с наименьшей полной энергией. Если минимальной энергией будет обладать тело с нулевым R_N - это будет означать, что разделение планеты на электрически поляризованное ядро и мантию энергетически невыгодно. При этом в плане механических деформаций будем считать, что вся планета состоит из вещества одного и того же химического состава, имеющего при нулевом давлении плотность γ_0 и модуль упругого сжатия B . Величину электрической поляризации \mathcal{P} внутри ядра будем полагать пропорциональной силе тяжести:

$$\mathcal{P} = G^{1/2} g, \quad (6)$$

так что действие гравитации внутри ядра будет полностью скомпенсировано электрической силой

$$\gamma_N g + \rho E = 0, \quad (7)$$

здесь γ_N - плотность вещества внутри ядра;

g - ускорение тяготения;

$\rho = -\text{div} \mathcal{P}$ - плотность "связанного" поляризации заряда;

$E = -4\pi \mathcal{P}$ - напряженность электрического поля, обусловленная поляризацией.

Это оказывается возможным в силу того, что напряженности гравитационного и электрического поля изменяются подобным образом:

$$\begin{aligned} \text{div} E &= 4 \pi \rho \\ \text{div} g &= -4 \pi G \gamma_N. \end{aligned} \quad (8)$$

В результате такого распределения поляризации внутри ядра будет существовать объемный ("связанный") электрический заряд одного знака, а на границе ядра - поверхностный заряд другого знака, так что суммарный электрический заряд ядра будет равен нулю. Нетрудно видеть, что со скачком поляризации на границе ядра будет связан скачок давления или, говоря в терминах "связанных" зарядов, поверхностный заряд будет стремиться сжать заряженное вещество. Так что, хотя в ядре действие тяготения будет скомпенсировано, но при этом на вещество в ядре, во-первых, будет действовать давление всей массы, находящейся выше него:

$$P_M(R_N) = \alpha_M \gamma_M^2(R_N) (1 - \gamma_0/\gamma_M(R_N)) \quad (9)$$

(здесь значок (R_N) отмечает то, что значение величины берется на границе ядра)

и, во-вторых, давление поверхностного заряда [6]

$$P_E = 2\pi/9 G \gamma_N^2 R_N^2 \quad (10)$$

Нетрудно видеть, что это дополнительное сжатие имеет значительную величину, которой, как можно предполагать, достаточно для перехода вещества ядра в металлическое состояние. При такой металлизации становится определенным знак поляризации - под действием давления вещество ядра ионизируется и приобретает положительный заряд, а электроны вытолкнутся на поверхность ядра. В силу того, что гравитационные силы слабы по сравнению с электрическими, оценка показывает, что приобретенный каждым ионом заряд составит в среднем всего около 10^{-17} заряда электрона. В силу того, что сжимаемость металлов определяется сжимаемостью ферми-газа, политропный индекс такого вещества будет равен $3/2$.

При таком подходе давление внутри ядра и его плотность будут постоянными:

$$P_N = \alpha_N \gamma_N^{5/3} (1 - \gamma_0/\gamma_N) = \alpha_M \gamma_M^2(R_N) (1 - \gamma_0/\gamma_M(R_N)) + 2\pi/9 G \gamma_N^2 R_N^2 \quad (11)$$

В результате внутри ядра плотность получится выше той, которая существовала бы внутри планеты в отсутствие поляризации.

Равновесное состояние вещества мантии описывается равенством

$$dp/dr = - G\gamma(r) M(r)/r^2 \quad (12)$$

Здесь масса вещества, лежащего ниже радиуса r ,

$$M(r) = \int_0^r \gamma(r) 4\pi r^2 dr \quad (13)$$

Поэтому для вещества мантии из равенства (12) имеем

$$\gamma_M^2 (1 - \gamma_0/\gamma_M) = A_M \int_M^R \gamma_M dx/x^2 (\gamma_N^3/3 R_N^3 + \int_{R_N}^R \gamma_M x^2 dx) \quad (14)$$

Здесь $A_M = 4\pi G R_0 \gamma_0 / B = 4\pi G R_0 / \alpha_M$;

R_0 - радиус планеты в случае, если она составлена из несжимаемого вещества с плотностью γ_0 .

