СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96-382

Р17-96-382

Г.Очирбат, Д.Улам-Оргих, О.Нямсурэн

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛН НА ПЛАНАРНОЙ СТРУКТУРЕ, КОТОРЫЕ ПРИВОДЯТСЯ К КВАДРАТУРЕ

1996

Очирбат Г., Улам-Оргих Д., Нямсурэн О. Р17-96-382
Некоторые задачи рассеяния оптических волн
на планарной структуре, которые приводятся к квадратуре

Рассматривается задача рассеяния стационарных оптических волн на нелинейной планарной структуре. Выводится первый интеграл уравнений Максвелла, обобщающий прежние результаты, полученные разными авторами, для ТЕ- и ТМ-волн в диэлектрике с нелинейностью керровского типа. Публикуются подобные общие первые интегралы для керроподобного диэлектрика с насыщением и нелинейного магнетика, а также для одноосного анизотропного кристалла с изотропной нелинейной частью. С их помощью частные задачи для ТЕ- и ТМ-волн в этих средах приводятся к квадратуре. Метод первого интеграла достаточен для полного анализа явления рассеяния на поверхности нелинейной подложки.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований, Дубна, 1996

Перевод авторов

Ochirbat G., Ulam-Orgikh D., Nyamsuren O. P17-96-382
Some Problems of Scattering of Optical Waves
on the Planar Structure, which are Reduced to Quadrature

A scattering of stationary optical waves from nonlinear layred plane structure is considered. Integral of motion, which generalizes the previous results obtained by different authors, for TE and TM waves in nonlinear dielectric kerr medium is derived. Such general integrals of motion are given for nonlinear kerr-like dielectric with saturation and magnetic medium as well as for one-axis anisotropic cristal with nonlinear isotropic part. Using them particular problems for TE and TM waves are reduced to quadratures in those media. Integral of motion method is suffifient to perform a full analysis of scattering from surface of nonlinear subsrate.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996

Рассеянию электромагнитной (ЭМ) волны на нелинейной плёнке и на периодических или квазипериодических планарных гетероструктурах посвящены многочисленные работы. Свойства поверхностных и волноводных волн в планарных слоистых структурах изучались в [1] – [6]. Эти работы основывались на применении точных векторных уравнений Максвелла, для решения которых были использованы численные, точные аналитические и приближенно-аналитические методы. В них хорошо исследовано и раньше всех найдено аналитическое решение уравнения Гельмгольца для ТЕ– поляризованной волны, распространяющейся вдоль нелинейной планарной структуры, которое из-за требования исчезновения полей волн на бесконечности в перпендикулярном к плоскости однородности структуры направлении должно быть действительным и обладать очень простой конфигурацией. Хотя задача распространения волноводных и поверхностных волн ТМ– поляризации в планарных структурах усложняется из-за невозможности приведения уравнений Максвелла к одному уравнению, тем не менее решение также сводится к квадратуре путем разделения переменных [7]. Вопрос о рассеянии ТМ– волны, естественно, возник позже, так как в этом случае решение должно быть комплексным, и при этом придётся учитывать большое число степеней свободы. В 1989 году К. Т. Леунгу удалось свести к квадратуре задачу о рассеянии ТЕ– волны на нелинейной керровской пленке и несколько позже он совместно с Р. Л.Лином [8], а также автор статьи [9], вывели аналитическое решение задачи для ТМ-волн в среде с нелинейностью керровского типа.

В этих работах было продемонстрировано существование нетривиального первого интеграла, отличного от известного нам потока энергии, с помощью которого авторам удалось свести задачу к квадратуре. С тех пор подходы с использованием первого интеграла с успехом применялись к ТЕ– и ТМ– волнам не только в случае нелинейности керровского типа, но и в изотропной среде с другим типом нелинейности, а также в нелинейном анизотропном кристалле и нелинейных магнетиках. Были сделаны попытки использования полученного нами первого интеграла, обобщающего прежние результаты для ТЕ– и ТМ– волн в задаче распространения волн общей поляризации в нелинейной подложке. В настоящей работе приведена сводка первых интегралов уравнений Максвелла для волн в разных средах, которые раньше были получены нами и применялись в различных задачах.

Волну, рассеивающуюся на плоской слоистой структуре, представим в виде

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{e}(z)e^{-i\omega t+ik_0\beta x} + k.c,$$
$$\vec{H}(x,y,z) = \vec{h}(z)\cdot e^{-i\omega t+ik_o\beta x} + k.c.$$

Здесь k_0 -модуль волнового вектора, соответствующий вакууму, $\beta-$постоянная рефракции.

Свет падает из $z<0$ среды на поверхность $z=0$. Волна, бегущая вдоль x– направления, может быть в данном слое стоячей или бегущей вдоль z-направления в зависимости от того, является ли этот слой подложкой или нет. До сих пор работы, посвящённые рассеянию, рассматривали случай, когда волна падает из линейной среды на плоскую планарную структуру. Иными словами задача рассеяния волны, падающей из нелинейной среды, не рассматривалась. Этому вопросу мы посвятим отдельную работу.

