СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р17-97-146

Н.В.Антонов[1], М.Гнатич[2], М.Ю.Налимов[1]

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ НА СПЕКТРЫ СИЛЬНО АНИЗОТРОПНОЙ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

[1]Отдел теоретической физики, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия
[2]Постоянный адрес: Институт экспериментальной физики САН, Кошице, Словакия

1997

1. Введение

Одной из самых старых нерешенных проблем теоретической физики остается описание развитой гидродинамической турбулентности на основе микроскопической модели. В качестве последней обычно рассматривается уравнение Навье – Стокса с внешней случайной силой, моделирующей "накачку" энергии в систему за счет взаимодействия с крупномасштабными движениями, см. [1]. Задачей теории является обоснование феноменологической теории Колмогорова – Обухова, исследование отклонений от колмогоровского скейлинга (если они есть), нахождение зависимости функций Грина (корреляционных функций скорости и различных функций отклика) от расстояний, времен, внешнего и внутреннего масштабов турбулентности и т.п. Большинство результатов здесь получено на основе упрощенных полуфеноменологических моделей, которые слабо связаны с исходной микромоделью и не могут, как правило, рассматриваться как основа для построения какой-либо регулярной теории возмущений по малому (хотя бы формальному) параметру, см. [1].

Надежды на построение последовательной количественной теории турбулентности связаны с применением квантово-полевого метода ренормализационной группы (РГ), который был ранее успешно использован в теории критического поведения для обоснования критической масштабной инвариантности (скейлинга) и расчета универсальных величин (критических показателей и скейлинговых функций) в форме ϵ-разложений, см. [2].

Аппарат РГ был впервые успешно применен к теории турбулентности в работах [3, 4, 5, 6]. Для модели развитой изотропной однородной турбулентности несжимаемой вязкой жидкости он позволил обосновать существование инфракрасной (ИК) масштабной инвариантности с точно известными "колмогоровскими" размерностями, доказать независимость функций Грина в ИК-области от вязкости (вторая гипотеза Колмогорова), вычислить ряд репрезентативных констант (типа константы Колмогорова) в разумном согласии с экспериментом и т.д. Подробное изложение РГ-теории турбулентности и ссылки можно найти в обзорной статье [7].

Изотропная модель турбулентности несжимаемой жидкости представляет собой сильно упрощенную картину реальных турбулентных потоков. По этой причине интересным представляется обобщение этой модели с учетом неоднородности, анизотропии, сжимаемости, реальной геометрии задачи и т.п. В частности, в ряде работ изучалась турбулентность со слабой [8, 9, 10] и сильной [11] аксиальной анизотропией. В них было показано, что в трехмерном случае ИК-асимптотический скейлинговый режим сохраняется и при наличии анизотропии (на языке РГ это означает ИК-устойчивость соответствующей неподвижной точки).

В работах [12, 13, 14, 15] рассматривалась изотропная турбулентность сжимаемой жидкости. Проблемой здесь является отсутствие мультипликативной ренормируемости соответствующей стохастической модели, что не позволяет прямо применить к ней аппарат РГ (поэтому результаты, полученные в [14], нельзя признать достоверными, см. обсуждение в [12, 15]).

В работе [12] проблема ренормируемости была решена следующим образом. В первом нетривиальном порядке Ma^2 по малому параметру – числу Маха $Ma = v_c/c$ (где v_c – характерная среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций и c – скорость звука) задача была сведена к вычислению критических размерностей некоторых нелокальных составных операторов, построенных из полей "несжимаемой" (мультипликативно ренормируемой) модели.

Расчет размерностей составных операторов – достаточно громоздкая задача, поскольку операторы, как правило, смешиваются при ренормировке и для расчета критической размерности данного оператора приходится рассматривать все семейство операторов, смешивающихся с ним. Использование функциональных уравнений типа Швингера, тождеств Уорда, выражающих галилееву инвариантность теории, и других приемов позволяет упростить эту задачу и во многих случаях найти критические размерности точно, см. [5, 16, 7]. Использование этой техники позволило авторам [12] вычислить нужные размерности и с их помощью обосновать независимость корреляторов от вязкости (вторая гипотеза Колмогорова) в порядке Ma^2. Обобщение этого результата на все порядки формального разложения по степеням Ma^2 было затем получено в [13].

Отметим, что сохранение колмогоровского режима при "включении" анизотропии и т.п. не является заранее очевидным: например, в анизотропной магнитной гидродинамике [9], двумерной анизотропной турбулентности [11, 17], турбулентности сильно сжимаемой жидкости [15] колмогоровская неподвижная точка РГ неустойчива.

В настоящей работе влияние сжимаемости в первом порядке по Ma^2 исследовано в рамках более реалистической модели развитой анизотропной турбулентности, при этом анизотропия малой не предполагается. Как и в изотропном случае [12], задача сводится к расчету критических размерностей некоторого (но теперь намного большего) семейства составных операторов в модели сильно анизотропной турбулентности несжимаемой жидкости, которая подробно исследовалась в [11]. Полученные там результаты и развитая в [5, 16, 7] техника позволили нам точно найти все нужные размерности.

Основным результатом работы является обоснование второй гипотезы Колмогорова, т.е. доказательство независимости корреляционных функций от вязкости для сильно анизотропной турбулентности сжимаемой жидкости в первом нетривиальном порядке Ma^2 разложения по числу Маха.

2. Модель

В стохастической теории турбулентности движение вязкой сжимаемой жидкости подчиняется системе уравнений, состоящей из уравнения Навье – Стокса

$$\varrho[\partial_t v_i - v_j\partial_j v_i] = \nu_0\Delta v_i + \nu_0'\partial_i\partial_j v_j - \partial_i\mathcal{P} + f_i \tag{1}$$

и уравнения неразрывности

$$\partial_t\varrho + \partial_j(\varrho v_j) = 0, \tag{2}$$

дополненных уравнением состояния $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\varrho)$. Здесь $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$, $\vec{v}(\vec{x},t)$ – векторное поле турбулентных пульсаций скорости, $\varrho(\vec{x},t)$ – плотность жидкости, $\mathcal{P}(\vec{x},t)$ – давление, ν_0 и ν_0' – коэффициенты молекулярных вязкостей. По повторяющимся векторным индексам здесь и дальше подразумевается суммирование. Внешняя случайная сила $f_i(\vec{x},t)$ с гауссовским распределением моделирует накачку энергии в турбулентную среду. Ее среднее значение равно нулю, парный коррелятор $< f_i f_j > \equiv D_{ij}$ будет определен ниже.

