СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P17-97-28

Т.Л.Бояджиев[1], Н.В.Алексеева[2]

«ОПТИМАЛЬНЫЕ» ДЖОЗЕФСОНОВСКИЕ РЕШЕТКИ ИЗ РЕЗИСТИВНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

[1]Факультет математики и информатики, Софийский университет «Св. Климент Охридский», бул. «Дж. Баучер» 5, София, Болгария
E-mail: todorlb@fmi.uni-sofia.bg
[2]Department of Applied Mathematics, University of Cape Town, Rondebosh, 7700, Western Cape, South Africa
E-mail: nora@maths.uct.ac.za

1997

1. Постановка задачи

Настоящая работа посвящена численному исследованию стационарных пространственно-периодических состояний магнитного потока в одномерном джозефсоновском контакте, представляющем собой решетку из резистивных неоднородностей конечного размера. Работа является развитием исследований авторов по указанной тематике, начатых в [1].

Математическая модель такого контакта сводится к решению граничной задачи для нелинейного уравнения

$$-\varphi_{xx}+j_D(x)\sin\varphi+\gamma=0,\ x\in[-R,R] \tag{1}$$

с периодическими граничными условиями

$$\varphi(-R)=\varphi(R),\ \varphi_x(-R)=\varphi_x(R). \tag{2}$$

Здесь $j_D(x)$ – заданная периодическая функция (см. ниже), моделирующая распределение амплитуды тока Джозефсона вдоль решетки, $2R$ – длина пространственной волны, γ – внешний ток.

Как обычно [2], будем говорить, что решение $\varphi(x)$ является устойчивым, если минимальное собственное значение $\lambda_{\min}$ задачи Штурма–Лиувилля

$$-\psi_{xx}+q(x)\,\psi=\lambda\psi, \tag{3}$$

$$\psi_x(\pm R)=0 \tag{4}$$

с потенциалом

$$q(x)=j_D(x)\sin\varphi(x), \tag{5}$$

порожденным этим решением, является положительным.

Остановимся более подробно на выборе зависимости $j_D(x)$. Для однородного контакта $j_D(x)\equiv 1$. В неоднородном контакте функция $j_D(x)$ определяется принятой моделью неоднородностей и их количеством [2 – 5]. В предлагаемой работе мы используем модель неоднородностей в виде равнобедренной трапеции (см. рис. 1). В рамках такой модели единичная симметричная неоднородность джозефсоновского тока характеризуется двумя геометрическими параметрами – шириной нижнего и верхнего оснований трапеции, μ и $\sigma=m\mu$ соответственно, где $m\geq 1$ – параметр. Во всех случаях высота трапеции в безразмерных единицах [2] равна 1.

При $m=1$ неоднородность представляет собой прямоугольник с основанием μ. Более реалистическими являются неоднородности, для которых параметр $m>1$. Изменение амплитуды тока Джозефсона с 1 до 0 в такой неоднородности происходит на интервале длиной

$$\delta=\frac{m-1}{2}\mu,$$

зависящей от конкретного значения ширины μ.

Большинство вычислений в этой работе проводилось для значения $m = 1.5$, т.е. параметр $\delta = \mu / 4$.

Аналитическое выражение для амплитуды $j_D(x)$ в контакте с одной неоднородностью с центром в точке x_j, имеет вид

$$j_D(x) = 1 - \eta\,(x, x_j, \mu, m),$$

где функция

$$\eta\,(x) = \frac{2m}{\mu(1+m)} \begin{bmatrix} \left(x - x_j + \frac{\mu}{2m}\right)_+ - \left(x - x_j + \frac{\mu}{2}\right)_+ - \\ -\left(x - x_j - \frac{\mu}{2}\right)_+ + \left(x - x_j - \frac{\mu}{2m}\right)_+ \end{bmatrix},$$

а через x_+ обозначена единичная ступенчатая функция Хэвисайда:

$$x_+ = \begin{vmatrix} x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{vmatrix}.$$

"Бесконечная" решетка из неоднородностей указанного выше вида характеризуется расстоянием Δ между центрами неоднородностей. Величины Δ, μ и m связаны очевидным неравенством $\mu \leq \frac{\Delta}{m}$, обеспечивающим неперекрытия неоднородностей на уровне $j_D = 1$. Для принятого нами значения $m = 1.5$ это означает, что $\mu \leq 2\,\Delta/3$.

Решетка является симметрической, если $\Delta - \sigma = \mu$, откуда

$$\mu = \frac{\Delta}{1+m}.$$

При $m = 1.5$ для симметричной решетки имеем условие $\mu = 0.4\,\Delta$.

Подробное описание алгоритма и численного метода решения задач (1) – (4) приведено в нашей недавней работе [1]. Для нелинейной краевой задачи (1), (2) использовался непрерывный аналог метода Ньютона [6] с оптимальным шагом [7]. На каждой итерации соответствующая линейная краевая задача решалась при помощи сплайн–коллокационной схемы второго порядка точности на неравномерной сетке, сгущающейся в окрестности неоднородностей.