Диэлектрик

Диэлектрическая функция нелинейной изотропной среды определяется её зависимостью от локальной интенсивности поля :

$$\epsilon = \epsilon(\vec{E}\vec{E}^*).$$

Если найдется такая функция U, которая удовлетворяет условию

$$D_i = \epsilon E_i = \frac{\partial U}{\partial E_i^*}, \qquad i = x,y,z\ , \tag{1}$$

тогда существует первый интеграл

$$H_x H_x^* = -U + \beta^2 E_y E_y^* + \frac{2\beta^2-\epsilon}{\epsilon} H_y H_y^* + cnst. \tag{2}$$

Здесь и далее используется для краткости обозначение

$$c\mu_0\vec{H} \rightarrow \vec{H}.$$

Первые интегралы, найденные другими авторами, будут являться частными случаями этого. Более того, здесь не ставится ограничение на вид зависимости ϵ от EE^*.

Для конкретности применим метод первого интеграла к диэлектрикам с нелинейностью керровского и керроподобного типа с насыщением.

Диэлектрической среде с нелинейностью керровского типа соответствует следующая зависимость:

$$\epsilon = \varepsilon + \alpha EE^*. \tag{3}$$

Здесь ε -диэлектрическая постоянная, α- постоянная Керра, которая в исходных уравнениях больше не появляется, если ввести замену

$$\sqrt{\alpha}\vec{E} \rightarrow \vec{E}, \qquad \sqrt{\alpha}\vec{H} \rightarrow \vec{H}, \qquad \alpha\cdot cnst \rightarrow cnst, \qquad U \rightarrow \alpha U. \tag{*}$$

В данном случае функция, удовлетворяющая условию (1), есть

$$\begin{aligned} U = {} & \varepsilon(e_x e_x^* + e_y e_y^* + e_z e_z^*) + \tfrac{1}{2}\cdot(e_x^2 e_x^{*^2} + e_y^2 e_y^{*^2} + \\ & + e_z^2 e_z^{*^2} + 2(e_x e_x^* e_y e_y^* + e_x e_x^* e_z e_z^* + e_y e_y^* e_z e_z^*)). \end{aligned} \tag{4}$$

Это очень важно, что она выражается через одну только переменную–диэлектрическую функцию:

$$U = 0.5(\epsilon^2 - \varepsilon^2), \tag{5}$$

в керроподобной среде с насыщением

$$\epsilon = \varepsilon + \varepsilon_{sat}\left\{1 - exp\left[-\frac{EE^*}{\varepsilon_{sat}}\right]\right\}. \tag{6}$$

Здесь ε_{sat}-максимально возможный прирост диэлектрической функции до насыщения. Условию (*) удовлетворяет функция U:

$$U = (\varepsilon + \varepsilon_{sat})\vec{E}\vec{E}^* + \varepsilon_{sat}^2\left\{exp\left(-\frac{\vec{E}\vec{E}^*}{\varepsilon_{sat}}\right) - 1\right\}. \tag{7}$$

Здесь также прослеживается зависимость U от диэлектрической функции:

$$U = \varepsilon_{sat}\left\{(\varepsilon + \varepsilon_{sat})\ln\frac{\varepsilon_{sat}}{\varepsilon_{sat}+\varepsilon-\epsilon} - (\epsilon - \varepsilon)\right\}. \tag{8}$$

Рассмотрим два важных для оптики случая.

1. Для поперечной (TE) электрической волны имеем $e_y \neq 0$, $h_y = 0$. Также из уравнений Максвелла следует, что $e_x = e_z = 0$.

а). В случае диэлектрика с нелинейностью керровского типа из (2) и (3) с учётом (5) находим, что

$$e_y e_y^* = \epsilon - \varepsilon, \qquad h_x h_x^* = \frac{1}{2}(\epsilon - \varepsilon)(2\beta^2 - \varepsilon - \epsilon) + cnst. \tag{9}$$

Поскольку $h_z = \beta e_y$, модули всех ненулевых компонентов поля выражаются через одну величину ϵ. С другой стороны, "эволюция" ϵ от координаты z определяется замкнутым консервативным уравнением. После решения этого уравнения координатная зависимость всех ненулевых компонентов поля автоматически находится из выражений (9).

Из уравнений Максвелла находим следующее уравнение:

$$\frac{d\epsilon}{dz} = 2|e_y h_x| cos\Delta\phi, \tag{10}$$

где $\Delta\phi$ есть разность фаз между e_y и $-ih_x$. Здесь и в последующем принято обозначение $k_0 z \to z$.

Следует дополнить (9) и (10) ещё одним первым интегралом, представляющим собой закон сохранения потока энергии:

$$S_z = -\frac{1}{2}|e_y h_x| \sin\Delta\phi = c_0. \tag{11}$$

Из выражения (10) с учётом (9), (11) находим, что

$$z = \frac{1}{2}\int^{\epsilon} \frac{d\epsilon}{\sqrt{(\epsilon-\varepsilon)\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot(\epsilon-\varepsilon)(2\beta^2-\varepsilon-\epsilon)+cnst\right\}-4c_0^2}} . \tag{12}$$

Отсюда определяется зависимость $\epsilon = \epsilon(z)$, и в дальнейшем зависимость модулей компонентов поля от z и разность фаз $\Delta\phi$ находятся, соответственно, из (11) с учётом (9). При рассмотрении рассеяния на плёнке нет необходимости в нахождении фаз e_y и h_x по отдельности.

В плёнке, в гетероструктурах и в слоистых конфигурациях уравнения (6), (9) и (12) должны применяться с учётом граничных условий и тем самым задача рассеяния TE– волны полностью решается аналитически.