Далее будет рассматриваться слабая сжимаемость. В этом случае поля плотности и давления можно представить как сумму средних значений $\overline{\rho}$, $\overline{p}$ и малых флуктуаций ρ, p: $\varrho = \bar{\rho} + \rho$, $\mathcal{P} = \bar{p} + p$. Без ограничения общности можно положить $\overline{\rho} = 1$, а используя малость флуктуаций, уравнение состояния можно взять в адиабатическом приближении

$$p = c^2\rho\,. \tag{3}$$

где c - адиабатическая скорость звука в турбулентной среде. В пределе несжимаемости $c^2 = \infty$ и $Ma = 0$.

Используя адиабатическую связь (3), уравнение неразрывности (2) перепишем в виде

$$\frac{1}{c^2}\partial_t p + \frac{1}{c^2}\partial_i(pv_i) + \partial_i v_i = 0. \tag{4}$$

При $c^2 = \infty$ плотность становится постоянной, поле скорости поперечным ($\partial_i v_i = 0$), и мы получаем несжимаемую жидкость.

Поле скорости $\vec{v}$ представимо в виде $v_i = v_i^{\perp} + v_i^{\|}$, где $v_i^{\perp} \equiv P_{ij}^{\perp}v_j$ – поперечная составляющая, удовлетворяющая условию $\partial_i v_i^{\perp} = 0$, а $v_i^{\|} \equiv P_{ij}^{\|}v_j$ – продольная часть. Поперечный $P^{\perp}$ и продольный $P^{\|}$ проекционные операторы в представлении волновых чисел $\vec{k}$ имеют вид $P_{ij}^{\|} = k_i k_j/k^2$, $P_{ij}^{\perp} = \delta_{ik} - P_{ij}^{\|}$, где $k \equiv |\vec{k}|$. Чтобы в пределе несжимаемости поле скорости стало поперечным, продольная составляющая $\vec{v}^{\|}$ должна быть пропорциональной квадрату обратной скорости звука $\vec{v}^{\|} \sim c^{-2}$. Из уравнения Навье – Стокса (1) для продольной составляющей случайной силы тогда следует $\vec{f}^{\|} \sim c^{-2}$. Поэтому c^{-2} можно рассматривать как формальный малый параметр, по которому и будут учитываться поправки на сжимаемость к поперечной составляющей поля скорости.

В первом порядке по c^{-2} уравнение неразрывности (4) имеет вид

$$\frac{1}{c^2}\partial_t p + \frac{1}{c^2}\partial_i(pv_i^{\perp}) + \partial_i v_i^{\|} = 0. \tag{5}$$

В главном приближении по c^{-2} из уравнения Навье – Стокса (1) легко получить известную связь между давлением p и поперечным полем скорости для несжимаемой жидкости

$$\Delta p = \partial_i\partial_j v_i^{\perp}v_j^{\perp}\,. \tag{6}$$

Последние два уравнения позволяют выразить давление и продольную скорость через поперечную составляющую $\vec{v}^{\perp}$:

$$v_l^{\parallel} = -\frac{1}{c^2}\partial_l \Delta^{-1}\nabla_t p, \qquad p = \Delta^{-1}\partial_i\partial_j v_i^{\perp} v_j^{\perp}, \tag{7}$$

где $\nabla_t \equiv \partial_t + v_i^{\perp}\partial_i$ обозначает ковариантную производную по времени для поперечного поля скорости, а Δ^{-1} – интегральный оператор, обратный оператору Лапласа. В дальнейшем выражения типа правых частей (7) будем называть составными операторами.

Действуя на уравнение (1) поперечным проектором $P^{\perp}$ и учитывая связи (7), мы получим уравнение только для поперечной скорости, а следовательно и для всех ее статистических моментов с учетом сжимаемости в первом порядке по c^{-2}, или, эквивалентно, в первом порядке по числу Маха:

$$\partial_t v_i^{\perp} = \nu_0 \Delta v_i^{\perp} - P_{ij}^{\perp}[v_s^{\perp}\partial_s v_j^{\perp}] - P_{ij}^{\perp}[v_s^{\perp}\partial_s v_j^{\parallel} + v_s^{\parallel}\partial_s v_j^{\perp}] - c^{-2}\nu_0 P_{ij}^{\perp}[p\Delta v_j^{\perp}] + f_i^{\perp}\ . \tag{8}$$

Для сокращения записи дальше вместо обозначения $v_i^{\perp}$ будем использовать v_i.

Парный коррелятор случайной силы $f_i^{\perp}$ имеет стандартный вид (см., например, [4], [7])

$$\langle f_j^v(\vec{x},t)\, f_s^v(0,0)\rangle \equiv \varepsilon_0 D_{js}(\vec{x},t) = \delta(t)\varepsilon_0 \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} D_{js}^{st}(\vec{k}) \exp\left[i\,\vec{k}\vec{x}\right], \tag{9}$$

$$D_{ij}(\vec{k}) = k^{\beta}\mathcal{P}_{ij}^{\perp}(\vec{k}) \tag{10}$$

(напомним, что $\langle f_j^v\rangle = 0$). Степень $\beta = 4 - d - 2\epsilon$ в (10) выражается через размерность пространства d и свободный параметр модели ϵ. Задачи типа (8), (10) обычно изучаются при всех значениях $\epsilon > 0$. Значения $\epsilon \geq 2$ считаются физическими и соответствуют ИК-накачке энергии из области больших масштабов (малых волновых чисел k), при $\epsilon = 2$ амплитуда ε_0 приобретает размерность скорости диссипации энергии ε. Отношение $\varepsilon_0/\nu^3 \equiv g_0$ играет роль затравочной константы связи – параметра разложения в теории возмущений по нелинейности $(\vec{v}\vec{\partial})\vec{v}$. В пределе $\epsilon \to 0$ константа g_0 становится безразмерной, тогда диаграммы функций Грина УФ-расходятся на больших волновых векторах $\vec{k}$ и возникает проблема устранения этих расходимостей. В квантовой теории поля они устраняются процедурой УФ-ренормировки (см., например, [18]).

Мы будем интересоваться анизотропной турбулентностью. Тогда поперечный проектор $\mathcal{P}^{\perp}$, моделирующий анизотропную накачку энергии, может быть выбран в виде [8, 10, 11]

$$\mathcal{P}_{js}^{\perp}(\vec{k}) = (1 + \alpha_1\xi^2)P_{js}^{\perp}(\vec{k}) + \alpha_2 R_{js}^{\perp}(\vec{k}), \tag{11}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} P_{js}^{\perp}(\vec{k}) &= \delta_{js} - P_{js}^{\parallel}(\vec{k}), \quad P_{js}^{\parallel}(\vec{k}) = k_j\, k_s k^{-2}, \\ R_{js}(\vec{k}) &= (n_j - \xi_k k^{-1}k_j)(n_s - \xi_k k^{-1}k_s), \quad \xi_k = (\vec{k}.\vec{n})k^{-1}, \end{aligned} \tag{12}$$

α_1, α_2 – параметры и $\vec{n}$ – ось преимущественного направления аксиальной анизотропии.

