СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р17-97-33

Е.Н.Магар

ПОИСК СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ДИПОЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ С ПОМОЩЬЮ НЕПРЕРЫВНОГО АНАЛОГА МЕТОДА НЬЮТОНА

1997

Исследуемое в данной работе уравнение описывает взаимодействие диполей, входящих в состав цепочек, являющихся основной составной частью многих физических моделей в физике твердого тела (так, простая модель цепей служит для исследования на молекулярном уровне ферроэлектрических кристаллов, одномерных органических полимерных цепей и других упорядоченных структур). Для описания таких цепочек часто применяются различные обобщения модели sin-Гордон ([1], [2]). Модель, предложенная в работе [1], учитывает центральное взаимодействие между отдельными зарядами, входящими в состав соседних диполей.

Несмотря на мощность применяемых методов, аналитический поиск решений солитонных уравнений весьма сложен. Как правило, он включает в себя тесты Пенлеве, Уолквиста-Эстабрука, исследование алгебраической структуры, построение соответствующих уравнений Лакса, введение дополнительных вспомогательных функций, типа $\tau-$функции и т.п.[3, 4]. Даже при комбинировании аналитических и численных методов поиск солитонных решений довольно громоздок [5].

В связи с этим широкое применение получили численные методы решения НДУЧП. В данной работе используется численный метод решения НДУЧП - НАМН, предложенный в [6] и развитый в [7, 8]. Остановимся кратко на этом численном методе. Детальное и математически обоснованное изложение этого метода можно найти в обзоре [9].

Пусть $\varphi(u)$ является нелинейным достаточно гладким оператором, переводящим действительное банахово пространство X в действительное банахово пространство Y. Пусть требуется решить уравнение

$$\varphi(u) = 0, \qquad (1)$$

т.е. найти такой элемент $u \in X$, который с помощью оператора $\varphi(u)$ переводится в элемент, являющийся нулем. Пусть в некоторой окрестности решения u^* уравнения (1) функция φ дважды непрерывно дифференцируема, а оператор (φ') непрерывно обратим.

Как известно, НАМН описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi(u(t))}{dt} = -\varphi(u(t)), \qquad (2)$$

(t, $0 \leq t < \infty$ - некоторый дополнительный непрерывный параметр) с начальным условием $u(0) = u_0$.

Как показано в [6, 7], при указанных выше ограничениях на функцию φ и ее производные и при удачном выборе функции u_0 эволюционный процесс (1) сходится, т.е.

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u^*.$$

Перепишем уравнение (2) в виде

$$\varphi'_u u'_t = -\varphi(u).$$

Отсюда получаем задачу Коши для функции u

$$u'_t = -(\varphi'_u(u))^{-1}\varphi(u).$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \qquad (3)$$

Введем обозначение

$$v = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Дискретизация по параметру t задачи (3) осуществляется методом Эйлера, который приводит к итерационному процессу

$$\varphi'(u_n)v_n = -\varphi(u_n), \quad u_{n+1} = u_n + \tau_n v_n, \qquad (4)$$

$$v_n = -(\varphi'(u_n))^{-1}\varphi(u_n), \qquad n = 0, 1, \ldots 0 < \tau_n \le 1.$$

При $\tau \equiv 1$ этот итерационный процесс совпадает с классическим методом Ньютона.

Далее использовался алгоритм выбора итерационного параметра, предложенного в [10] и обоснованного в [11]

$$\tau_k = \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}\tau_{k-1}, \qquad (5)$$

где δ_k - невязка на k-м шаге итерации в НАМН.