б). В керроподобном диэлектрике с насыщением из (2) и (6) с учётом (8) находим, что

$$|e_y|^2 = \varepsilon_{sat}\ln\frac{\varepsilon_{sat}}{\varepsilon_{sat}+\varepsilon-\epsilon} , \tag{13}$$

$$|h_x^2| = -\varepsilon_{sat}\left\{(\varepsilon+\varepsilon_{sat}-\beta^2)\ln\frac{\varepsilon_{sat}}{\varepsilon_{sat}+\varepsilon-\epsilon} - (\epsilon-\varepsilon)\right\} + cnst. \tag{14}$$

Поскольку $h_z = \beta e_y$, как и в случае диэлектрика с нелинейностью керровского типа, все ненулевые компоненты поля выражаются через одну величину ϵ, которая, в свою очередь, подчиняется уравнению

$$\frac{d\epsilon}{dz} = 2\frac{\varepsilon_{sat}+\varepsilon-\epsilon}{\varepsilon_{sat}}|e_y h_x|\cdot\cos\Delta\phi. \tag{15}$$

Из этого уравнения с учётом (13), (14) и (11) находим, что

$$z = \frac{1}{2}\int^{\epsilon}\frac{(\varepsilon_{sat}+\varepsilon-\epsilon)^{-1}d\epsilon}{\sqrt{\ln\frac{\varepsilon_{sat}}{\varepsilon_{sat}+\varepsilon-\epsilon}\left[(\beta^2-\varepsilon_{sat}-\varepsilon)\ln\frac{\varepsilon_{sat}}{\varepsilon_{sat}+\varepsilon-\epsilon}+(\epsilon-\varepsilon)+\frac{cnst}{\varepsilon_{sat}}\right]-4c_0^2}}. \tag{16}$$

Отсюда определяется зависимость $\epsilon = \epsilon(z)$. После этого координатные зависимости амплитуды $|e_y|$, $|h_x|$ и разность фаз $\Delta\phi$ определяются из (13), (14) и (15).

2. Для поперечной (TM) магнитной волны имеем по определению

$$h_y \neq 0, \;\; e_y = 0.$$

Из уравнений Максвелла следует, что $H_x = H_z = 0$.

а). В случае диэлектрика с нелинейностью керровского типа из (2), (3) с учётом (5) находим, что

$$|e_z|^2 = \frac{\beta^2}{2\beta^2-\epsilon}\cdot\frac{1}{\epsilon}\cdot\left(\frac{\epsilon^2-\varepsilon^2}{2} - cnst\right), \tag{17}$$

$$|e_x|^2 = \epsilon - \varepsilon - |e_y|^2, \quad |h_y|^2 = \frac{\epsilon^2}{\beta^2}|e_z|^2. \tag{18}$$

Здесь ненулевые компоненты поля выражаются, как и выше, через одну величину ϵ. Для z -зависимости ϵ из уравнений Максвелла следует уравнение

$$\frac{d\epsilon}{dz} = \left(-2\cdot\frac{2\beta^2-\epsilon}{\epsilon}|e_x h_y|\cdot\cos\Delta\phi_H\right)\left(1+\frac{2\beta^2}{\epsilon^3}\cdot|h_y|^2\right)^{-1}, \tag{19}$$

где $\Delta\phi_H$– разность фаз между величинами e_z и $-ie_x$. Выражения (18) и уравнение (19) составляют замкнутый аппарат, если сюда ещё включить закон сохранения потока энергии:

$$S_z = -\frac{1}{2}|e_x\cdot h_y|\cdot\sin\Delta\phi_H = c_0. \tag{20}$$

Из (19) с учётом (20) находим, что

$$z = -\int^{\epsilon}\frac{(\frac{\epsilon}{2}+|e_z|^2)\cdot d\epsilon}{(2\beta^2-\epsilon)\sqrt{|e_x\cdot h_y|^2-4c_0^2}}. \tag{21}$$

б). В случае керроподобного диэлектрика с насыщением из (2) и (6) с учётом (8) находим, что

$$|e_z^2| = \frac{\beta^2}{2\beta^2-\epsilon}\cdot\frac{1}{\epsilon}\left\{\varepsilon_{sat}\left[(\varepsilon+\varepsilon_{sat})\ln\frac{\varepsilon_{sat}}{\varepsilon_{sat}+\varepsilon-\epsilon} - (\epsilon-\varepsilon)\right] - cnst\right\}, \tag{17'}$$

$$|e_x|^2 = \varepsilon_{sat}\ln\frac{\varepsilon_{sat}}{\varepsilon+\varepsilon_{sat}-\epsilon} - |e_z|^2, \quad |h_y|^2 = \frac{\epsilon^2}{\beta^2}|e_z|^2. \tag{18'}$$

Ненулевые компоненты поля также выражаются через одну переменную ϵ, которая подчиняется уравнению

$$\frac{d\epsilon}{dz}=-2\frac{2\beta^2-\epsilon}{\epsilon}|Ah_y|cos\Delta\phi_H\left(\frac{2\beta^2}{\epsilon^3}|h_y|^2+\frac{\varepsilon_{sat}}{\varepsilon_{sat}+\varepsilon-\epsilon}\right)^{-1}. \qquad (22)$$

Из этого уравнения с учётом (20) находим, что

$$z=-\frac{1}{2}\int^{\epsilon}\frac{\frac{2\beta^2}{\epsilon^3}|h_y|^2+\frac{\varepsilon_{sat}}{\varepsilon_{sat}+\varepsilon-\epsilon}}{\frac{2\beta^2-\epsilon}{\epsilon}\cdot\sqrt{|e_xh_y|^2-4c_0^2}}. \qquad (23)$$

Если учесть, что входящие сюда $|e_x|^2$ и $|h_y|^2$ выражаются только через ϵ согласно $(17)'$ и $(18)'$, то (23) представляет собой зависимость $\epsilon=\epsilon(z)$.