2. Обсуждение результатов численного эксперимента

Любое решение $\varphi\,(x, \Delta, \mu, N_l, \gamma)$ краевой задачи (1), (2) зависит от геометрических параметров Δ, μ и N_l, а также и от физического параметра γ. Здесь величина N_l представляет собой количество неоднородностей, огибаемых одной волной $\varphi(x)$, длина которой $2R = N_l\,\Delta$. Каждой такой волне можно поставить в соответствие

конечный контакт с N_l симметрично расположенными относительно центра контакта неоднородностями и симметрическими граничными условиями Неймана:

$$\varphi_x(\pm R) = h_0, \tag{6}$$

где постоянная h_0 имеет смысл напряженности магнитного поля на концах контакта. В этом смысле величину $2R$ можно назвать длиной контакта.

В силу формулы (5) потенциал задачи Штурма–Лиувилля (3), (4) и, следовательно, соответствующие собственные значения и собственные функции, также зависят от параметров Δ, μ и N_l. Таким образом, устойчивость состояний магнитного потока в решетке является функцией указанных параметров.

Отметим, что при нулевом внешнем токе γ задача (1), (2) для всех N_l имеет "вакуумные" (мейсснеровские) решения вида

$$\varphi(x) = k\,\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{7}$$

При этом решения вида (7), соответствующие нулевому или четному k устойчивы, а соответствующие нечетному значению k – неустойчивы (см. формулу (5) для потенциала задачи Штурма–Лиувилля).

Рассмотрим сначала влияние геометрических параметров на возможные состояния магнитного потока в решетке.

В контакте с $N_l = 1$ при $2R = \Delta < 2\pi$ мы нашли только два периодических решения задачи (1), (2) – устойчивое и неустойчивое мейсснеровское. Такой контакт следует рассматривать как "короткий" для периодических решений, однако, отметим, что в контакте с единичной неоднородностью и граничными условиями вида (6) при указанной длине имеются [8] нетривиальные устойчивые непериодические решения (на рис. 2 производная $\varphi_x(x)$ одного из таких решений отмечена символом "◊"). При достаточно больших значениях расстояния Δ в контакте рождаются нетривиальные неустойчивые периодические решения. Среди них наиболее интересным представляется решение, производная которого отмечена символом "Δ" на рис. 2. Ввиду его формы, это решение можно условно назвать солитоном. Оно остается неустойчивым в очень широком диапазоне изменения величин Δ и μ, что демонстрируется на рис. 3 и рис. 4. Второе неустойчивое решение (отмеченное символом "□" на рис. 2) в реальном контакте с одной неоднородностью существует только при большом поле h_0 на концах.

В случае $N_l = 2$ в решетке появляется периодический устойчивый солитон (называемый далее "основным" солитоном) магнитного потока. Это решение отмечено символом "○" на рис. 2 и рис. 5. По-видимому, периодический магнитный поток $\varphi(x)$ в реальном контакте с двумя расположенными симметрично относительно середины контакта неоднородностями можно рассматривать как результат "взаимодействия" двух непериодических устойчивых состояний - флюксона и антифлюксона, которые локализованы на соседних неоднородностях при достаточно большом расстоянии Δ между ними. В то же время неустойчивые решения в случае $N_I = 1$ являются результатом "взаимодействия" неустойчивых флюксонов, оторваных от неоднородности.

Указанные соображения, возможно, позволяют сделать предположение, что в случае $N_I = 1$ уравнение (1) не имеет нетривиальных периодических устойчивых решений [9].

Решение на рис. 5, отмеченное символом "∇" (вторичный солитон), является примером слабоустойчивого состояния (с небольшим λ_{min}), обладающего гораздо большей (примерно в четыре раза) энергией, чем основной солитон. Такое решение существует в ограниченной области изменения параметров решетки, в частности, при больших Δ и μ. Обоим решениям соответствуют также решения, симметричные им относительно оси x, которые мы называем (основным и вторичным) антисолитонами. Остальные два решения на рис. 5, отмеченные соответственно символами "$\square$" и "$\lozenge$", неустойчивы (для этих решений $\lambda_{min} < 0$).

На рис. 6 показаны графики зависимости минимальных собственных значений $\lambda_{min}(\mu)$ задачи Штурма–Лиувилля (3), (4) для двух устойчивых состояний в решетке с $N_I = 2$ при разных значениях расстояния Δ и нулевом внешнем токе γ. Важно отметить, что все кривые имеют хорошо выраженный максимум в некоторой точке $\mu_c(\Delta)$, зависящий от конкретного решения. Это означает, что в решетке с фиксированным расстоянием Δ между неоднородностями, ширина которых равна μ_c, соответствующий периодический солитон магнитного потока является наиболее устойчивым (малое нестационарное возмущение такого солитона затухает наиболее быстро, см. основополагающую работу [2]). Положение точки максимума μ_c для основного солитона незначительно зависит от величины Δ и имеет приближенное значение $\mu_c \approx 1.3$.

