

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



С36  
П-757

2467/2-76

28/VI-76  
P17 - 9632

В.Б.Приезжев

КОРРЕЛЯЦИИ В СЛУЧАЙНОМ ПУТИ  
БЕЗ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ

**1976**

P17 - 9632

В.Б.Приезжев

КОРРЕЛЯЦИИ В СЛУЧАЙНОМ ПУТИ  
БЕЗ САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БИБЛИОТЕКА

В работе /1/ /ссылки на формулы из этой работы в дальнейшем сопровождаются цифрой 1/ мы приступили к исследованию случайных блужданий без самопересечений на плоской квадратной решетке. Мы начали с задачи 1 о блужданиях на решетке с мостиками, допускающими два возможных прохода в вертикальном направлении, и нашли точную производящую функцию для числа всех замкнутых путей без самопересечения на такой решетке /14.1/. Для решения исходной задачи для простой квадратной решетки необходимо установить связь между производящими функциями случайных блужданий на решетках с мостиками и без них. Для этого требуется прежде всего знать две функции:  $\langle \cdot \rangle$  - среднюю плотность узлов, лежащих на случайном пути, и  $\langle \updownarrow \rangle$  - количество "мостиков" на пути, точнее, среднюю плотность узлов, пройденных в вертикальном направлении в задаче 1.

Ниже будет показано, что первая функция эквивалентна средней энергии системы при заданной температуре. Вторая функция аналогична четырехспиновому коррелятору в задаче Изинга. Действительно, для построения графов, соответствующих данной спиновой конфигурации в задаче Изинга, нужно провести линию на каждом ребре решетки, смежном противоположно направленным спи-  
нам /2/. Например:

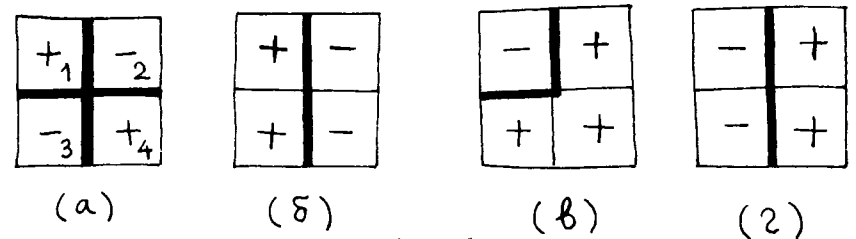


Рис. 1

Из рисунка следует, что вычисление среднего числа узлов, проходимых только в вертикальном направлении /узлы типа /б/ и /г// сводится к вычислению корреляторов  $\langle \sigma_1 \sigma_3 (1-\sigma_2)(1-\sigma_4) \rangle$  и  $\langle (1-\sigma_1)(1-\sigma_3)\sigma_2 \sigma_4 \rangle$  в которых нумерация ячеек такая же, как на рис. 1а. В задаче 1, в отличие от задачи Изинга, отсутствуют графы, содержащие вершины типа /а/, а каждая из вершин типа /б/ и /г/ встречается дважды. Техника вычисления четырехспинового коррелятора основана на применении метода Паффиана /2, 3/. Мы воспользуемся этой техникой в нашей задаче, приводя только основные определения и опуская подробности вычислений, изложенных в /2, 3/.

### 1. Функция

Рассмотрим задачу 1, определенную в /1/ как задачу о случайных замкнутых путях без самопересечений на  $M \times N$ -решетке, через каждый узел которой перекинут "мостик" в вертикальном направлении. Выпишем, как и в /1/, производящую функцию или статсумму задачи 1 в виде

$$Z = \sum_{N_1, N_2} g(N_1, N_2) x^{N_1} y^{N_2}, \quad /1/$$

где  $g(N_1, N_2)$  - число замкнутых несамопересекающихся путей, содержащих  $N_1$  шагов по горизонтали и  $N_2$  по вертикали. Напомним, что несвязанные пути в задаче 1 принимаются за один путь. Полагаем  $x = e^{-J_x/kT}$ ,  $y = e^{-J_y/kT}$ , приписывая горизонтальному шагу энергию  $J_x$ , вертикальному -  $J_y$ . Заметим, что число узлов, лежащих на пути, равно числу шагов в пути, так как по условию путь не содержит точек возврата и самопересечения. Пусть  $E_x$  и  $E_y$  - средние энергии всех горизонтальных и вертикальных участков пути. Тогда искомая функция  $\langle \cdot \rangle$  равна