Для определения коэффициента отражения на плёнке или суперрешетке надо вычислять интеграл в каждом отдельном слое и в подложке, связывая их граничными условиями на границах соприкасающихся слоёв. В наипростейшем случае одной плоской границы необязательно вычислять интеграл для нелинейной подложки, т.е. и без него можно получить полную картину рассеяния волн.

В качестве простейшего приложения полученных результатов рассмотрим рассеяние на плоской границе диэлектрика с нелинейностью керровского типа. Значение амплитуды электрического компонента поля в TE -волне на границе ($z=0^-$) есть $E=(1+r)E_0$, где E_0-значение амплитуды падающей волны, r-фактор отражения. Тогда

$$r=\frac{\eta-\sqrt{\epsilon-\beta^2}}{\eta+\sqrt{\epsilon-\beta^2}}, \qquad (24)$$

где $\eta=(\varepsilon_1-\beta^2)^{1/2}$ и ε_1 -диэлектрическая постоянная линейной среды, от которой волна падает на плоскую поверхность нелинейной среды. Здесь и ниже под ϵ понимается диэлектрическая функция этой среды.

Интенсивность падающей волны в случае нелинейности керровского типа выражается как

$$S=\frac{1}{8\mu_0c\eta}\cdot\frac{1}{\alpha}(\eta+\sqrt{\epsilon-\beta^2})^2(\epsilon-\varepsilon_2). \qquad (25)$$

Формулы (24) и (25) верны в случае частичного проникновения волны во вторую среду, т.е., если $|r|^2\neq 1$. Выражения (24), (25) дают зависимость амплитуды отражения TE- волн от падающей интенсивности в форме параметрического уравнения.

Значение амплитуды магнитного поля для волны с TM- поляризацией на границе ($z=0^-$) есть $H=(1+r)H_0$, где H_0 -значение амплитуды

падающей волны, r-фактор отражения. Тогда

$$r=\frac{\eta-\frac{\varepsilon_1}{\epsilon}\sqrt{\epsilon-\beta^2}}{\eta+\frac{\varepsilon_1}{\epsilon}\sqrt{\epsilon-\beta^2}} \qquad (26)$$

и выражение интенсивности падающей волны TM- поляризации в случае нелинейности керровского типа дается как

$$S=\frac{1}{8\mu_0c\varepsilon_1\eta\alpha}\left\{(\eta+\frac{\varepsilon_1}{\epsilon}\sqrt{\epsilon-\beta^2}\right\}\cdot\epsilon(\epsilon-\varepsilon_1). \qquad (27)$$

Формулы (26), (27) представляют собой зависимость амплитуды отражения TM- волн от падающей интенсивности в параметрической форме.

Случай полного отражения требует отдельного рассмотрения. Амплитуда отражения становится комплексной величиной, модуль которой равен единице. Для волны с TE- поляризацией

$$r_{TE}=\frac{\sqrt{2}\eta-i\sqrt{2\beta^2-\varepsilon_2-\epsilon}}{\sqrt{2}\eta+i\sqrt{2\beta^2-\varepsilon_2-\epsilon}}. \qquad (28)$$

Выражение же для интенсивности падающей волны отличается от (25), а именно:

$$S_{TE}=\frac{1}{16\mu_0c\eta\alpha}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\epsilon)(\epsilon-\varepsilon_1). \qquad (29)$$

Для волны с TM- поляризацией имеем

$$r_{TM}=\frac{i\epsilon\eta(\epsilon+\varepsilon)^{1/2}+\varepsilon(3\beta^2\epsilon-2\epsilon^2-\beta^2-\beta^2\varepsilon)^{1/2}}{\varepsilon(3\beta^2\epsilon-2\epsilon^2-\beta^2\varepsilon)^{1/2}-i\epsilon\eta(\epsilon+\varepsilon)^{1/2}} \qquad (30)$$

и падающая интенсивность в случае нелинейности керровского типа

$$S_{TM}=\frac{1}{16\alpha}\cdot\frac{\epsilon\varepsilon_0}{\varepsilon_1\eta}\cdot\frac{\eta^2\epsilon^3+(\eta^2\varepsilon_2-2\varepsilon_1^2)\epsilon^2+3\varepsilon_1^2\beta^2\epsilon-\varepsilon_1^2\varepsilon_2\beta^2}{\epsilon(2\beta^2-\epsilon)}\cdot(\epsilon-\varepsilon_2). \qquad (31)$$

Нужно отметить, что в формулах (28)-(31) величина ϵ представляет собой значение диэлектрической функции на границе, т.е. на поверхности нелинейной подложки ($z=0^+$). Поскольку формулы (24)-(31) дают функциональную зависимость амплитуды отражения волн от падающей интенсивности, мы имеем возможность анализировать в полной мере картину отражения. Мы приводим некоторые наиболее интересные результаты, исходящие из этих формул.