В данной работе исследовалось НДУЧП, предложенное в работе [1]

$$u_{tt} = (A - cosu)u_{xx} - (1 - \frac{1}{2}u_x{}^2)sinu, \qquad (6)$$

описывающее цепочки нейтральных диполей, колеблющихся возле некоторых начальных положений вдоль оси x. Рассмотрим стационарный случай

$$(A - cosu)u_{xx} - (1 - \frac{1}{2}u_x{}^2)sinu = 0. \qquad (7)$$

Граничные условия имеют вид

$$\frac{du}{dx}|_{x=-\infty} = \frac{du}{dx}|_{x=+\infty} = 0. \qquad (8)$$

Для нахождения уравнения для вспомогательной функции v применим формулу (2) НАМН. Заметим, что в ней t является некоторым произвольным параметром, а φ определяется из уравнения (7)

$$\varphi = (A - cosu)u_{xx} - (1 - \frac{1}{2}u_x{}^2)sinu - 0. \qquad (9)$$

Используя формулы (2),(9), а также обозначение $v = u_t$, получаем уравнение для функции v

$$v_{xx} + p_k(x)v_x + q_k(x)v = -r_k(x), \qquad (10)$$

где коэффициенты p_k, q_k и r_k определяются соотношениями

$$p_k(x) = \frac{u_x sinu}{A - cosu},$$

$$q_k(x) = \frac{u_{xx}sinu - (1 - \frac{1}{2}u_x{}^2)cosu}{A - cosu}, \qquad (11)$$

$$r_k(x) = -\frac{(A - cosu)u_{xx} - (1 - \frac{1}{2}u_x{}^2)sinu}{A - cosu}.$$

Уравнение (10) линейное, поэтому к нему применим метод прогонки [12].

Численный эксперимент показывает, что оптимальным вариантом для поиска решения является отрезок [-20;20], шаг по x конечно-разностной схемы h=0.1, а параметр в уравнении (7) $A \ge 17$. Исходное значение $\tau_k = 10^{-1}$. В процессе дальнейшего счета шаг по t τ_k вычисляется по формуле (5). Пробная функция u_0 может быть выбрана в довольно произвольном виде, но так, чтобы процесс сошелся. В качестве примера возьмем функцию (рис.1)

$$u_0 = \begin{cases} -2.2arctg(x - 0.5) + \frac{\pi}{2}, & -20 < x \le -5, \\ -1.6arctg(x - 5.8) + \frac{\pi}{2}, & -5 < x \le 5, \\ -0.3arctg(x - 6.1) + \frac{\pi}{2}, & 5 < x \le 20. \end{cases} \qquad (12)$$

Функция $u_{k+1}(x)$ на каждом шаге итерации НАМН определялась по формуле

$$u_{k+1} = u_k + \tau_k v_k. \qquad (13)$$

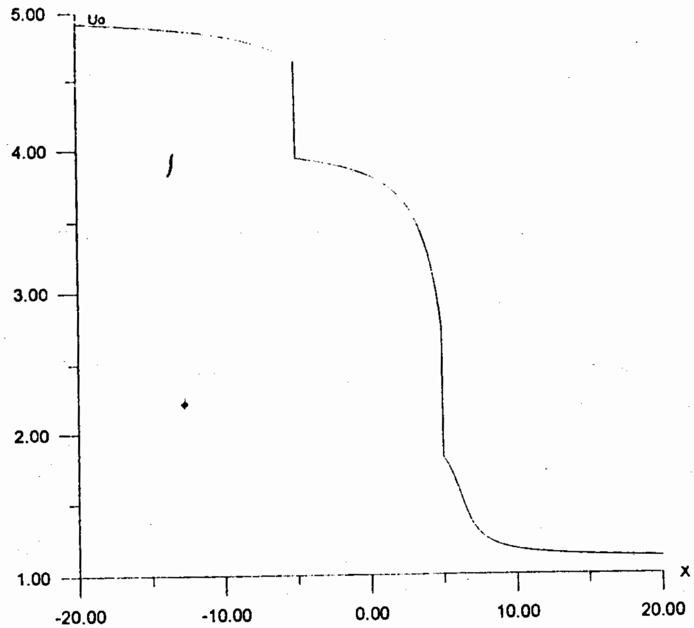

Рис.1

В результате найдено решение типа "кинка" уравнения (6) (невязка при этом составила 10^{-10}). График полученного решения представлен на рис.2.