$$\langle \cdot \rangle = \frac{E_x}{J_x} + \frac{E_y}{J_y}. \quad /2/$$

На основании /2/ имеем

$$\langle \cdot \rangle = - \frac{kT}{J_x} \frac{\partial}{\partial J_x} \left( \frac{1}{MN} \ln Z \right) - \frac{kT}{J_y} \frac{\partial}{\partial J_y} \left( \frac{1}{MN} \ln Z \right). \quad /3/$$

Учитывая явное выражение /14.1/ для  $Z$ , получим

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_0^{2\pi} \frac{2\pi x^2 + 4y^2 + x \cos \alpha + 2y \cos \beta + 4xy \cos \alpha \cos \beta}{1 + x^2 + 4y^2 + 2x \cos \alpha + 4y \cos \beta + 4xy \cos \alpha \cos \beta} d\alpha d\beta. \quad /4/$$

В дальнейшем нам потребуется функция  $\langle \cdot \rangle$  при значениях  $x, y$ , соответствующих линии раздела фаз /16.1/:  $y =$

$$= \frac{1}{2} (1 - x). \quad \text{Вычисляя интеграл /4/ для этого случая,}$$

получаем окончательно

$$\langle \cdot \rangle = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x(2-x)}} \left( 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}} \right) - \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \arctg \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}. \quad /5/$$

### 2. Коррелятор $\langle \uparrow \rangle$

Для вычисления  $\langle \uparrow \rangle$  перейдем к рассмотрению конфигураций димеров на некоторой решетке, определенной в /1/ так, чтобы получившаяся димерная задача была эквивалентна задаче 1. Элементарная ячейка или узел решетки, на которой располагаются димеры, изображена на рис. 2.

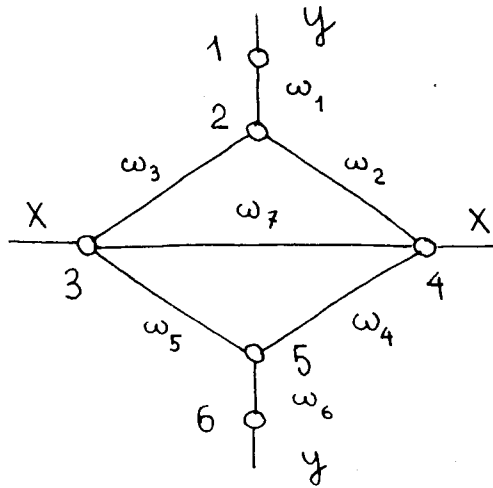


Рис. 2

Здесь  $x, y$  - веса димеров на ребрах, соединяющих узлы,  $\omega_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ) - димерные веса на остальных ребрах решетки. Требуется вычислить отношение

$$\langle \dagger \rangle = \frac{\sum_{N_1, N_2} g(N_1, N_2) x^{N_1} y^{N_2}}{\sum_{N_1, N_2} g(N_1, N_2) x^{N_1} y^{N_2}}, \quad /6/$$

в котором штрих у знака суммы означает, что суммирование проводится только по тем замкнутым путям без самопересечений, которые проходят выделенный узел в вертикальном направлении. В терминах задачи о димерах мы должны перечислить все димерные конфигурации, в которых имеются димеры, расположенные на вертикальных ребрах, соединяющих выделенный узел с двумя смежными сверху и снизу узлами. Имеется две такие конфигурации в окрестности выделенного узла /рис. 3а, б/.