На рис. 1 , 2 приведены графики зависимости коэффициента отражения TM- волн от падающей интенсивности и от значений диэлектрической функции нелинейной подложки. Так, два минимума кривой на

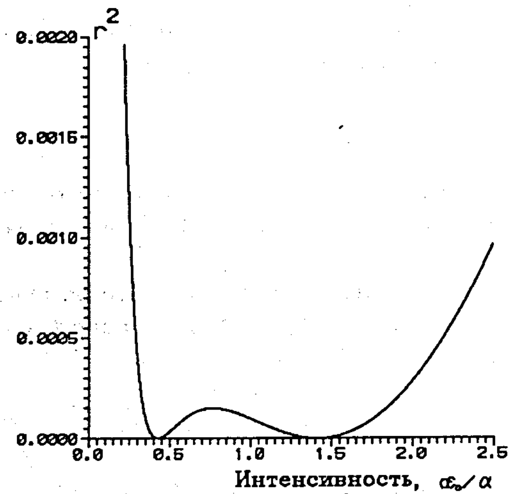

Рис. 1. Зависимость коэффициента отражения r^2 от падающей интенсивности. Два минимума на этой кривой соответствуют картине, описанной на рис. 2 ($\varepsilon_2 = 1$, $\beta^2 = 1.2$, $\varepsilon_1 = 3.07$)

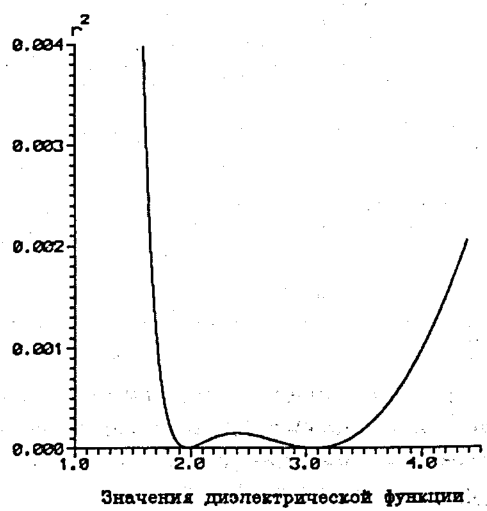

Рис. 2. Зависимость коэффициента отражения r^2 от значений диэлектрической функции. Минимум при $\epsilon = \varepsilon_1$ соответствует выравниванию диэлектрических характеристик двух сред, а другой минимум – брюстеровскому отражению ($\varepsilon_2 = 1$, $\beta^2 = 1.2$, $\varepsilon_1 = 3.07$)

втором графике соответствуют двум значениям диэлектрической функции, при которых амплитуда отражения (26) для ТМ– волн обращается в нуль. Одно из них, $\epsilon = \varepsilon_1$, просто напросто выражает тот тривиальный факт, что когда значение диэлектрической функции нелинейной подложки равняется значению диэлектрической константы линейной надстройки, волна перестаёт "чувствовать" границу между ними и поэтому не рассеивается.

Другое — $\epsilon = \varepsilon_1 \cdot \frac{\beta^2}{\varepsilon_1 - \beta^2}$. Это и есть условие брюстеровского отражения.

На рис. 1 этим двум "нулевым" значениям диэлектрической функции соответствуют два значения падающей интенсивности.

На рис. 3 показан особый случай, который имеет место при наличии дефокусирующей подложки. Зависимость амплитуды отражения на одной плоской границе дефокусирующей подложки от падающей интенсивности приобретает форму петли.

Проанализируем ситуацию с режимом полного отражения ТЕ– волн. Из-за отсутствия потока энергии в этом случае необходимо положить $\Delta\phi = -\pi$ в формуле (11). При этом из (10) следует, что $d\epsilon/dz < 0$, т.е. значение диэлектрической функции убывает в глубь подложки. Согласно (3) интенсивность волны также убывает. Однако относительно $|h_x|^2$ этого нельзя сказать. Действительно, так как она зависит квадратично от ϵ и поскольку $cnst = 0$, ϵ вообще может принимать значение только на интервале $(\varepsilon,\ 2\beta^2 - \varepsilon)$ согласно соотношению (9). Если же значение диэлектрической функции на границе больше β^2 и меньше $(2\beta^2 - \varepsilon)$, то величина $|h_x|^2$ сначала возрастает с координатой z, до тех пор пока ϵ не достигнет значения β^2, а потом она монотонно убывает (рис.4). Подобная картина наблюдается также относительно величины $|e_x|^2$, но для ТМ– поляризованной волны. Эти явления имеют общие корни с так называемыми поверхностными волнами в многослойных структурах. Немонотонность амплитуды какого-либо компонента электромагнитного поля под поверхностью подложки есть чисто нелинейный эффект. Другое, более парадоксальное следствие, вытекающее из выше приведенных формул, состоит в том, что при одном и том же значении диэлектрической функции на поверхности подложки, удовлетворяющей условию $\beta^2 \leq \epsilon \leq 2\beta^2 - \varepsilon$, могут существовать и волна полного отражения, и волна с частичным прохождением. Это и есть причина появления на диаграмме "коэффициент отражения–падающая интенсивность" ветвления (рис.5), которое напоминает диаграмму состояний перегретой жидкости и пара. Подобная картина наблюдается также для ТМ– поляризованных волн.