В реальном контакте с двумя неоднородностями в нулевом магнитном поле h_0 на концах (см. условия (6)) кроме периодического, рассмотренного выше, есть также и непериодические устойчивые состояния магнитного потока. На рис. 7 показаны производные $\varphi_x(x)$ таких решений (распределение магнитного поля вдоль контакта) для значений параметров $R = 6$, $N_I = 2$, $h_0 = 0$, $\gamma = 0$ (решения, симметрические относительно координатных осей, не приведены). Состояние, отмеченное символом "o" (см. также рис. 5), является периодическим, а остальные нет. Энергия "сложных" состояний, локализованных на более чем одной неоднородностях (и, в частности,

периодическое состояние), существенно больше по сравнению с "простым" солитоном (отмеченным символом "∇"), который связан только с одной неоднородностью. Наоборот, минимальное собственное значение для "простого" солитона больше по сравнению со "сложными" солитонами.

Представляется важным отметить, что кривые зависимости $\lambda_{min}(\mu)$ как для периодических, так и для непериодических состояний имеют (см. рис. 8) строгий максимум, значение которого $\mu_c \approx 1.3$ не зависит от типа решения. Для сравнения, на рис. 8 приведена также и кривая $\lambda_{min}(\mu)$ (отмеченная символом "$\lozenge$") для устойчивого флюксона в реальном контакте с одной неоднородностью.

Кривые зависимости $\lambda_{min}(\Delta)$ для решетки с $N_I = 2$, $\mu = 2.4$ при нулевом внешнем токе γ для устойчивых и некоторых неустойчивых решений в решетке демонстрируются на рис. 9. В точке бифуркации B_0 основное нетривиальное устойчивое решение (солитон) переходит в неустойчивое (отмеченное символом "$\square$" на рис. 5) и наоборот. Для столь "узких" неоднородностей второй солитон является неустойчивым. Точка B_1 является точкой бифуркации этого неустойчивого решения в другое неустойчивое (отмеченное символом "$\lozenge$" на рис. 5) – в нуль обращается второе собственное значение задачи (3), (4). Увеличение ширины μ неоднородностей "поднимает" кривую $\lambda_{min}(\Delta)$ вверх, выше некоторого критического значения μ , второй солитон становится устойчивым.

Рассмотрим теперь влияние внешнего тока γ на состояния магнитного поля в решетке. Как известно [10, 11], в неоднородном контакте при увеличении абсолютного значения внешнего тока устойчивые состояния в конечном итоге теряют устойчивость. В периодическом случае ситуация аналогична - процесс "разрушения" током магнитного поля хорошо прослеживается на рис. 10. Видно, что положительные значения тока γ "сжимают" поле к центру между двумя неоднородностями, а отрицательные γ - наоборот, "выталкивают" поле к соседним неоднородностям решетки (в реальном контакте с двумя неоднородностями - к границам контакта).

На рис. 11 демонстрируются зависимости $\lambda_{min}(\gamma)$ для всех найденных (как устойчивых, так и неустойчивых) состояний в джозефсоновской решетке с параметрами $N_I = 2$, $\Delta = 6$, $\mu = 2.4$. Графики, отвечающие устойчивым решениям, симметричны относительно прямой $\gamma = 0$. Как и выше, через B_0 обозначены точки бифуркации решений, соответствующие решениям уравнения $\lambda_{min}(\gamma) = 0$.

Пусть γ_a и γ_b – корни этого уравнения для основного солитона (антисолитона) (на рис. 11 указанным корням отвечают точки B_{0_a} и B_{0_b}). Разность

$$\Delta\gamma = \gamma_b - \gamma_a$$

будем называть интервалом (зоной) устойчивости основного солитона по внешнему току γ. В общем случае величина $\Delta\gamma$ является функцией параметров μ и Δ. На рис. 12 демонстрируются кривые зависимости $\Delta\gamma(\mu)$ для нескольких фиксированных значений расстояния Δ. Во всей физически существенной области изменения переменной μ эти кривые хорошо аппроксимируются кубическими полиномами с коэффициентами, зависящими от Δ. Точки максимума μ_s определяют для заданного Δ ту ширину неоднородностей, при которой основной периодический солитон в решетке имеет наибольший интервал $\Delta\gamma$ устойчивости по току γ.

Отметим, что график зависимости $\mu_s(\Delta)$ с хорошей точностью можно рассматривать как прямую $\mu_s(\Delta) = a\Delta + b$ (см. рис. 13, нижнюю прямую, отмеченную символами "o"). Фитирование данных численного эксперимента для $\mu_s(\Delta)$ дает следующие значения для параметров: $a \approx 0.254$, $b \approx -8.5\ 10^{-3}$.