Для нахождения процесса развития функции u_k во времени используем процедуру, предложенную в [13]. Следуя ей необходимо решить уравнение

$$u_{tt} = (A - cosu)u_{xx} - (1 - \frac{1}{2}u_x{}^2)sinu, \qquad (14)$$

с начальными условиями

$$u(t,x)|_{t=0} = u^1(x); \quad u_t(t,x)|_{t=0} = u_t{}^1(x). \qquad (15)$$

Введем обозначение

$$S(u) = (A - cosu)u_{xx} - (1 - \frac{1}{2}u_x{}^2)sinu. \qquad (16)$$

Тогда уравнение (14) примет более компактный вид

$$u_{tt} = S(u). \qquad (17)$$

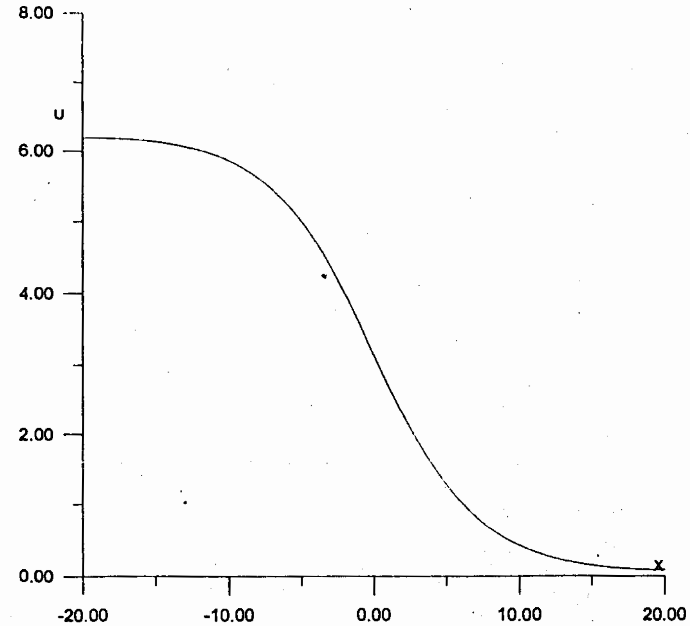

Рис.2

Воспользовавшись приближенными формулами для первой и второй производной функции u по времени, связывающей два (для первой) и три (для второй) последовательных момента

$$u_t{}^k \approx \frac{u^{k+1}(x) - u^k(x)}{\triangle t}, \qquad (18)$$

$$u_{tt}{}^k \approx \frac{u^{k+1}(x) - 2u^k(x) + u^{k-1}(x)}{(\triangle t)^2} \qquad (19)$$

(для k-го момента времени), и учитывая начальные условия (15) можно построить явную схему расчета развития функции u во времени.

$$u^1(x) \equiv u(t,x)|_{t=0},$$

$$u^2(x) = u^1(x) + u^1(x)\triangle t \equiv u(t,x)|_{t=0} + u_t(t,x)|_{t=0}\triangle t,$$

$$u^3(x) = 2u^2(x) - u^1(x) + S(u)(\triangle t)^2, \qquad (20)$$

....

$$u^{k+1}(x) = 2u^k(x) - u^{k-1}(x) + S(u)(\triangle t)^2, \quad k = 3, ..., NT - 1,$$