При деформации полная масса вещества планеты, естественно, сохраняется

$$\gamma_N 4\pi/3 R_N^3 + \int_{R_N}^R \gamma_M 4\pi r^2 dr = 4\pi/3 \gamma_0 R_0^3 \quad (15)$$

Решая совместно уравнения (11), (14) и (15), можем найти γ_N , γ_M и отношение R/R_0 как функции R_N .

4. Энергия планеты

Теперь остается ответить на главный вопрос: является ли существование электрически поляризованного ядра энергетически выгодным? Гравитационная энергия сферического тела по определению есть

$$E_{Gr} = - G \int_0^R M(r)/r dM(r) \quad (16)$$

Она может быть найдена при известном распределении плотности внутри планеты $\gamma(r)$.

Далее, исходя из термодинамического равенства для химического потенциала

$$d\mu = dp m' / \gamma \quad (17)$$

(здесь m' - масса ионов)

и уравнения состояния (4), получим для химического потенциала

$$\mu = \alpha m' ((k+1) \gamma^{1/k} - \frac{\gamma^{1/k} - k^2 \gamma}{1-k}) \quad (18)$$

и соответствующее выражение для плотности внутренней упругой энергии ядра

$$\epsilon_{iN} = \mu \gamma / m' - P = \alpha_N (3/2 \gamma_N^{5/3} + 3\gamma_N^{2/3} - 9/2 \gamma_N) \quad (19)$$

Проведя аналогичный расчет для мантии, получим

$$\epsilon_{iM} = \alpha_M (\gamma_M^2(r)/\gamma_0^2 + \gamma_M(r)/\gamma_0 - \gamma_M(r)/\gamma_0 \ln(\gamma_M(r)/\gamma_0) - 2) \quad (20)$$

Электрическая энергия будет существовать только внутри ядра. Ее плотность

$$\frac{E(r)}{8\pi} = 2\pi/9 G \gamma_N^2 r^2 \quad (21)$$

Так как тепловой энергией мы пренебрегаем, то для того, чтобы получить полную энергию планеты необходимо проинтегрировать по объему планеты выражения (19), (20) и (21) и просуммировать вместе с (16). Для того, чтобы провести эти вычисления, определим значения констант, входящих в эти уравнения.

5. Распределение плотности внутри планеты

Масса Земли M и ее радиус R нам известны. Поэтому нам известна средняя плотность Земли $\rho = 5,5 \text{ г/см}^3$. Исходя из геофизических данных будем считать, что мантия сложена из базальтов и на поверхности имеет характерную для базальтов плотность $\gamma_0 = 3,2 \text{ г/см}^3$ и модуль всестороннего сжатия $B = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$ [2]. Исходя из этого можем определить величину R_0 и α_M . Величина параметра α_N может быть найдена из следующих соображений. Так как величины γ_0 и ρ нам известны, найдем отношение

$$R/R_0 = (\gamma_0 / \rho)^{1/3} = 0,835 \quad (22)$$

и теперь среди возможных решений будем выбирать то, которое удовлетворяет этому условию. Эта процедура фактически есть выбор

параметра m' - массы иона, приходящейся в среднем на один электрон в металлизированном веществе ядра. Графики полной энергии, отнесенной к (GM^2/R_0) , при различных значениях параметра m' приведены на рис. 2. Из этого рисунка видно, что существование электрически поляризованного ядра при выбранных значениях параметров энергетически выгодно, если его радиус R_N имеет величину около $0,65 R$. При этом оказывается, что эта оптимальная величина ядра почти не зависит от параметра m' .

Зависимость внешнего радиуса планеты R , отнесенного к R_0 , от размеров ядра для различных величин m' показана на рис. 3. Из этого рисунка видно, что из всего семейства кривых равенству (22) при $R_N = 0,65R$ удовлетворяет кривая, полученная при условии, что на один электрон в ядре приходится в среднем примерно 22 нуклона.

Окончательно, зная m' и R_N/R можем найти распределение плотности вещества внутри планеты. Эта зависимость при $m' = 22m_p$ и $R_N/R = 0,65$ показана на рис. 4.

Таким образом, расчеты показывают, что для модели Земли энергетически выгодно иметь центральное ядро с электрически поляризованным металлизированным веществом. Радиус этого ядра $R_N \approx 4,15$ тыс. км и плотность вещества в нем $\gamma_N \approx 10 \text{ г/см}^3$. При переходе к мантии плотность скачком падает до 5 г/см^3 и далее с ростом радиуса уменьшается почти линейно. На рис. 3 показана также зависимость плотности вещества внутри Земли, определяемая из измерений скорости распространения сейсмических волн [2]. При определенном различии расчетной и измеренной зависимостей они совпадают в главном - обе они отражают существование примерно одинаковых скачков плотности на границе ядра и мантии в районе половины радиуса планеты.