На основе полученных результатов можно сконструировать "оптимальный" контакт, для геометрических характеристик которого выполнено условие

$$\mu_c = \mu_s(\Delta_{opt}).$$

Отсюда в случае $N_I = 2$ приходим к формуле $\Delta_{opt} \approx 4\mu_c$. Таким образом, "оптимальное" расстояние между неоднородностями $\Delta_{opt} \approx 5.2$.

Поведение основного солитона, огибающего $N_I = 3$ неоднородностей, при изменении параметров задачи качественно не отличается от рассмотренного случая $N_I = 2$. Магнитное поле $\varphi_x(x)$ этого солитона сконцентрировано на "первой" и "третьей" неоднородностях. Кривые $\lambda_{min}(\mu)$ имеют вид, аналогичный показанному на рис. 6, причем точки максимума μ_c варьируют в интервале от $\mu_c = 1.288$ для $\Delta = 6$ до $\mu_c = 1.323$ для $\Delta = 9$, т.е. также как и выше, можно принять $\mu_c \approx 1.3$. На рис. 13 метками "Δ" демонстрируется прямая зависимости $\mu_s(\Delta)$ (соответствующие коэффициенты прямой имеют значения $a \approx 0.255$ и $b \approx 0.145$). Следовательно, "оптимальное" расстояние между неоднородностями в случае $N_I = 3$ примерно равно $\Delta_{opt} \approx 5.8$.

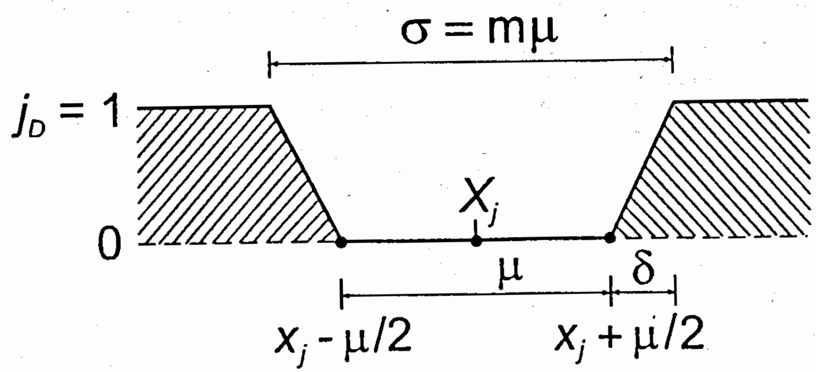
3. Заключение

Показано, что в джозефсоновских решетках из резистивных неоднородностей существуют устойчивые периодические состояния

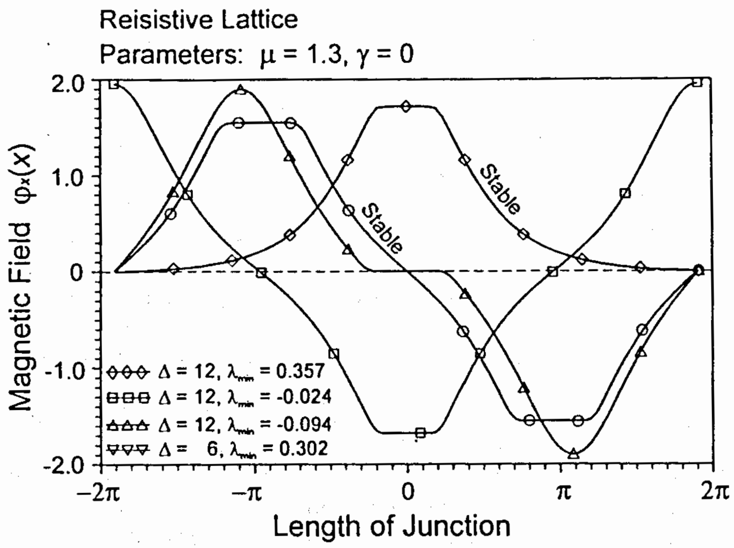
магнитного потока, которые локализованы на неоднородностях и имеют некоторую минимальную длину волны. Исследовано поведение устойчивых состояний при изменении расстояния Δ между центрами неоднородностей и их ширины μ. В частности, кривая $\lambda_{min}(\mu)$ для конкретного распределения магнитного потока при заданном Δ имеет в некоторой точке μ_c максимум, т.е. в такой решетке данное распределение является наиболее устойчивым. Исследована также зависимость ширины области $\Delta\gamma$ изменения внешнего тока γ, в которой существуют устойчивые решения, от параметра μ. При определенном соотношении между шириной неоднородностей и расстоянием между их центрами, состояния магнитного потока в контакте являются наиболее устойчивыми, имея при этом наибольший интервал $\Delta\gamma$ допустимого изменения внешнего тока.

Авторы выражают благодарность проф. И.В. Пузынину и проф. С.Н. Димовой за ценные замечания.