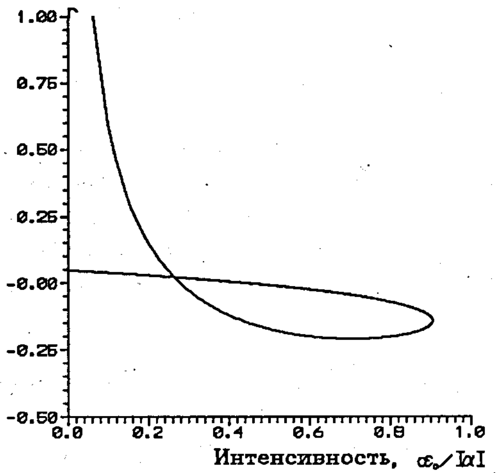

Рис. 3. Дефокусирующая среда. Зависимость амплитуды отражения r от падающей интенсивности имеет форму петли ($\varepsilon_1 = 2.46$, $\beta^2 = 0.3$, $\varepsilon_2 = 3.07$)

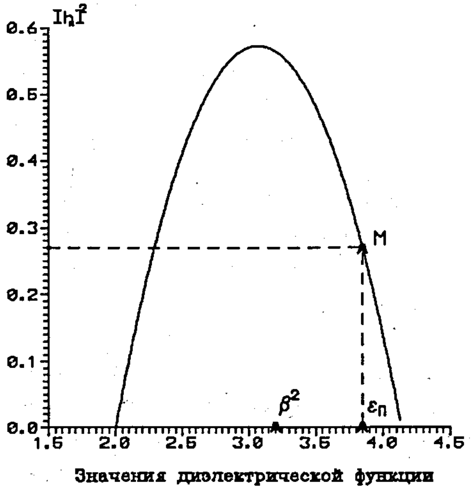

Рис. 4. Если на поверхности подложки значение диэлектрической функции (скажем, ϵ_{Π}) больше β^2, то $| h_x |^2$ возрастает в глубь среды, до тех пор пока ϵ не станет равным β^2, а потом монотонно убывает ($\varepsilon_1 = 3.2$, $\beta^2 = 3.07$, $\varepsilon_2 = 2$)

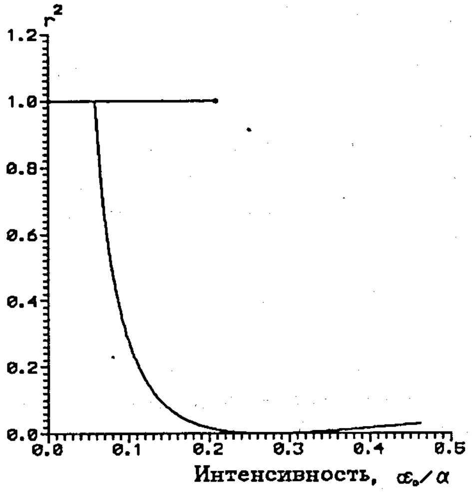

Рис. 5. r^2 - коэффициент отражения. Видно, что на интервале (0.06, 0.21) падающей интенсивности существуют и волна полного отражения, и волна частичного проникновения ($\varepsilon_1 = 3.02$, $\beta^2 = 2.82$, $\varepsilon_2 = 1.8$)

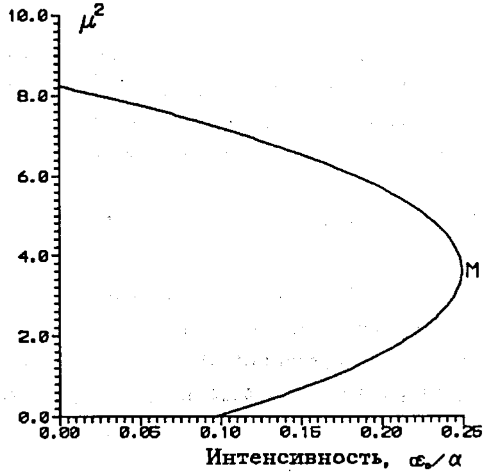

Рис. 6. $\mu^2 = tg(\phi/2)$, ϕ - сдвиг фазы электрического вектора полностью отраженной волны. В точке M кривая разветвляется. Зависимость μ^2 от падающей интенсивности проявляет сингулярность типа точки ветвления ($\varepsilon_1 = 3.2$, $\beta^2 = 3.07$, $\varepsilon_2 = 2.0$)

Для нелинейного полного отражения имеет смысл исследовать поведение амплитуды отражения в зависимости от падающей интенсивности. Амплитуда отражения представляется в виде $r = exp(-i\varphi)$. Введя вместо угла поворота φ величину $\mu = tg\frac{\varphi}{2}$, выражаем квадрат этой величины через падающую интенсивность:

$$\mu^2 = \frac{1}{2\eta^2}(2\beta^2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \pm \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 - 16\mu_0 c\eta\alpha S}).$$

Из этой формулы явствует, что зависимость μ^2 от S носит сингулярный характер. При значении S, равном $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2/(16\mu_0 c\eta\alpha)$, кривая $\mu^2(s)$ разветвляется. На рис. 6 точка, в которой кривая разветвляется, обозначена через М.