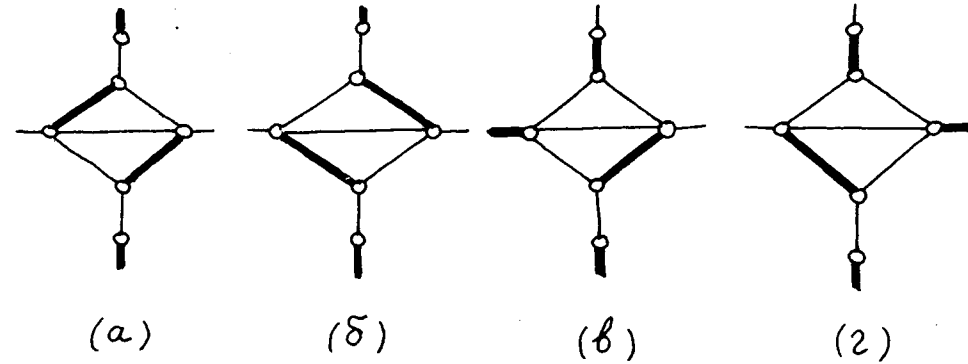


Рис. 3

Для исключения из суммы других возможных конфигураций в выделенном узле положим  $\omega_1 = \omega_6 = 0$ . Легко убедиться в том, что все конфигурации, отличные от двух указанных, содержат хотя бы один димер на ребрах  $\omega_1$  или  $\omega_6$  и поэтому обращаются в ноль /например, /в/ и /г/ на рис. 3/. Таким образом, задача вычисления  $\langle \dagger \rangle$  сводится к решению димерной задачи на декорированной решетке, в которой имеется два дефекта в выделенном узле. Согласно /3/, имеем

$$\langle \dagger \rangle^2 = \det(I + A^{-1} \delta), \quad /7/$$

где  $I$  - единичная матрица;  $A^{-1}$  - матрица, обратная определенной в /1/  $6MN \times 6MN$  матрице  $A$ , в которой  $\omega_i = 1$  ( $i = 1, \dots, 7$ );  $\delta$  - матрица дефектов, указывающая изменение  $\omega_1 = \omega_6 = 1$  на  $\omega_1 = \omega_6 = 0$  в выделенном узле. Все элементы матрицы  $\delta$ , кроме четырех, равны нулю, поэтому рецепт для вычисления детерминанта в правой части /7/ дается формулой /3/

$$\det(I + A^{-1} \delta) = \det(I + Qy) = \det(y^{-1} + Q) \det y, \quad /8/$$

в которой матрица  $y$  получается из  $\delta$  вычеркиванием строк и столбцов, содержащих только нулевые элементы, а  $Q$ -матрица, получающаяся вычеркиванием тех же строк и столбцов из  $A^{-1}$ .

Пользуясь инвариантностью решетки относительно трансляций, можно определить /3/ элементы матрицы  $A^{-1}$  с помощью формулы

$$A^{-1}(\mathbf{k})_{ij} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_x \alpha + ik_y \beta} \lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{ij} d\alpha d\beta, \quad /9/$$

где  $\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{ij}$   $6 \times 6$  - матрица, обратная матрице  $\lambda(\alpha, \beta)$ , определенной выражением /11.1/. Матрица  $y$ , согласно определению, имеет вид

$$y = \begin{bmatrix} (0,0)_{11} & (0,0)_{12} & (0,0)_{15} & (0,0)_{16} \\ (0,0)_{21} & (0,0)_{22} & (0,0)_{25} & (0,0)_{26} \\ (0,0)_{51} & (0,0)_{52} & (0,0)_{55} & (0,0)_{56} \\ (0,0)_{61} & (0,0)_{62} & (0,0)_{65} & (0,0)_{66} \end{bmatrix} \quad /10/$$

В матрице  $Q$ , соответственно, остаются следующие элементы матрицы  $A^{-1}$ :

$$Q = \begin{bmatrix} A^{-1}(0,0)_{11} & A^{-1}(0,0)_{12} & A^{-1}(0,0)_{15} & A^{-1}(0,0)_{16} \\ A^{-1}(0,0)_{21} & \dots & & \cdot \\ A^{-1}(0,0)_{51} & \dots & & \cdot \\ A^{-1}(0,0)_{61} & \dots & & A^{-1}(0,0)_{66} \end{bmatrix} \quad /11/$$