3. Квантово-полевая формулировка и уравнение РГ

Согласно общему утверждению [4, 5, 19] функции Грина поперечного поля скорости $\vec{v}$, подчиняющегося уравнению (8), могут быть получены как вариационные производные по внешним источникам $\vec{A}, \vec{A}'$ от производящего функционала $G(A, A')$ некоторой квантово-полевой модели с удвоенным набором полей $\vec{v}, \vec{v}'$ (где $\vec{v}'$ – вспомогательное поперечное векторное поле):

$$G(\vec{A}, \vec{A}') = \int D\vec{v}d\vec{v}'\, detM \exp[S(\vec{v}, \vec{v}') + \vec{A}\vec{v} + \vec{A}'\vec{v}'] \tag{13}$$

и функционалом действия вида

$$S(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{1}{2}g_0\nu_0^3\vec{v}'D\vec{v}' + \vec{v}'[-\partial_t\vec{v} + \nu_0\Delta\vec{v} - (\vec{v}\vec{\partial})\vec{v} - (\vec{v}^{\parallel}\vec{\partial})\vec{v} - (\vec{v}\vec{\partial})\vec{v}^{\parallel} - c^{-2}\nu_0\Delta\vec{v}p]. \tag{14}$$

Нужные интегрирования по координатам и времени и суммирования по векторным значкам в (13) и (14) подразумеваются.

Якобиан перехода $detM$ в (13) обеспечивает сокращение всех диаграмм с закороченным затравочным пропагатором $\langle vv'\rangle$, которые появляются среди прочих по правилам диаграммной техники Фейнмана для действия (14), но не возникают при построении диаграмм непосредственно итерациями стохастического уравнения (1). Следуя [4, 5, 19], условимся просто доопределять такие диаграммы нулем, одновременно полагая $detM = 1$ в (13). Отметим, что в нашей модели это нетривиально из-за наличия в действии (14) производных по времени в членах взаимодействия, но тем не менее такое доопределение допустимо, как это было показано в [12] для случая изотропной жидкости. В результате мы приходим к стандартной квантово-полевой модели с действием (14), для которой можем использовать известный аппарат квантовой теории поля – диаграммную теорию возмущений Фейнмана, теорию перенормировок и метод РГ.

Действие (14) является неренормированным, и диаграммы Фейнмана корреляционных функций полей $\vec{v}, \vec{v}'$ содержат УФ-расходимости при $\epsilon \to 0$. Чтобы их проанализировать запишем действие (14) в виде суммы $S = S^I + S^C$:

$$S^I(\vec{v}, \vec{v}') = \frac{1}{2}g_0\nu_0^3\vec{v}'D\vec{v}' + \vec{v}'[-\partial_t\vec{v} + \nu_0\Delta\vec{v} - (\vec{v}\vec{\partial})\vec{v}]\ , \tag{15}$$

$$S^C(\vec{v}, \vec{v}') = a_{01}F_1 + a_{02}F_2, \tag{16}$$

где $a_{01} \equiv -c^{-2}$, $a_{02} \equiv -c^{-2}\nu_0$, а составные операторы F_1, F_2 согласно (7) и с учетом свойства $\partial_i v_j^{\parallel} = \partial_j v_i^{\parallel}$ приобретают вид

$$F_1 = v_s'(\partial_l v_s - \partial_s v_l)\partial_l\Delta^{-1}\nabla_t\Delta^{-1}\partial_i\partial_j v_i v_j, \quad F_2 = v_l'\Delta v_l\Delta^{-1}\partial_i\partial_j v_i v_j. \tag{17}$$

Действие (15) описывает несжимаемую анизотропную турбулентность в пределе $c^{-2} = 0$. Ренормировка такой модели рассматривалась в [10, 11]. Там было показано, что для обеспечения мультипликативной ренормируемости необходимо рассматривать расширенную модель с новыми анизотропными вязкостями $\nu_0\chi_{0i}$, $i = 1,2,3$, где безразмерные параметры χ_{0i} описывают относительный вклад различных анизотропных структур в диссипацию.

Соответствующее исходному действию (15) ренормированное действие имеет вид

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}g\nu^3\Lambda^{2\epsilon}\vec{v}'D\vec{v}' + \vec{v}'[-\partial_t\vec{v} + \nu Z_\nu\Delta\vec{v} + \nu Z_\nu\chi_1 Z_{\chi_1}\vec{n}\Delta(\vec{v}\vec{n}) \\ &+ \nu Z_\nu\chi_2 Z_{\chi_2}(\vec{n}\vec{\partial})^2\vec{v} + \nu Z_\nu\chi_3 Z_{\chi_3}\vec{n}(\vec{n}\vec{\partial})^2(\vec{v}\vec{n}) - (\vec{v}\vec{\partial})\vec{v}]. \end{aligned} \qquad (18)$$

Здесь Λ – ренормировочная масса (дополнительный произвольный параметр ренормированной теории), ренормированные параметры g, ν, χ_i связаны со своими неренормированными партнерами соотношениями мультипликативной ренормировки [11]:

$$g_0 = gZ_g\Lambda^{2\epsilon}, \quad \nu_0 = \nu Z_\nu, \quad \chi_{0i} = \chi_i Z_{\chi_i}, \quad Z_g = Z_\nu^{-3}. \qquad (19)$$

Константы ренормировки Z вычисляются по теории возмущений, в схеме минимальных вычитаний (MS) [18] они имеют вид $Z = 1+$ полюса по ϵ и обеспечивают отсутствие УФ-расходимостей в корреляционных функциях модели (18). Последнее соотношение в (19) – следствие отсутствия констант Z в первом и последнем члене (18).

Чтобы выяснить как ренормированные корреляционные функции зависят от параметров a_{01}, a_{02} при добавлении вклада (16) к действию, рассмотрим парную корреляционную функцию для несжимаемой жидкости в изотропной модели (подробное изложение см., например, в [7, 22])

$$\langle v_j(\vec{x}_1, t)\, v_m(\vec{x}_2, t)\rangle = \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\, G^R_{jm}(\vec{k})\, \exp\left[i\vec{k}.(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)\right]. \qquad (20)$$

Уравнение РГ для следа ее фурье-образа $G^R(\vec{k}) = G^R_{ii}(\vec{k})$ имеет вид

$$\left[\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda} + \beta_g\frac{\partial}{\partial g} - \gamma_\nu\, \nu\frac{\partial}{\partial\nu}\right] G^R(\vec{k}) = 0\,, \qquad (21)$$

где функция β_g и аномальная размерность γ_ν выражаются через константу ренормировки Z_ν

$$\beta_g = -g(2\epsilon - 3\gamma_\nu), \qquad \gamma_\nu = \frac{\partial\ln Z_\nu}{\partial\ln\Lambda}. \qquad (22)$$