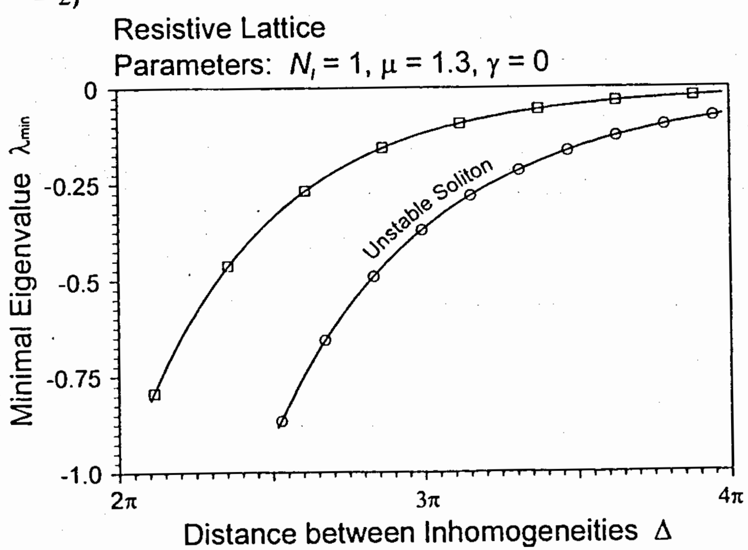
Эта работа финансировалась частично Министерством образования, науки и технологии Болгарии по договору **MM–425/94**, а также частично фондом FRD Южно-Африканской Республики.



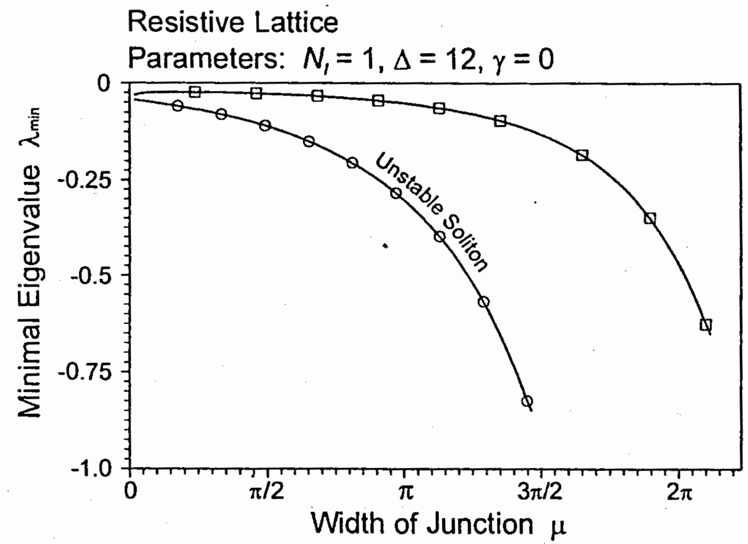
1. Геометрическая модель резистивной неоднородности



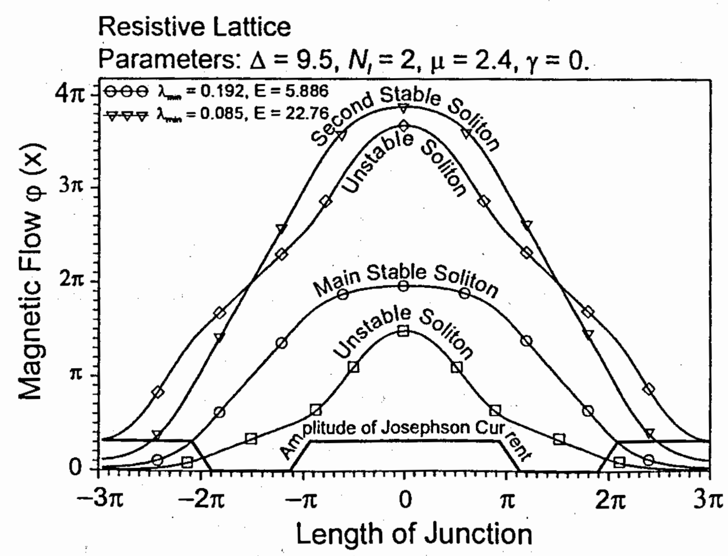
2. Некоторые распределения магнитного поля $\varphi_x(x)$ вдоль решетки из неоднородностей. Решение "◊" - устойчивый непериодический солитон магнитного поля при $N_I = 1$, решения "□" и "Δ" - неустойчивые периодические ($N_I = 1$), "o" - устойчивое периодическое ($N_I = 2$)