6. Момент инерции и магнитный момент

Зная распределение плотности вещества между ядром и мантией и их размеры, можно вычислить момент инерции I нашей модели. Для шара с радиальным распределением плотности имеем

$$I = 2/3 \int_0^R \gamma(r) 4\pi r^4 dr \quad (23)$$

Для нашего случая величина $1/MR^2 = 0,339$ (24)

что хорошо согласуется с измеренным значением 0,331.

По-видимому, наиболее ярким и важным результатом модели является механизм генерации земного магнитного поля. Он работает просто: вращение электрически поляризованного ядра (вместе со всей планетой) вокруг своей оси с частотой Ω дает магнитный момент

$$\mu = \frac{2}{15} \frac{G^{1/2}}{c} \Omega \gamma_N \frac{4\pi}{3} R_N^5 \quad (25)$$

Подстановка соответствующих значений дает $\mu \cong 4 \cdot 10^{25} \text{Гс/см}^3$, что составляет почти точно половину от наблюдаемого значения $8,05 \cdot 10^{25} \text{Гс/см}^3$.

7. Заключение

Так как полученное значение радиуса ядра по порядку величины совпадает со значением внешнего радиуса, приближенно гиромангнитное отношение

$$\varphi \cong \mu/L \quad (26)$$

(L-механический момент вращения планеты в целом)
или

$$\varphi \cong \frac{G^{1/2}}{3c} = 2,88 \cdot 10^{-15} (\text{см/г})^{1/2} \quad (27)$$

что позволяет объяснить наблюдающуюся зависимость магнитных моментов космических тел существованием у них электрически поляризованных ядер.

Подчеркнем, что главным отличием построенной модели от разработанных ранее [1,2] является ее внутренняя самосогласованность. В более ранних моделях [1,2] поведение давления внутри планеты считалось монотонным, а скачок плотности на границе ядра обычно объяснялся гравитационной дифференциацией химического состава - ядро полагалось состоящим из металлического железа, а мантия - из нужного количества камня. В разработанной модели вся планета состоит из вещества единого химического состава (типа базальта), а скачок давления на границе ядра, обусловленный наличием электрической поляризации вызывает скачок

плотности, который, в свою очередь, делает металлизацию и поляризацию ядра энергетически выгодной.

Следует отметить, что полученная модель может быть применима к любой планете, если эта планета имеет достаточно большую массу. Как было показано ранее [6,7], фактически условие возникновения поляризации может быть сведено к наличию у планеты достаточно большой массы при определенных упругих константах. При характерных для земных условий параметрах вещества - плотности и модуле упругого сжатия - минимальная масса планеты получается примерно равна 10^{26}г . Т.е. существование поляризации энергетически невыгодно в малых телах, например, таких как Луна и астероиды.

Следует отметить, что рассмотренная модель не отменяет модели динамо полностью, а только дополняет ее механизмом возникновения "затравочного" поля. По-видимому, в пользу этого говорит тот факт, что расчетный магнитный момент Земли оказался вдвое меньше измеренного, а также то, что магнитные моменты ряда других планет по порядку величины согласуются с равенством (26), но имеют другой знак.

В заключение следует подчеркнуть, что рассмотренная модель Земли фактически не имеет свободных параметров. Для нахождения основных характеристик внутреннего строения планеты нам потребовались численные значения массы и радиуса Земли, которые известны однозначно, а также значение средней плотности вещества в мантии и его модуль упругого сжатия, выбор которых также почти лишен произвола. В свете этого полученное согласие основных результатов расчета с данными измерений представляется обеспечивающим прочную базу для построения более сложных моделей.

Автор выражает искреннюю благодарность Л. А. Максиму, В. Л. Любошицу и В. Б. Приезжеву за многочисленные обсуждения, приведшие к уточнению описанной модели и расчетов.