Решение уравнения РГ с учетом исходной канонической размерности функции G^R таково

$$G^R(\vec{k}) = \bar{\nu}^2(s)k^{2-d}\, R(\bar{g}(s)), \qquad s \equiv \frac{k}{\Lambda}. \qquad (23)$$

Здесь R – некоторая "скейлинговая функция " инвариантного заряда $\bar{g}(s)$, – эффективной переменной, удовлетворяющей уравнению

$$s\frac{d\bar{g}}{ds} = \beta_g(\bar{g}(s))\,, \qquad \bar{g}|_{(s=1)} = g\,. \qquad (24)$$

Вторая эффективная переменная – инвариантная вязкость $\bar{\nu}(s)$ – удовлетворяет уравнению

$$s\frac{d\bar{\nu}}{ds} = -\gamma_\nu(\bar{g}(s))\,, \bar{\nu}|_{(s=1)} = \nu\,. \qquad (25)$$

Из решения уравнений (24) получаем, что $\bar{g}(s) \to g^*$ при $s \to 0$, где g^* – ИК-устойчивая точка уравнений РГ, т.е. корень уравнения $\beta_g = 0$ с положительным значением поправочного индекса $\omega \equiv \partial\beta_g/\partial g$.

Решение уравнения (25) имеет вид

$$\bar{\nu}(s) = \nu\exp\left[-\int_g^{\bar{g}(s)} dx\frac{\gamma_\nu(x)}{\beta_g(x)}\right]. \qquad (26)$$

откуда с учетом (22) и (19) имеем

$$\bar{\nu}(s) = \nu\left(\frac{g}{\bar{g}s^{2\epsilon}}\right)^{1/3} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\bar{g}k^{2\epsilon}}\right)^{1/3}. \qquad (27)$$

Теперь из (23) и (27) для спектра кинетической энергии $E(k) \sim k^{d-1}G^R(\vec{k})$ в асимптотике $s \to 0$ получаем не зависящее от вязкости ν_0 выражение $E(k) \sim \varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$ с колмогоровским значением показателя.

При обобщении на анизотропный случай (действие (18)) к уравнению РГ (21) добавляются члены $\beta_{\chi_j}\partial G^R(\mathbf{k})/\partial\chi_j$, при этом новые β-функции и аномальные размерности γ_{χ_i} безразмерных параметров χ

$$\beta_{\chi_i} = -\chi_i\gamma_{\chi_i}, \qquad \gamma_{\chi_i} = \partial\ln Z_{\chi_i}/\partial\ln\Lambda \qquad (28)$$

выражаются через константы ренормировки Z_{χ_i} в действии (18). Дополнительные эффективные переменные $\bar{\chi}(s)$ удовлетворяют уравнениям типа (24). В работе [10] было показано, что эти уравнения имеют нетривиальную фиксированную точку $\bar{g}(s), \bar{\chi}(s) \to g^*, \chi^*$, в которой все собственные значения матрицы поправочных индексов

$$\omega_{ij} = \frac{\partial\beta_{g_i}}{\partial g_j}|_{g_i=g_i^*}\,, \quad g_i \equiv g, \chi_1, \chi_2, \chi_3\,, \quad i,j = 0,1,2,3 \qquad (29)$$

(точнее, их вещественные части) положительны, то есть колмогоровский асимптотический режим остается ИК-устойчивым при учете сильной анизотропии.

При учете сжимаемости ситуация более сложная. Допустим, что нам удалось ренормировать также действие (16). Тогда в уравнение РГ (21) добавляются вклады типа $\gamma_{a_i}\mathcal{D}_{a_i}G^R(\mathbf{k})$, где γ_{a_i} – аномальные размерности ренормированных параметров a_i (определение см. ниже). Соответствующие a_{01}, a_{02} ренормированные параметры a_1, a_2, в отличие от параметров χ, являются размерными, и скейлинговая функция R будет зависеть от безразмерных эффективных переменных

$$\overline{u_1} = k^2\overline{\nu}^2\overline{a}_1\,, \qquad \overline{u_2} = k^2\bar{\nu}\bar{a}_2\,. \qquad (30)$$

Переменные $\bar{a}_1(s), \bar{a}_2(s)$ подчиняются уравнениям типа (25). Их ИК-асимптотика при $k \to 0$ имеет вид $\bar{a}_i \sim k^{-\gamma_{a_i}}$, а асимптотика безразмерных аргументов (30) есть $\bar{u}_i \sim k^{-\Delta_{a_i}}$, подробнее см., например, [20, 21].

В линейном приближении по малым параметрам a_{01}, a_{02} в функционале (13) поправка к скейлинговой функции R, тем самым, приобретает вид $(1 + \text{const} \cdot k^{-\Delta_{max}})$, где Δ_{max} – наибольшая из размерностей Δ_{a_i}.

Таким образом, задача нахождения зависимости спектров турбулентности от сжимаемости сводится к нахождению критических размерностей Δ_{a_i} составных операторов $F_{1,2}$, входящих в действие (16).

4. Ренормировка и критические размерности составных операторов

Добавка к действию (15) вклада (16), содержащего составные операторы F_1, F_2 (17), порождает новые УФ-расходимости (полюса по ϵ) в корреляционных функциях. Для их ренормировки приходится рассматривать более широкое семейство составных операторов F_i, а именно: все составные операторы той же канонической размерности и тензорной природы, что и F_1, F_2, поскольку они примешиваются к F_1, F_2 при ренормировке.

Ренормированные операторы F_i^R связаны с неренормированным семейством F_i известной формулой мультипликативной ренормировки, подробнее см., например, [5, 7]

$$F_i = Z_{ij} F_j^R, \tag{31}$$

где Z_{ij} – матрица констант ренормировки. В общем случае в схеме MS ее диагональные элементы – это сумма единицы и полюсных по ϵ членов, а недиагональные элементы содержат только полюса. Через матрицу Z_{ij} выражаются матрица аномальных размерностей $\gamma_{ij} = Z_{ik}^{-1} \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda Z_{kj}$ и матрица критических размерностей данного семейства операторов

$$\Delta_{ij}^F = D_{ij}^F + \gamma_{ij}, \tag{32}$$

где вклад $D_{ij}^F = [d_F - \gamma_\nu d_F^\omega]_{ij}$ выражается через аномальную размерность вязкости (22), полную d_F и частотную d_F^ω канонические размерности оператора F [5], равные суммам соответствующих размерностей полей и производных, из которых построен оператор F.