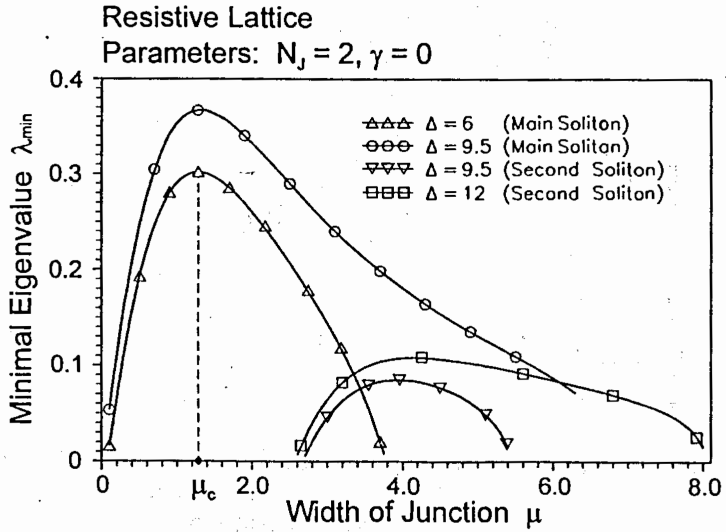
3. Графики зависимости минимального собственного значения λ_{min} задачи Штурма-Лиувилля (3), (4) от расстояния Δ между неоднородностями для решений "□" и "Δ" с рис.2



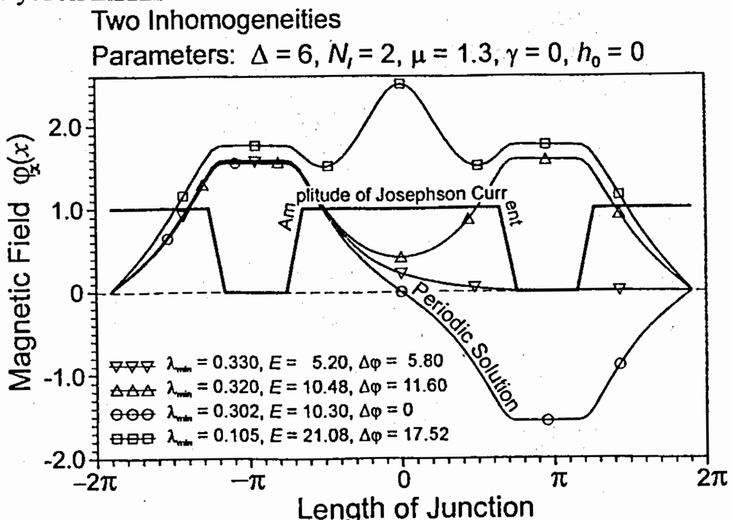
4. Графики зависимости минимального собственного значения λ_{min} задачи Штурма-Лиувилля (3), (4) от ширины μ неоднородностей для решений "□" и "Δ" с рис.2



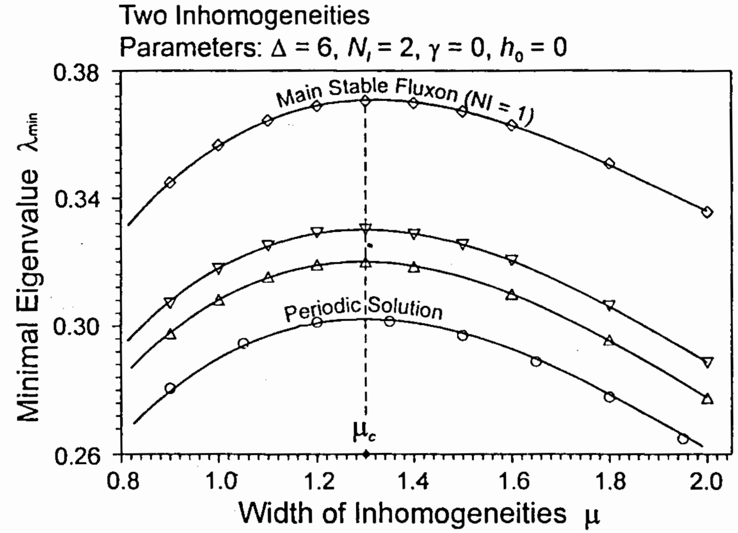
5. Некоторые устойчивые ("o" и "∇") и неустойчивые ("◊" и "□") распределения магнитного поля $\varphi_x(x)$ вдоль решетки из неоднородностей при $N_I = 2$, $\Delta = 9.5$, $\mu = 2.4$, $\gamma = 0$