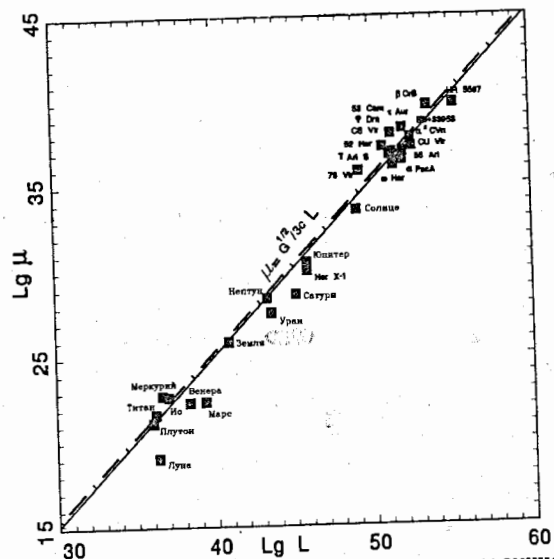


Рис. 1 Наблюдаемые значения магнитных моментов космических тел в зависимости от их угловых моментов.

Данные приведены в логарифмическом масштабе. По оси ординат - логарифм магнитного момента, отнесенного к $\text{Гс} \cdot \text{см}^3$; по оси абсцисс - логарифм углового момента вращения, отнесенного к $\text{эрг} \cdot \text{с}$.

Штрихпунктирная линия - результат расчета по формуле $G^{1/2}/3c$, сплошная линия - результат фитирования по наблюдаемым значениям

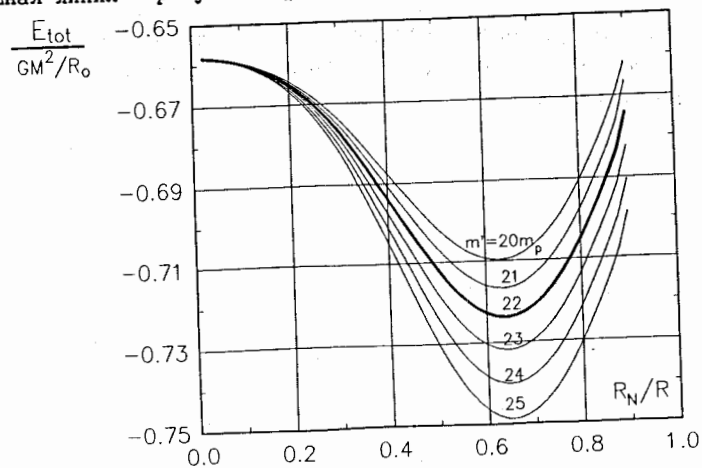


Рис. 2 Зависимость полной энергии планеты (отнесенной к GM^2/R_0) от величины поляризованного ядра, состоящего из металла с различной усредненной массой ионов m' , приходящихся на один электрон проводимости

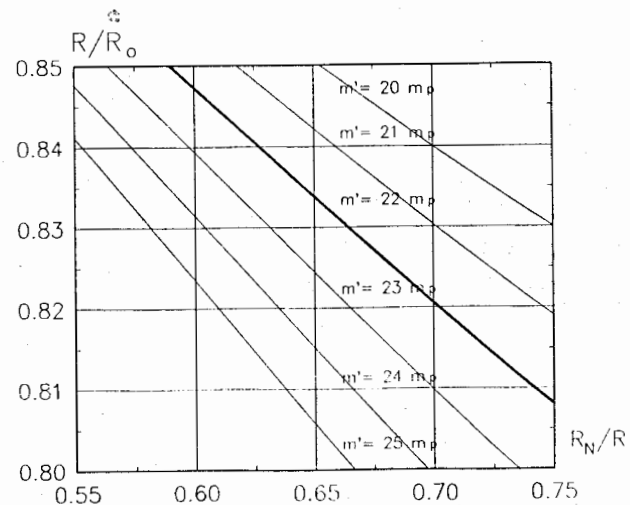
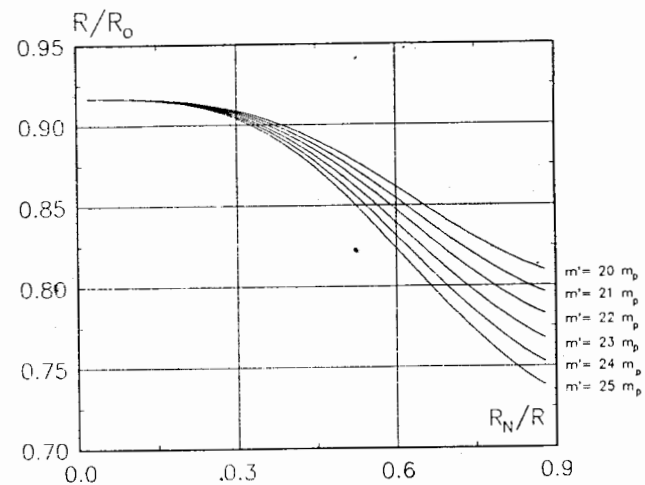


Рис. 3

а) Зависимость внешнего радиуса планеты R , отнесенного к R_0 , от размеров внутреннего ядра R_N/R .