Из условия безразмерности действия (14) находятся суммарные канонические размерности времени, полей и всех параметров модели [5]: $d_t = d_\omega = -2$, $d_v = 1$, $d_{v'} = d + 1$ ($d_{\vec{x}} = d_{\vec{k}} = -1$ по определению). Каноническая размерность составных операторов F_1, F_2 равна сумме канонических размерностей их компонент, т.е. $d_{F_1} = d_{F_2} = d + 4$. Эти операторы скалярные, галилеево-инвариантные и нелокальные. Согласно общей теории УФ-ренормировки [18] к нелокальным операторам F_1, F_2 могут примешиваться только локальные составные операторы (мономы, построенные из полей и производных в одной точке x) той же канонической

размерности симметрии (т.е. скалярные и галилеево-инвариантные). Сами нелокальные операторы как целое не могут иметь нелокальные УФ-расходимости и не дают вклада в ренормировку локальных операторов, но к ним могут примешиваться локальные составные операторы, в данном случае $\overline{F} = \partial v' \partial v \partial v$, $\partial v' \nabla_t v \partial v$, $\partial v' \partial^3 v$, $n^2 \partial v' \partial v \partial v$, $n^2 \partial v' \nabla_t v \partial v$, $n^2 \partial v' \partial^3 v$, $n^4 \partial v' \partial v \partial v$, $n^4 \partial v' \nabla_t v \partial v$, $n^4 \partial v' \partial^3 v$, $n^6 \partial v' \partial v \partial v$, $n^6 \partial v' \nabla_t v \partial v$, $n^6 \partial v' \partial^3 v$. Это – чисто символическая запись и означает всевозможные комбинации скалярных произведений векторов $\vec{v}', \vec{v}, \vec{\partial}, \vec{n}$.

Первые три типа были рассмотрены в [12], где было установлено, что данные операторы не дают вклада в критические размерности нелокальных F_1, F_2 благодаря блочно-треугольному характеру матрицы Z_{ij}. Это свойство матрицы констант ренормировки имеет место и для остальных составных операторов, содержащих вектор анизотропии $\vec{n}$, поэтому они также не влияют на критические размерности операторов F_1, F_2. В последних по сравнению с рассмотренными локальными операторами существуют дополнительные множители $\Delta^{-1} \partial v$, имеющие нулевую каноническую размерность, но ненулевую критическую размерность равную $-4/3$ при $\epsilon = 2$, поскольку критическая размерность поля v равна $-1/3$ [5]. Следовательно, критическая размерность $\overline{F}$ больше критической размерности F_1, F_2, и именно они дают главный вклад в инфракрасную асимптотику спектра кинетической энергии.

Как было отмечено в работе [12], нелокальные операторы F_1, F_2 состоят из локальных блоков, которые в общем случае порождают УФ-расходимости и требуют ренормировки. Если обозначить поле $\vec{v}$ линией, поле $\vec{v}'$ – направленной линией, нелокальный оператор Δ^{-1} – волнистой линией, а производные по координатам штрихом и производную по времени крестиком, то операторы (17) можно представить графически.

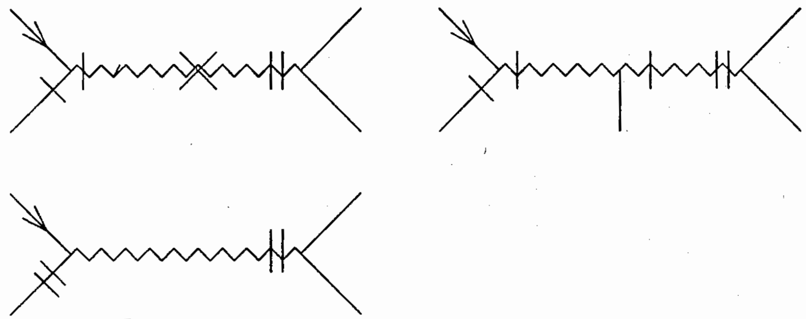

Рис.1

Здесь мы опустили индексную структуру операторов, а оператор с полной производной по времени ∇_t представили как сумму двух диаграмм. Последний оператор на рисунке дает вклад в корреляционную функцию $< v'vvv >$, который изображен на рисунке 2.

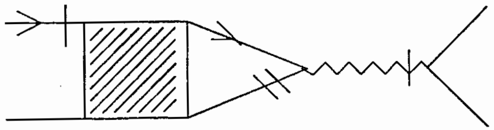

Рис.2.

Заштрихованный квадрат обозначает произвольную 1-неприводимую диаграмму с заданными внешними концами. Можно видеть, что треугольная диаграмма ультрафиолетово расходится, и для ее устранения необходимо ренормировать локальный блок рассматриваемого нелокального оператора.

Таким образом, для полной ренормировки нелокальных составных операторов (17) достаточно рассмотреть ренормировку их сомножителей (блоков), имеющих вид локальных операторов.

Оператор F_1 состоит из двух нелокальных вставок Δ^{-1}, полной производной по времени ∇_t и двух локальных сомножителей

$$G_1 = v'_i(\partial_j v_i - \partial_i v_j), \qquad G_2 = \partial_i \partial_j v_i v_j, \tag{33}$$

а F_2 состоит из Δ^{-1}, оператора G_2 и локального сомножителя

$$G_3 = v'_i \Delta v_i. \tag{34}$$

Критические размерности операторов (17) равны сумме критических размерностей составляющих их частей. Для нахождения критических размерностей операторов (33) и (34) нужно рассмотреть ренормировку целого семейства смешивающихся операторов. Это семейство оказывается довольно большим благодаря наличию анизотропии и высокой канонической размерности ($d_F = 7$ для $d = 3$). Для того, чтобы максимально упростить анализ соответствующей матрицы Z_{ij}, мы сформулируем несколько общих правил для смешивания составных операторов, их подробное разъяснение можно найти в работах [5, 7, 12, 13, 16].

a) В действии (18) в вершине взаимодействия пространственную производную интегрированием по частям можно перебросить на вспомогательное поле v': $v'_i v_j \partial_j v_i = -(\partial_j v'_i) v_i v_j$. Таким образом, каждая внешняя линия поля v' любой 1-неприводимой диаграммы содержит производную, а соответствующий ренормированный оператор пропорционален $(\partial v')$.

b) К галилеево-инвариантному оператору могут примешиваться только галилеево-инвариантные составные операторы.

c) Если оператор G представим в виде производной некоторого другого оператора $G = \partial[G]$, то критическая размерность оператора G равна сумме критической размерности $[G]$ и единицы ($\Delta_G = 1 + \Delta_{[G]}$) поскольку ненулевой при нулевом внешнем импульсе (соответствующем производной ∂) оператор $[G]$ не может примешиваться к оператору G.

d) Из-за поперечности полей v_i, v'_j чисто продольные расходимости отсутствуют.

e) Все 1-неприводимые диаграммы, содержащие замкнутые циклы запаздывающих линий $< vv' >$, равны нулю.

Семейства операторов, которые могут смешиваться с исходными операторами G или $[G]$, будем обозначать $\tilde{G}$ или $[\tilde{G}]$.