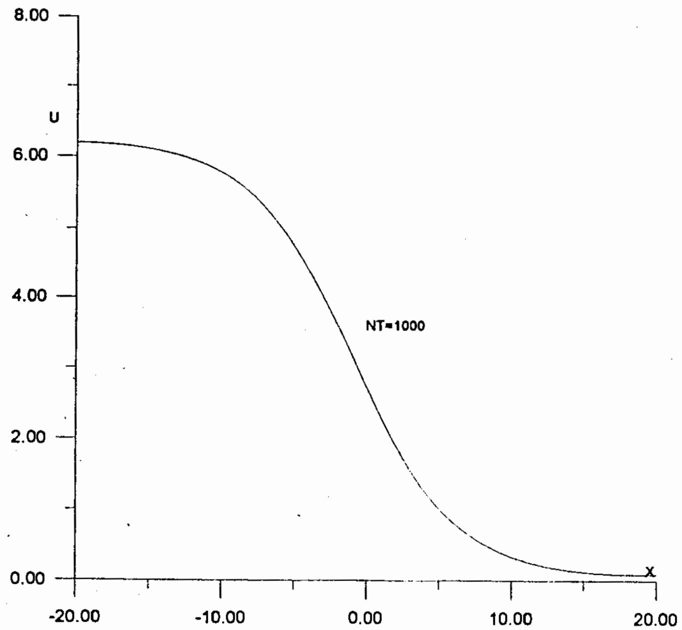

Рис.3

где NT -максимальное число шагов по времени. Подействуем на полученное статическое решение возмущением гладкого типа, удовлетворяющим граничным условиям, так что $u_t(t,x)|_{t=0}\Delta t = Bu_x(x)\Delta t << 2\pi$ (при B=10^{-2} это возмущение мало по сравнению с размерами полученного "кинка"). Исследование процесса эволюции функции u_k показывает, что найденное решение устойчиво во времени. На рис.3 представлена форма "кинка" на последнем шаге явной схемы включения времени при NT=1000 и $\Delta t = 0.1$. Видно, что профиль решения не изменился.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Пузынину И.В., проф. Жидкову Е.П., к.ф.-м.н. Робуку В.Н., к.ф.-м.н. Бабич И.М. и к.ф.-м.н. Амирханову И.В. за полезные обсуждения в процессе выполнения работы.

Литература

[1] H.Zorski, E.Infeld. New Soliton Equation for Dipole Chains. *Physical Review Letters*, 1992, **68**, N8, pp.1180-1183.

[2] L.Vazquez, W.A.B.Evans, G.Rickayzen. Numerical investigation of a non-local sine-Gordon model. *Physics Letters A*, 1994, **189**, 4 July, pp.454-459.

[3] А.Ньюэлл. *Солитоны в математике и физике*, М., Мир. 1989.

[4] H.D.Wahlquist, F.B.Estabrook. Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg - de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.*, 1973, **31**, pp.1386-1390.

[5] Е.Н.Магар, Ю.П.Рыбаков. Тяжелые солитоны в обобщенной спинорной электродинамике. *Известия ВУЗов. Физика.* 1989, **32**, N10, с.97-100.

[6] М.К.Гавурин. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных процессов. *Известия ВУЗов. Математика.* 1958, **5**, N6, с.18-31.

[7] Е.П.Жидков, И.В.Пузынин. Применение непрерывного аналога метода Ньютона для приближенного решения одной нелинейной граничной задачи. *Докл. АН СССР.* 1968, **180**, N1, с.18-21.

[8] Ф.А.Гареев, С.А.Гончаров, Е.П.Жидков и др. Численные решения задач на собственные значения для интегродифференциальных уравнений в теории ядра. *ЖВМ и МФ.* 1977, **17**, N2, с.407-419.

[9] E.P.Zhidkov, G.I.Makarenko and I.V.Puzynin. Continuous analog of Newton's method in nonlinear problems of physics. *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei*, **4**, 1973, N1, July-Sept., p.53-69.

[10] И.В.Пузынин. Приближенное решение краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом введения непрерывного параметра. *Дис. ... канд. физ.-матем. наук.* 1969, Дубна, ОИЯИ.

[11] Т.Жанлав, И.В.Пузынин. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона. *ЖВМ и МФ.* 1992, **32**, N6, с.846-856.

[12] А.А.Самарский, Е.С.Николаев.*Методы решений сеточных уравнений.*, М. Наука, 1978.

[13] Р.Д.Рихтмайер. *Разностные методы решения краевых задач.*, М. Иностр. лит., 1960.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 февраля 1997 года.