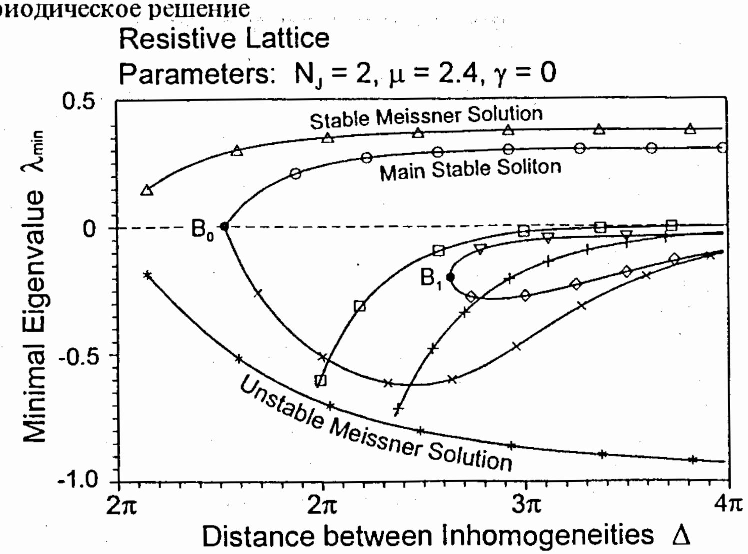
6. График зависимости минимального собственного значения λ_{min} задачи Штурма-Лиувилля (3), (4) от ширины μ неоднородностей в решетке с $N_I = 2$ для устойчивых решений с рис. 5 при разных значениях расстояния Δ между неоднородностями. Точка μ_c соответствует оптимальной ширине, при которой состояние является наиболее устойчивым



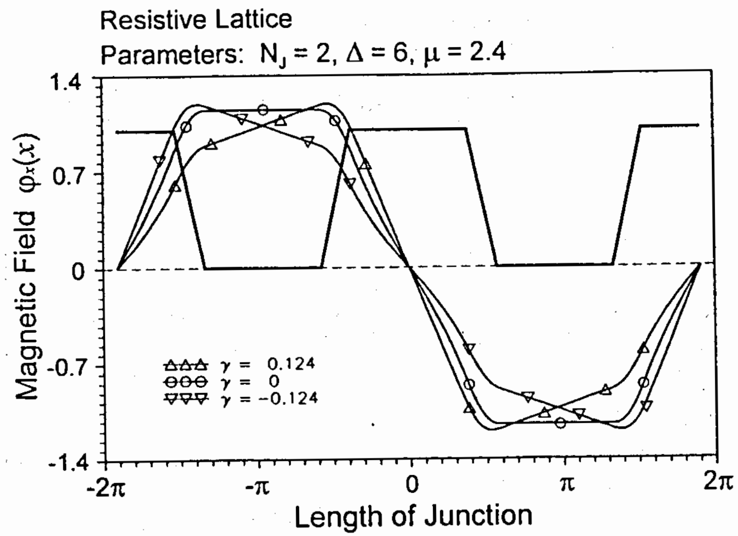
7. Устойчивые состояния магнитного поля $\varphi_x(x)$ в контакте с двумя неоднородностями и граничными условиями вида (6). Значения параметров: $\Delta = 6$, $N_I = 2$, $\mu = 1.3$, $\gamma = 0$, $h_0 = 0$. Величина $\Delta\varphi = \varphi(R) - \varphi(-R)$ - полный магнитный поток через контакт



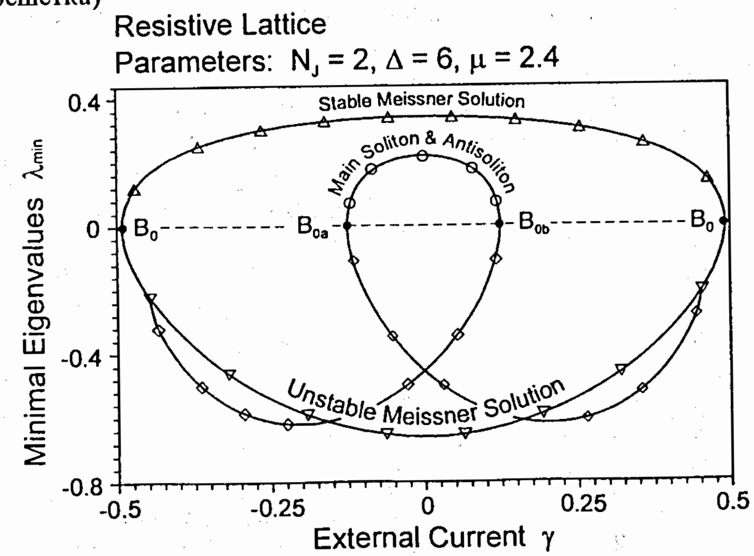
8. График зависимости минимального собственного значения λ_{min} задачи Штурма-Лиувилля (3), (4) от ширины μ неоднородностей в контакте с одной и двумя неоднородностями и граничными условиями (6) для устойчивых решений с рис. 7 при разных значениях расстояния Δ между неоднородностями. Кружками "о" выделено периодическое решение