Согласно c) вместо оператора G_2 из (34) достаточно рассмотреть ренормировку оператора $[G_2] = v_i v_j$. Из-за поперечности поля v_i (пункт d)) с ним могли бы смешиваться только операторы $[\tilde{G}_3] = n_k n_l \partial_l v_k \delta_{ij}, \;\; n_k n_l \partial_l v_k n_i n_j$. Их критическая размерность равна $\Delta_{[\tilde{G}_3]} = 1 + \Delta_v$. Из [5] известны критические размерности полей v, v' и времени

$$\Delta_v = 1 - 2\epsilon/3, \quad \Delta_{v'} = d - 1 + 2\epsilon/3, \quad \Delta_t = -2 + 2\epsilon/3. \tag{35}$$

Следовательно $\Delta_{[\tilde{G}_3]} = 2 - 2\epsilon/3$, а при физическом значении $\epsilon = 2$ имеем $\Delta_{[\tilde{G}_3]} = 2/3$. Поскольку $[G_2]$ сам не ренормируется, то для критической размерности оператора G_2 получаем (пункт c)) $\Delta_{G_2} = 2 + \Delta_{[G_2]} = 2 + 2\Delta_v = 4 - 4\epsilon/3$, что при $\epsilon = 2$ дает $\Delta_{G_2} = 4/3$.

Оператор G_1 состоит из двух слагаемых: $G_1 = G_{11} - G_{12}$. В силу пункта d) вклад G_{12} можно переписать в виде $G_{12} = \partial_i(v'_i v_j)$ и рассматривать только оператор $[G_{12}] = v'_i v_j$. Он может смешиваться со следующими операторами: $\partial_i v'_j$, $n_i n_l \partial_l v'_j$, $\delta_{ij} n_k n_l \partial_l v'_k$ и $n_i n_j n_k n_l \partial_l v'_k$. Все они УФ-конечны и их размерность равна $1 + \Delta_{v'} = d + 2\epsilon/3$ или $13/3$ для $d = 3$ и $\epsilon = 2$. Диагональный элемент матрицы Z_{ij} рассматриваемого семейства равен единице (пункт a)) и, как и в случае семейства, ассоциированного с оператором G_2, данная матрица треугольная. Таким образом, $\Delta_{G_{12}} = 1 + \Delta_{[G_{12}]} = 1 + \Delta_v + \Delta_{v'} = d + 1$, или $\Delta_{G_{12}} = 4$ для $d = 3$.

Оператор G_{11} сам к себе не примешивается благодаря свойству a). Он галилеево-инвариантен, поэтому не может смешиваться с операторами такого же типа, но с тензорной структурой, содержащей вектор анизотропии $\vec{n}$ (пункт b)). Он также не смешивается с галилеево-инвариантными операторами $n_j \nabla_t n_k v'_k$ (пункт a)) и $n_i \nabla_t \partial_j v_i$ (пункт e)). Семейство $\tilde{G}_{11}$, которое может примешиваться к оператору G_{11}, состоит из операторов $\Delta v'_j$, $n_j \Delta v'_s n_s$, $n_s \partial_s n_l \partial_l v'_j$, $\partial_j n_s \partial_s v'_l n_l$, $n_j n_k \partial_k n_s \partial_s v'_l n_l$. Все они конечны и их критическая размерность равна $2 + \Delta_{v'} = 16/3$. По тем же причинам, как и для операторов G_2, G_{12}, они не дают вклада в критическую размерность оператора $G_{11} = v'_i \partial_j v_i$. Поскольку он конечен, то его критическая размерность равна $\Delta_{G_{11}} = 1 + \Delta_{v'} + \Delta_v = 4$.

Теперь рассмотрим оставшийся оператор G_3 в (34). Галилеево-инвариантные операторы $v'_i \nabla_t v_i$, $v'_i n_i \nabla_t v_j n_j$ не примешиваются к G_3 благодаря свойству a). Остаются операторы трех типов

$$\begin{aligned} \{\tilde{G}_{31}\} &= \{v'_i(\vec{n}\vec{\partial})^2 v_i, \quad (\vec{n}\vec{v}')\Delta(\vec{n}\vec{v}), \quad (\vec{n}\vec{v}')(\vec{n}\vec{\partial})^2(\vec{n}\vec{v})\}, \\ \{\tilde{G}_{32}\} &= \{\partial_l(v'_s\partial_l v_s), \partial_l(\vec{v}'\vec{\partial}v_l), (\vec{n}\vec{\partial})[v'_l(\vec{n}\vec{\partial})v_l], (\vec{n}\vec{\partial})[(\vec{v}'\vec{\partial})(\vec{n}\vec{v})], \\ &\quad \partial_l[(\vec{n}\vec{v}')\partial_l(\vec{n}\vec{v})], \partial_l[(\vec{n}\vec{v}')(\vec{n}\vec{\partial})v_l], (\vec{n}\vec{\partial})[(\vec{n}\vec{v}')(\vec{n}\vec{\partial})(\vec{n}\vec{v})]\}, \\ \{\tilde{G}_{33}\} &= \{(\vec{n}\vec{\partial})\Delta(\vec{n}\vec{v}'), \quad (\vec{n}\vec{\partial})(\vec{n}\vec{\partial})^2(\vec{n}\vec{v}')\}. \end{aligned} \tag{36}$$

Операторы $\{\tilde{G}_{33}\}$ не дают вклад в размерности $\{\tilde{G}_{31}\}$ и $\{\tilde{G}_{32}\}$ (пункт c)), они конечны и их размерность при $d = 3, \epsilon = 2$ равна $\Delta_{\{\tilde{G}_{33}\}} = 19/3$. $\{\tilde{G}_{32}\}$ не дают вклада в $\{\tilde{G}_{31}\}$ (пункт c)), они также конечны (аналогично G_{12}) и, следовательно, $\Delta\{\tilde{G}_{32}\} = 5$.

Таким образом, остается рассмотреть ренормировку семейства, включающего операторы G_3 и $\tilde{G}_{31}$. Они смешиваются при ренормировке между собой, и соответствующая матрица Z_{ij} оказывается нетривиальной. В изотропном случае в работе [12] было показано, что константа ренормировки оператора G_3 выражается через известную константу ренормировки Z_ν при вязком члене в ренормированном действии (18), а следовательно критическая размерность Δ_{G_3} явно выражается через известную функцию γ_ν. При наличии анизотропии ситуация оказывается более сложной, но и в этом случае удается выразить элементы матрицы Z_{ij} через известные константы ренормировки Z_ν и Z_{χ_i}, входящие в действие (18).

Рассмотрим производящий функционал (13) (положив в нем $det M = 1$) с ренормированным действием (18). Это – УФ-конечный объект, поэтому и его производные по ренормированным параметрам $e = \{g, \chi_i, \nu\}$ (они имеют смысл производящих функционалов составных операторов $\partial_e S$) также являются конечными объектами, как и сами операторы $\partial_e S$.