Магнетик

В нелинейном изотропном магнетике магнитная проницаемость определяется модулем локальной напряженности магнитного поля. Если существует такая функция U от $\vec{H}$, что

$$\frac{\partial U}{\partial H_x^*} = \mu H_x, \quad \frac{\partial U}{\partial H_y^*} = \mu H_y, \quad \frac{\partial H}{\partial H_z^*} = \mu H_z, \tag{32}$$

то имеется первый интеграл

$$\frac{\mu\varepsilon(\mu\varepsilon - 2\beta^2)}{\beta^2}|H_z|^2 + \varepsilon^2 E_x E_x^* = \beta^2 H_y H_y^* - \varepsilon U + cnst. \tag{33}$$

Вид функции $U(\vec{H})$ зависит, конечно, от выбора функции $\mu(HH^*)$. Если последняя при малых значениях HH^* линейно зависит от этой величины и при её больших значениях асимптотически насыщается, то обычно выбирают следующую феноменологическую модель:

$$\mu = \mu_л + \mu_{sat}\left\{1 - exp(-\frac{\nu}{\mu_{sat}}|\vec{H}|^2)\right\}, \tag{34}$$

где $\mu_л$ -предельное значение магнитной проницаемости при $\vec{H} \to 0$, μ_{sat} - максимально возможный прирост магнитной проницаемости, ν - постоянная для данной магнитной среды. Используем замену (*), в которой вместо α фигурирует ν. Соответствующая этой модели функция U такова:

$$U = \mu_{sat}\cdot\left\{(\mu_л + \mu_{sat})\ln\frac{\mu_{sat}}{\mu_л + \mu_{sat} - \mu} + \mu_л - \mu\right\}. \tag{35}$$

Волна TE– поляризации. Имея $e_x = e_z = h_y = 0$, из (33), (34) и (35) находим, что

$$|h_z|^2 = \frac{\beta^2}{2\beta^2 - \mu\varepsilon}\cdot\frac{1}{\mu}\left(U - \frac{cnst}{\varepsilon}\right), \tag{36}$$

$$|h_x|^2 = \mu_s \cdot \ln\frac{\mu_{sat}}{\mu_{sat} + \mu_л - \mu} - |h_z|^2. \tag{37}$$

Из уравнений Максвелла следует

$$|e_y|^2 = \frac{\mu^2}{\beta^2}|h_z|^2. \tag{38}$$

Если учесть, что U выражается через μ согласно (35), то видно, что ненулевые компоненты поля (36), (37) и (38) выражаются тем же μ. Зависимость μ от z определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\mu}{dz} = \frac{2\cdot\frac{2\beta^2 - \mu\varepsilon}{\beta}\cdot|h_x h_z|\cos\Delta\phi}{\frac{2}{\mu}|h_z|^2 + \mu_{sat}\cdot\frac{1}{\mu_{sat} + \mu_л - \mu}}. \tag{39}$$

Его решение даёт

$$z = \frac{\beta}{2}\int^{\mu}\frac{\frac{2|h_z|^2}{\mu} + \mu_{sat}\cdot\frac{1}{\mu_{sat} + \mu_л - \mu}}{(2\beta^2 - \mu\varepsilon)\sqrt{|h_x h_z|^2 - \frac{4\beta^2}{\mu^2}c_0^2}}, \tag{40}$$

где $|h_x|^2$, $|h_x|^2$- суть выражения (36) и (37).

Волна TM– поляризации. Полагая $e_y = h_x = h_z = 0$, находим из (33), (34) и (35) следующие выражения:

$$\begin{aligned} |e_x|^2 \ &= \ \mu_{sat}\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\ln\frac{\mu_{sat}}{\mu_{sat} + \mu_л - \mu}(\beta^2 - \varepsilon(\mu_л + \mu_{sat})) - \right. \\ &\left. -\varepsilon(\mu_л - \mu) + \frac{cnst}{\mu_{sat}}\right\}, \end{aligned} \tag{41}$$

$$|e_z|^2 = \frac{\beta^2\cdot\mu_{sat}}{\varepsilon^2}\ln\frac{\mu_{sat}}{\mu_{sat} + \mu_л - \mu}, \tag{42}$$

$$|h_y|^2 = \mu_{sat}\cdot\ln\frac{\mu_{sat}}{\mu_{sat} + \mu_л - \mu}. \tag{43}$$

Все ненулевые компоненты поля выражаются через μ. Зависимость от z определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mu}{dz} = -\frac{2\varepsilon|h_y\cdot e_x|\cdot\cos\Delta\phi_H(\mu_{sat} + \mu_л - \mu)}{\mu_{sat}}. \tag{44}$$

Его решение

$$z = -\int\limits^{\mu} \frac{\mu_{sat} \cdot d\mu}{2\varepsilon(\mu_{sat} + \mu_{л} - \mu)\sqrt{|h_y e_z|^2 - 4c_0^2}}. \tag{45}$$

Здесь $|h_y|^2$, $|e_z|^2$ даны выражениями (41) и (43).

Одноосный кристалл с изотропной нелинейностью

Диэлектрические тензоры одноосного кристалла с изотропной нелинейной частью керровского типа представляется как

$$\epsilon_i = \varepsilon_i + \alpha|\vec{E}|^2, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_l \tag{46}$$

или

$$\epsilon_\perp = \varepsilon_0 + \alpha|\vec{E}|^2, \quad \epsilon_l = \varepsilon_l + \alpha|\vec{E}|^2. \tag{46$'$}$$

Введём функцию

$$U = (\varepsilon_z - \varepsilon_0)|E_z|^2 + \varepsilon_0|\vec{E}|^2 + \frac{\alpha}{2} \cdot |\vec{E}|^4, \tag{47}$$

удовлетворяющую условиям

$$D_x = \epsilon_x \cdot E_x = \frac{\partial U}{\partial E_x^*}, \quad D_y = \epsilon_y \cdot E_y = \frac{\partial U}{\partial E_y^*},$$

$$D_z = \epsilon_z \cdot E_z = \frac{\partial U}{\partial E_z^*}. \tag{48}$$

Первый интеграл уравнений Максвелла для кристалла с диэлектрической функцией (46)

$$\dot{E}_x \dot{E}_x^* + \dot{E}_y \dot{E}_y^* = -U + \beta^2(E_z E_z^* + E_y E_y^*) + cnst. \tag{49}$$

В дальнейшем используем замену (*).