б) Та же зависимость в увеличенном масштабе

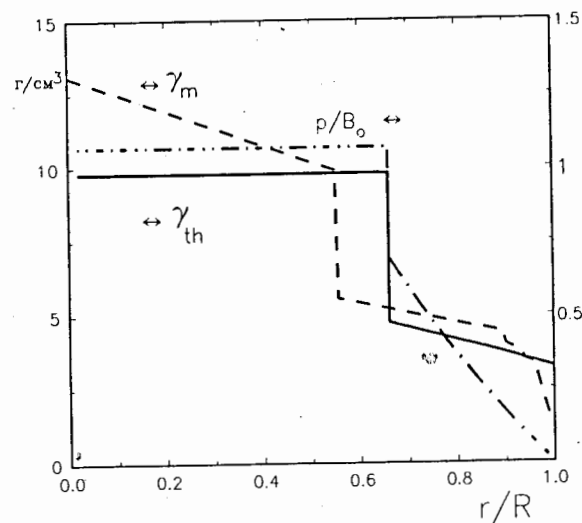


Рис. 4
 Радиальная зависимость давления и плотности вещества внутри Земли.
 сплошная линия — расчетная зависимость плотности вещества,
 полученная для модели Земли при $m' = 22m_p$ и $R_N/R = 0,65$;
 пунктир — плотность Земли, полученная из измерений
 скорости распространения сейсмических волн [2].
 штрихпунктир — рассчитанная при $m' = 22m_p$ и $R_N/R = 0,65$ зависимость
 давления внутри Земли, отнесенного к модулю упругого сжатия
 $B_0 = 1,3 \cdot 10^{12}$ дин/см²

Литература

1. Магницкий В. А., "Внутреннее строение и физика Земли", М.: Недра, 1965.
2. Жарков В. Н., "Внутренне строение Земли и планет", М.: "Наука", 1983.
3. Sirag S.-P., Nature, 1979, v.275, pp.535-538.
4. Васильев Б. В. Природа, №6, 1996, стр. 13-23.
5. Климишин И. А., "Астрономия наших дней", М.: "Наука", 1986.
6. Vasiliev B.V. Nuovo Cimento, v.110 B, N12, (1996), 1381-1389.
7. Vasiliev B.V. Nuovo Cimento, v.112 B, N10, (1997), 1361-1372.

Рукопись поступила в издательский отдел
 30 декабря 1997 года.

Васильев Б.В.
 Модель Земли, построенная методом минимизации
 полной энергии

P17-97-405

Рассмотрен вопрос: может ли быть энергетически выгодным возникновение электрической поляризации внутри ядра планеты? Показано, что для Земли возникновение электрической поляризации энергетически выгодно, если связано с металлизацией ядра и сопровождается скачком плотности на границе ядро — мантия. Рассчитанная величина скачка согласуется с его величиной, получаемой из сейсмических измерений. Вычисленные в рамках модели момент инерции и магнитный момент Земли удовлетворительно согласуются с результатами измерений.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики им. И.М.Франка ОИЯИ и Институте физико-технических проблем, Дубна.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод автора

Vasiliev B.V.
 A Model of the Earth Created by the Method
 of Full Energy Minimization

P17-97-405

A problem was considered of whether the appearance of electric polarization inside the core of a planet can be energetically efficient. It was shown that for the Earth the appearance of electric polarization is energetically efficient if it is connected with core metallization and is accompanied by density jump on the core-mantle border. The calculated value of the jump agrees with its value obtained by seismic measurements. The moment of inertia and magnetic moment of the Earth, evaluated within the frame of the model, are in a good agreement with the measurement results.

The investigation has been performed at the Frank Laboratory of Neutron Physics, JINR and at the Institute for Physical Technical Problems.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997