Рассмотрим уравнение РГ для $G(A, A')$

$$\mathcal{D}_{RG} G(A, A') = 0, \qquad \mathcal{D}_{RG} = [\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} - \gamma_\nu \nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_{\chi_i} \frac{\partial}{\partial \chi_i}], \tag{37}$$

где функции β_g и β_{χ_i} определены в (22) и (28).

Определим следующую матрицу:

$$\omega_{ik} = -g_i \frac{\partial \gamma_{g_i}}{\partial g_k}, \tag{38}$$

где $g_i \equiv \{g, \chi_i\}$ (напомним, что $\gamma_g = -3\gamma_\nu$). Тогда с помощью равенств (22) и (28) находим, что данная матрица в фиксированной точке g_i^* совпадает с матрицей поправочных индексов ω_{ik} из (29).

Определим коммутатор двух дифференциальных операторов D_i, D_j обычным образом: $[D_i, D_j] \equiv D_i D_j - D_j D_i$. Коммутаторы операторов $\mathcal{D}_{RG}$, $\mathcal{D}_\nu \equiv \nu\partial_\nu \equiv \nu\partial/\partial\nu$ и $\partial_{g_i} \equiv \partial/\partial g_i$ равны

$$[\mathcal{D}_{RG}, \mathcal{D}_\nu] = 0, \quad [\mathcal{D}_{RG}, \partial_{g_i}] = \omega_{ij}[\delta_{j0}\frac{1}{3g}\mathcal{D}_\nu - \partial_{g_j}] - \delta_{i0}\frac{\beta_g}{g}\partial_g. \tag{39}$$

Применяя к уравнению РГ (37) дифференциальные операции ∂_ν и ∂_{g_i} и учитывая коммутационные соотношения (39), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{RG}\partial_{g_i} G(A, A') &= \omega_{ij}[\delta_{j0}\frac{1}{3g}\mathcal{D}_\nu - \partial_{g_j}]G(A, A') - \delta_{i0}\frac{\beta_g}{g}\partial_g G(A, A'), \\ \mathcal{D}_{RG}\mathcal{D}_\nu G(A.A') &= 0. \end{aligned} \tag{40}$$

Коммутативность операторов $\mathcal{D}_{RG}$ и $\mathcal{D}_\nu$ позволяет переписать левую часть первого уравнения (40) в виде

$$\mathcal{D}_{RG}\partial_{g_i} G = \mathcal{D}_{RG}[\partial_{g_i} - \delta_{i0}\frac{1}{3g}\mathcal{D}_\nu]G - \delta_{i0}\frac{\beta_g}{3g^2}\mathcal{D}_\nu G.$$

С учетом данного соотношения уравнение (40) принимает вид

$$\mathcal{D}_{RG} X_i = -\omega_{ij} X_j - \delta_{i0}\frac{\beta_g}{g} X_0, \qquad i, j = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{41}$$

что в фиксированной точке $g^* \neq 0$ с учетом $\beta_g = 0$ дает

$$\mathcal{D}_{RG} X_i = -\omega_{ij} X_j. \tag{42}$$

Это есть уравнение аномального скейлинга для величин

$$X_i = (\partial_{g_i} - (3g)^{-1}\delta_{i0}\mathcal{D}_\nu)G(A, A'),$$

причем матрица ω_{ij} – есть матрица их аномальных размерностей. Ее собственные значения положительны (следствие известной ИК-устойчивости неподвижной точки), и согласно (38) она выражается через известные константы ренормировки Z в действии (18), которые были вычислены в [11] в однопетлевом приближении. Используя явный вид производящего функционала (13), величины X_i можно выразить явно через производные ренормированного действия (18) по его параметрам g, ν, χ_i:

$$\begin{aligned} X_i &= \int DvDv'\tilde{X}_i \exp[S(v, v') + Av + A'v'] = \\ &\int DvDv'[\partial_{g_i}S - (3g)^{-1}\delta_{i0}\mathcal{D}_\nu S]\exp[S(v, v') + Av + A'v']. \end{aligned} \tag{43}$$

Таким образом, X_i представляет собой производящий функционал корреляционных функций, содержащих, кроме полей v, v', ренормированные составные операторы $\tilde{X}_i$. Выполняя явное дифференцирование в (43), получаем

$$\tilde{X}_i = e_{i0}\mathbf{v}'\Delta\mathbf{v} + e_{i1}(\vec{v}'\vec{n})\Delta(\vec{v}\vec{n}) + e_{i2}\vec{v}'(\vec{n}\vec{\partial})^2\vec{v} + e_{i3}(\vec{v}'\vec{n})(\vec{n}\vec{\partial})^2(\vec{v}\vec{n}), \tag{44}$$

где коэффициенты e выражаются через константы ренормировки в (18)

$$\begin{aligned}
e_{00} &= \nu\left(\partial_g Z_\nu - \frac{Z_\nu}{3g}\right)|_{g=g^*}, \qquad e_{0i} = \nu\chi_i\left[\partial_g(Z_\nu Z_{\chi_i}) - \frac{Z_\nu Z_{\chi_i}}{3g}\right]|_{g=g^*}, i=1,2,3\\
e_{10} &= \nu\partial_{\chi_1} Z_\nu |_{g=g^*}, \qquad e_{1i} = \nu\chi_i\partial_{\chi_1}(Z_\nu Z_{\chi_i})|_{g=g^*},\\
e_{20} &= \nu\partial_{\chi_2} Z_\nu |_{g=g^*}, \qquad e_{2i} = \nu\chi_i\partial_{\chi_2}(Z_\nu Z_{\chi_i})|_{g=g^*},\\
e_{30} &= \nu\partial_{\chi_3} Z_\nu |_{g=g^*}, \qquad e_{3i} = \nu\chi_i\partial_{\chi_3}(Z_\nu Z_{\chi_i})|_{g=g^*}. \qquad (45)
\end{aligned}$$

Видно, что $\tilde{X}_i$ состоят из линейных комбинаций операторов G_3 и $\{\tilde{G}_{31}\}$, при этом матрица ω (38) определяет их аномальные размерности. В [11] ее собственные значения ω_i вычислены в первом порядке ϵ-разложения. Все их вещественные части положительны (два из них комплексны). Из выражения (32) для критических размерностей операторов G_3 и $\{\tilde{G}_{31}\}$ получаем $\Delta_{G_3} = 13/3 + \omega$ ($\omega \equiv \omega_0$), $\Delta_{\{\tilde{G}_{31}\}} = 13/3 + \omega_i$ для $i = 1,2,3$. Известно [11], что ω меньше любого из ω_i, поэтому среди данного семейства главный вклад в ИК-асимптотику турбулентного спектра дает G_3.