ТМ– волна. Заметим, что при $\varepsilon_z = \varepsilon_0$ формула (47) переходит в формулу (4). Перепишем (47) в виде

$$U = (\varepsilon_z - \varepsilon_0)|e_z|^2 + U_\perp, \quad U_\perp = \varepsilon_0|\vec{e}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{e}|^4. \tag{50}$$

Тогда вместо (17) получаем, что

$$|e_z|^2 = \frac{\beta^2}{2\epsilon_l\beta^2 - \epsilon_l^2 - \beta^2(\varepsilon_l - \varepsilon_0)}(U_\perp - cnst). \tag{51}$$

Так как ϵ_l, $\epsilon_\perp$ различаются аддитивной постоянной, то можно считать, что (51) зависит только от одной величины ϵ_l или $\epsilon_\perp$. Поскольку

$$|e_x|^2 = \epsilon_l - \varepsilon_l - |e_z|^2, \tag{52}$$

то и она выражается через ϵ_l (или $\epsilon_\perp$). Из уравнений Максвелла получаем

$$h_y^2 = \frac{\epsilon_l^2 \cdot |e_z|^2}{\beta^2}. \tag{53}$$

Видно, что все ненулевые компоненты поля выражаются через одну и ту же величину. Зависимость $\epsilon_\perp$ от z определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d\epsilon_\perp}{dz} = \frac{\epsilon_l - \beta^2 - \beta^2 \cdot \epsilon_\perp/\epsilon_l}{(\frac{\epsilon_l}{2} + |e_z|^2)} \cdot |e_x h_y| \cdot \cos\Delta\phi_H. \tag{54}$$

Отсюда

$$z = \int \frac{(\frac{\epsilon_l}{2} + |e_z|^2)}{\left\{\epsilon_l - \beta^2\left(1 + \frac{\epsilon_\perp}{\epsilon_l}\right)\right\}} \cdot \frac{d\epsilon_\perp}{\sqrt{|e_x h_y|^2 - 4c_0^2}}. \tag{55}$$

Здесь подынтегральное выражение зависит только от $\epsilon_\perp$. Таким образом, задача расселния ТМ– волн решается квадратурой.

ТЕ– волна. Так как $e_z = e_x = 0$, имеем $U = U_\perp$. Из (46)$'$ следует

$$|e_y|^2 = \epsilon_\perp - \varepsilon_0. \tag{56}$$

Из (49) с учётом (56) находим, что

$$|h_x|^2 = -U_\perp + \beta^2(\epsilon_\perp - \varepsilon_0) + cnst. \tag{57}$$

Из уравнений Максвелла находим, что

$$|h_z|^2 = \beta^2 \cdot (\epsilon_\perp - \varepsilon_0). \tag{58}$$

Таким образом, ненулевые компоненты поля выражаются через одну величину $\epsilon_\perp$. Из уравнений Максвелла получаем

$$\frac{d}{dz}(h_x h_x^*) = 2(\beta^2 - \epsilon_\perp)|e_y h_x| \cdot \cos\Delta\phi, \tag{59}$$

а учитывая (57), получаем формулу

$$\frac{d\epsilon_\perp}{dz} = 2|h_x e_y|\cos\Delta\phi. \tag{60}$$

Отсюда имеем

$$z = \int \frac{d\epsilon_\perp}{2\sqrt{|h_x e_y|^2 - 4c_0^2}}. \tag{61}$$

Авторы выражают благодарность проф. И.В.Пузынину за поддержку настоящей работы и обсуждение полученных результатов, а также Б.Ганхуягу и В.В. Ужинскому за помощь в оформлении.

Литература

[1] Каплан А.Е. Письма в ЖЭТФ, 1976, **Т.24**, С.132-137

[2] Литвак А. Г., Миронов В. А. Изв. ВУЗ, 1968, Радиофизика, **Т.II**, с.1911-1912

[3] Langbein U., Lederer F., Ponath H. E. Opt.commun., 1985, **V.52**, P. 417 - 420

[4] Stegeman G. I., Ariyasu J., Seaton C. T., Shen T. P., Moloney J. V. Appl. Phys. Lett., 1985, **V.47**. P.1254-1256

[5] Mihalache D., Mazilu D. Solid St. Commun., 1986, **V.60**, P.397-399

[6] Mills D. L., Subbaswamy K. R. Progress in Optics, 1981, V.19, P.45

[7] Mihalache D., Mazilu D, Bertolotti "M., Sibilia C. J. Mod. Opt, 1988, **V.35**, N6. P.1017-1027

[8] Leung K. M., Lin R. L. Phys. Rev, 1991, **V44**. N10, P.5007

[9] Очирбат Г., Препринт ОИЯИ, 1991, Р17-91-358, Дубна

Рукопись поступила в издательский отдел
16 октября 1996 года.