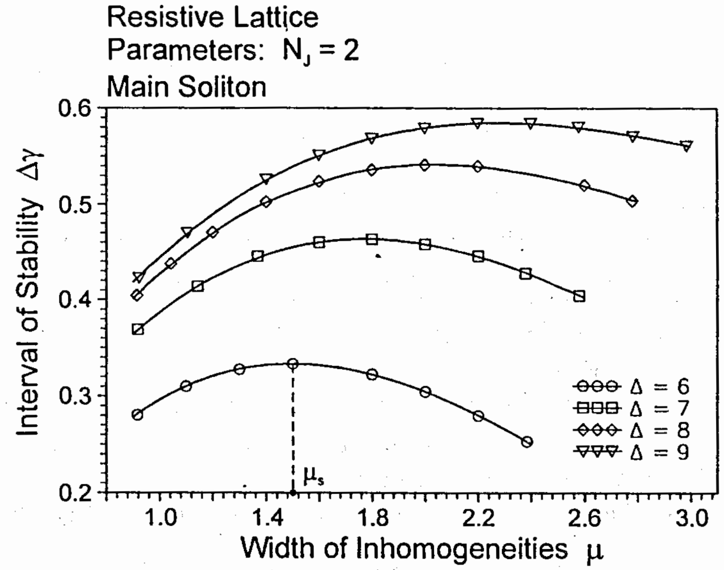
9. Зависимости минимального собственного значения λ_{min} задачи Штурма-Лиувилля (3), (4) от расстояния Δ между неоднородностями. В точке B_0 происходит бифуркация устойчивого решения в неустойчивое, в точке B_1 - бифуркация неустойчивого решения в неустойчивое



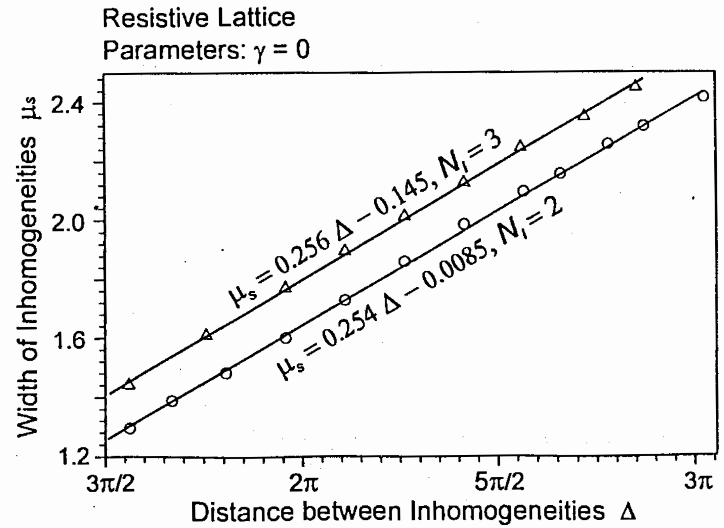
10. Деформация устойчивого солитона в решетке с $N_I = 2$ при изменении внешнего тока γ. Параметры $\Delta = 6$, $\mu = 2.4$ (симметрическая решетка)



11. Зависимость минимального собственного значения λ_{min} задачи Штурма-Лиувилля (3), (4) от внешнего тока γ через контакт. Точки B_0 являются точками бифуркации для мейсснеровского решения, B_{0_a} и B_{0_b} - для периодического солитона с рис. 7



12. Интервал устойчивости $\Delta\gamma = \gamma_b - \gamma_a$ по току γ как функция ширины μ неоднородностей при разных значениях расстояния Δ. Точка μ_s определяет ширину неоднородностей, при которой интервал устойчивости является наибольшим



13. Прямые зависимости ширины μ_s, соответствующей наибольшему интервалу устойчивости, от расстояния Δ между неоднородностями для $N_I = 1$ и $N_I = 2$

Литература

1. N. Alexeeva, T. Boyadjiev, Periodic bound states in Josephson lattices of resistive inhomogeneities, Bulg. J. of Physics, 1996, N 3–4.
2. Ю.С. Гальперн, А.Т. Филиппов, ЖЭТФ, т. 86, N 4, 1984, стр. 1527–1543.
3. I.L. Serpuchenko, A.V. Ustinov, Solid State Comm., 68, 7, 1988, p.693.
4. B.A. Malomed, A.V. Ustinov, J. Appl. Phys., 67 (8), 1990, p. 3791.
5. А.В. Устинов, Джозефсоновские вихры в распределенных сверхпроводящих структурах, Диссертация на соиск. уч. степени доктора физ.–мат. наук, Черноголовка, 1994.
6. Е.П. Жидков и др., ЭЧАЯ, 1973, т. 4, N 1, стр. 127–166.
7. В.В Ермаков, Н.Н. Калиткин, ЖВМиМФ, 21, No 2, 1981, стр. 491.
8. Т.Л. Бояджиев и др., Сообщения ОИЯИ, Р11-85-807, Дубна, 1985.
9. А.Т. Филиппов, Частное сообщение, 1992.
10. T.L. Boyadjiev et al., JINR Communication, P17–86–506, Dubna, 1986.

A.T. Filippov et al., Phys. Lett. A, **120** (1987), No. 1, p. 47.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 января 1997 года.