Окончательно из формул (17), (33) и (34) получаем критические размерности исходных составных операторов F_1 и F_2:

$$\Delta_{F_1} = d + 4 - 2\epsilon, \qquad \Delta_{F_2} = d + 4 - 2\epsilon + \omega. \qquad (46)$$

Используя критическую безразмерность линейной комбинации $a_i F_i^R$, входящей в ренормированное действие, соответствующее исходному действию (16), получаем критические размерности параметров a_1, a_2

$$\Delta_{a_1} = 4\epsilon/3 - 2, \qquad \Delta_{a_2} = 4\epsilon/3 - \omega. \qquad (47)$$

При $d=3$ и $\epsilon = 2$ имеем $\Delta_{a_1} = 2/3$, $\Delta_{a_2} = 2/3 - \omega$ ($\Delta_{a_2} = -10/3$ в первом порядке по ϵ). Поскольку параметр a_1 не ренормируется (см. выше), $\overline{a}_1 = a_1 = a_{01} = -c^{-2}$, и согласно (30) и (27) в фиксированной точке РГ для эффективной переменной $\overline{u}_1$ в ИК-асимптотике имеем $\overline{u}_1 \to u_1^* \sim c^{-2}\varepsilon^{1/3}k^{-2/3}$. С учетом известного соотношения $\varepsilon \sim v_c^3/L$ (ε – средняя скорость диссипации, v_c – среднеквадратичная скорость турбулентных пульсаций, L – внешний масштаб турбулентности) выражение для u_1^* принимает окончательный вид

$$u_1^* \sim (Ma)^2(kL)^{-2/3}. \qquad (48)$$

Аналогично можно найти зависимость асимптотики u_2^* от k при $\epsilon = 2$ с учетом аномалии ω: $u_2^* \sim u_1^*(k/\Lambda)^\omega$, где $\Lambda = l^{-1} = \varepsilon^{1/4}\nu_0^{-3/4}$ – обратная диссипационная длина, таким образом получаем

$$u_2^* \sim (Ma)^2(kL)^{-2/3}(kl)^\omega \qquad (49)$$

и, следовательно, в инерционном интервале в силу неравенств $kl << 1$ и $\omega > 0$ имеем $u_1^* >> u_2^*$. Как и следовало ожидать из (46), в ИК-асимптотике $k \to 0$ основной вклад в скейлинговую функцию R (23) вносит переменная u_1^* и в линейном

приближении она определяет поправку на сжимаемость в спектре кинетической энергии

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3}k^{-5/3}\left[1 + A(Ma)^2(kL)^{-2/3}\right], \qquad (50)$$

где A – числовой множитель.

Поправка на сжимаемость не зависит от вязкости и при $Ma << 1$ мала, поскольку инерционный интервал ограничен снизу внешним масштабом L, т.е. $(kL)^{-2/3} \leq 1$. Подобный результат был получен и в более простой изотропной модели, но в нашем случае амплитуда в (50) и множитель A зависят от параметров анизотропии.

5. Заключение

Таким образом, мы показали, что в статистической модели развитой сильно анизотропной турбулентности сжимаемой жидкости в первом нетривиальном порядке разложения по числу Маха гипотеза Колмогорова о независимости корреляционных функций от вязкости остается справедливой.

М.Гнатич выражает свою признательность Д.И.Казакову и директору ЛТФ ОИЯИ академику Д.В.Ширкову за создание благоприятных условий для работы в Лаборатории теоретической физики, где данная статья была завершена.

Работа выполнена при финансовой поддержке Академии наук Словакии (грант N^0 2/4171/97 и N^0 4001), Российского фонда фундаментальных исследований (грант N^0 96-02-17033) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза России (грант N^0 95-0-5.1-30).

Литература

[1] Монин А.С., Яглом А.М. *Статистическая гидромеханика* (М: Наука, 1967).

[2] Zinn-Justin J. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (New York: Clarendon, 1996).

[3] Forster D., Nelson D.R., Stephen M.J. *Phys.Rev.* **A 36** (1977) 732.

[4] De Dominicis C., Martin P.C. *Phys.Rev.* **A 19** (1978) 419.

[5] Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Письмак Ю.М. *ТМФ* **57** (1983) 268.

[6] Fournier J-D., Frish U. *Phys.Rev.* **A 19** (1983) 1000.

[7] Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н. *УФН* **166** (1996) 1257.

[8] Rubinstein R., Barton J.M. *J. Phys. Fluids* **30** (1987) 2987.

[9] Adzhemyan L.Ts., Hnatich M., Horvath D., Stehlik M. *J.Mod.Phys.* **B 9** (1995) 3401.

[10] Ким Т.Л., Сердюков А.В. *ТМФ* **105** (1995) 412.

[11] Buša J., Hnatich M., Honkonen J., Horvath D. *Phys.Rev.* **E 55** (1997) 381.

[12] Аджемян Л.Ц., Налимов М.Ю., Степанова М.М. *ТМФ* **104** (1995) 260.

[13] Волченков Д.Ю., Налимов М.Ю. *ТМФ* **106** (1996) 375.

[14] Staroselsky I., Yakhot V., Kida S., Orszag A.S. *Phys.Rev.Lett.* **65** (1990) 171.

[15] Антонов Н.В., Налимов М.Ю., Удалов А.А. Препринт SPbU IP-96-11 (Санкт-Петербург, 1996). Принято в ТМФ.

[16] Аджемян Л.Ц., Васильев А.Н., Гнатич М. *ТМФ* **74** (1988) 180.

[17] Антонов Н.В., Рунов А.В. Препринт SPbU IP-97-1 (Санкт-Петербург, 1997). Направлено в ТМФ.

[18] Collins J. *Renormalization* (Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1988).

[19] Janssen H.K. *Z.Phys.* **B 23** (1976) 377; Bausch R., Janssen H.K. *Z.Phys.* **B 24** (1976) 113.

[20] Антонов Н.В., Борисенок С.В., Гирина В.И. *ТМФ* **107** (1996) 47.

[21] Антонов Н.В., Васильев А.Н. *ТМФ* **110** (1997) 122.

[22] Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н. *ЖЭТФ* **95** (1989) 1272.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 апреля 1997 года.

Антонов Н.В., Гнатич М., Налимов М.Ю. P17-97-146

Влияние сжимаемости на спектры сильно анизотропной развитой турбулентности

Статистическая модель анизотропной развитой турбулентности сжимаемой жидкости рассматривается с помощью метода квантово-полевой ренормализационной группы. В первом нетривиальном порядке разложения по числу Маха дано обоснование гипотезы Колмогорова о независимости корреляционных функций в инерционном интервале от кинематической вязкости.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод авторов

Antonov N.V., Hnatich M., Nalimov M.Yu. P17-97-146

The Influence of the Compressibility Effects on the Spectra of Strongly Anisotropic Developed Turbulence

A statistical model of strongly anisotropic developed turbulence of compressible fluid is investigated by means of quantum-field renormalization group method. The Kolmogorov hypothesis that inertial range behavior of velocity correlation functions is independent of kinematic viscosity has been confirmed in the lowest non-trivial order of expansion in powers of the Mach number.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997