Учитывая явный вид /11.1/ матрицы  $\lambda$ , найдем элементы матрицы  $\lambda^{-1}$ , необходимые для вычисления  $Q$ :

$$\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{11} = -\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{22} = \frac{2x \sin \alpha}{\det \lambda(\alpha, \beta)}; \quad /12/$$

$$\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{22} = -\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{55} = \frac{2xy^2 \sin \alpha}{\det \lambda(\alpha, \beta)}; \quad /13/$$

$$\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{12} = -\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{21} = \lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{56} = -\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{65} = \frac{1 + x^2 - 2x \cos \alpha + 2ye^{i\beta}(1 - x \cos \alpha)}{\det \lambda(\alpha, \beta)}; \quad /14/$$

$$\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{15} = -\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{51} = -\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{26} = \lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{62} = \frac{2xye^{i\beta} \sin \alpha}{\det \lambda(\alpha, \beta)}; \quad /15/$$

$$\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{16} = -\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{61} = -\frac{2(1 - x \cos \alpha + 2ye^{i\beta})}{\det \lambda(\alpha, \beta)}; \quad /16/$$

$$\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{25} = -\lambda^{-1}(\alpha, \beta)_{52} = \frac{ye^{i\beta}(1 + x^2 - 2x \cos \alpha) + 2y^2(1 - x \cos \alpha)}{\det \lambda(\alpha, \beta)} \quad /17/$$

Подставив выражения /12/-/17/ в формулы /9/, /11/, получим выражение для матрицы  $Q$  в виде

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & B \\ -A & 0 & C & 0 \\ 0 & C & 0 & A \\ -B & 0 & -A & 0 \end{bmatrix}, \quad /18/$$

где

$$A = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha d\beta \frac{1 + x^2 - 2x \cos \alpha + 2y(1 - x \cos \alpha) \cos \beta}{1 + x^2 + 4y^2 - 2x \cos \alpha + 4y \cos \beta - 4xy \cos \alpha \cos \beta},$$

$$B = \frac{-2}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha d\beta \frac{1 - x \cos \alpha + 2y \cos \beta}{1 + x^2 + 4y^2 - 2x \cos \alpha + 4y \cos \beta - 4xy \cos \alpha \cos \beta}, \quad /20/$$

$$C = \frac{-1}{(2\pi)} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha d\beta \frac{y(1+x^2-2x\cos\alpha)\cos\beta + 2y^2(1-x\cos\alpha)}{1+x^2+4y^2-2x\cos\alpha+4y\cos\beta-4xy\cos\alpha\cos\beta} \quad /21/$$

Из выражения /10/ для матрицы  $y$  следует, что

$$y^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad /22/$$

и  $\det y = 1$ . Тогда формулы /7/, /8/, /18/, /22/ приводят к следующему выражению для искомого коррелятора:

$$\langle \uparrow \rangle = (1-A)^2 + BC. \quad /23/$$

Наряду с функцией  $\langle \cdot \rangle$ , нам потребуются значения коррелятора  $\langle \uparrow \rangle$  при значениях  $x, y$  на линии раздела фаз:

$$y = \frac{1}{2}(1-x). \quad \text{Вычисления интегралов /19/, /20/,}$$

/21/ для этого случая дают:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \operatorname{arctg} \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}, \quad /24/$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \operatorname{arctg} \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}}, \quad /25/$$

$$C = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{4} - \frac{(1+2x-x^2)}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \operatorname{arctg} \frac{1-x}{\sqrt{x(2-x)}} \right] + \frac{1-x^2}{2} \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right]. \quad /26/$$

В следующей работе найденные функции  $\langle \cdot \rangle$  и  $\langle \uparrow \rangle$  будут использованы для установления связи между производящими функциями случайных блужданий без самопересечения в задаче 1 и исходной задаче на простой квадратной решетке.

В заключение я хотел бы выразить признательность В.К.Федяину за полезное обсуждение.

#### Литература

1. В.Б.Приезжев. Сообщение ОИЯИ, P17-9633, Дубна, /1976/.
2. Э.В.Монролл. В сб. "Прикладная комбинаторная математика", М., Мир, 1968.
3. Э.В.Монролл. В сб. "Устойчивость и фазовые переходы". М., Мир, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел  
23 марта 1976 года.