ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р17-96-379

Л.А.Уварова, В.К.Федянин

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ И ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СИСТЕМАХ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Направлено в Оргкомитет II Боголюбовской конференции,
Дубна, 18—22 августа 1994 г.

1996

Уварова Л.А., Федянин В.К. P17-96-379

Электромагнитные и тепловые волны в конденсированных системах с нелинейными свойствами

Исследуется процесс переноса электромагнитных и температурных волн в конденсированной поглощающей среде, характеризуемой нелинейной комплексной диэлектрической проницаемостью и нелинейными теплофизическими параметрами.

Показано, что в таких системах возникают температурные кноидальные волны, температурные поля влияют на компоненты электрического поля; обсуждены и другие эффекты, обусловленные нелинейностью.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1996

Перевод авторов

Uvarova L.A., Fedyanin V.K. P17-96-379

Electromagnetic and Thermal Waves in Condensed Systems with Nonlinear Properties

Transport process of electromagnetic and temperature waves is studied in a condensed absorbing medium characterized by a nonlinear complex dielectric constant and nonlinear thermophysical parameters. It is shown that in systems of that sort there arise temperature knoidal waves and the temperature fields influence the electric-field components; other effects due to the nonlinearity are also discussed.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1996

В настоящей работе рассматривается распространение электромагнитных волн и перенос тепла в системах, оптические свойства которых зависят от поля и температуры, а теплофизические — от температуры. Процессы переноса в таких системах в квазистационарном режиме могут быть описаны с помощью следующих уравнений

$$\Delta \mathbf{E}_i + k^2 \hat{\varepsilon}_i(E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}, T_i)\mathbf{E}_i = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_i), \tag{1}$$

$$\Delta \mathbf{H}_i + k^2 \hat{\varepsilon}_i(E_{i1}, E_{i2}, E_{i3}, T_i)\mathbf{H}_i = \nabla k_{1i} \times \mathbf{E}_i, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot (k_{1i}\mathbf{E}_i) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_i = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot (\chi_i \nabla T_i) + q_i(T_i) = 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{H}_i$ — векторы электрической и магнитной напряженности соответственно; T_i — температура; $k = \omega / c$, ω — частота волны, c — скорость света; χ_i — коэффициент теплопроводности; i — номер среды в рассматриваемой системе (в дальнейшем полагается, что $i = 1,2$); $q_i(T_i)$ — источник тепла, зависящий от плотности электромагнитной энергии; $k_{1i} = i \dfrac{\omega}{c} \hat{\varepsilon}_i$. Через $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon'_i + i\varepsilon''_i$ обозначена диэлектрическая проницаемость, для которой в общем случае можно записать

$$\hat{\varepsilon} = f(\omega \,|\, \mathbf{E}, T). \tag{5}$$

Ниже рассматриваются как некоторые точные решения данной нелинейной системы, так и решения, полученные с использованием асимптотических методов, эффективность которых для описания нелинейных физических явлений анализируется в классической монографии Н.Н.Боголюбова и Ю.А.Митропольского [1].

В работах [2,3] рассматривались уравнения (1)—(3) с квадратичными зависимостями $\hat{\varepsilon}_i(\mathbf{E}_i)$ и с учетом равенства тангенциальных составляющих векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на границе раздела для систем: два куба с общим центром, два соосных цилиндра, две концентрические сферы, два соосных тора. Примером такой системы может служить система, природа нелинейности внутренней и внешней областей которой различна (например, оптически анизотропный цилиндр и плазма или жидкий кристалл). Было показано, что существуют решения системы (1)—(3), удовлетворяющие дополнительному условию $\hat{\varepsilon}_i = 0$. Приведем пример такого решения для конкретной системы.

Рассмотрим систему, состоящую из двух соосных цилиндров, и будем полагать, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r, z)$. В этом случае из проекции уравнения (1) на орт ε_ϕ найдем

$$E_{i\phi} = \sum_{\nu} F_i^{(\nu)}(\lambda^{(\nu)} r)\nu\lambda^{(\nu)} z),$$

где $F_i^{(\nu)}(\zeta) = C_{i1}^{(\nu)} J_1(\zeta) + C_{i2}^{(\nu)} Y_1(\zeta)$; $\nu(\eta) = e^{\pm\eta}$, $J_n(\zeta)$, $Y_n(\zeta)$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка соответственно; λ^{ν} — корни характеристического уравнения; $C_{ij}^{(\nu)}$ — постоянные, определяемые с помощью краевых условий. Две другие проекции уравнения (1) приводят к одному и тому же выражению

$$E_z = \frac{\partial}{\partial \zeta} \int E_r \partial r + K.$$

Обозначим $V_i = \int E_{ir} \partial r$. Тогда для определения функции V_i с учетом указанного дополнительного условия и (5) получим уравнение

$$f_i\left(\omega, T \,\middle|\, \frac{\partial V_i}{\partial z}, \frac{\partial V_i}{\partial r}, E_{i\phi}\right) = 0, \qquad (6)$$

где в данном случае T фиксировано. В частности, в случае квадратичной зависимости $f = \varepsilon_0 - |\alpha|\,\mathbf{E}^2 + i\frac{4\pi\delta}{\omega}$ (где δ — проводимость, α — параметр нелинейности) уравнение (6) представляет собой уравнение Гамильтона плоского движения точки с потенциальной функцией $W_i = \frac{1}{2} E_{i\phi}^2$:

$$H_i + W_i = \text{const}, \qquad (7)$$

где

$$H_i = \frac{1}{2}(p_i^2 + g_i^2),$$

$$p_i = \frac{\partial V'_i}{\partial r}, \; g_i \frac{\partial V'_i}{\partial z}, \; V'_i = V_i + K_{iz},$$

$$\text{const}_i = \frac{\varepsilon_{i0}}{2|\alpha_i|} + i\frac{2\pi\delta_i}{\omega|\alpha_i|}.$$

В общем случае, при рассмотрении ортогональных систем координат и условия $\hat{\varepsilon} = 0$ из (1) получаются решения $\mathbf{E} = \nabla\phi$, причем функция ϕ определяется из уравнения

$$f\left(\omega, T \,\middle|\, \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right) = 0, \qquad (8)$$

где h_j — метрические коэффициенты. В частности, при рассмотрении квадратичной зависимости $f(\mathbf{E})$ уравнение (8) имеет следующий вид:

$$(\nabla\phi)^2 = \frac{\varepsilon_0}{|\alpha|} + i\frac{4\pi\delta}{\omega|\alpha|}. \qquad (9)$$

Уравнение (9) при $\delta = 0$ по форме совпадает с уравнением эйконала. При рассмотрении зависимостей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ от двух координат, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x_k, x_l)$, $\mathbf{H} = (\mathbf{x_k}, x_l)$ имеет место решение

$$E_k = \frac{1}{h_k}\frac{\partial V}{\partial x_k}; \; E_l = \frac{1}{h_l}\frac{\partial V}{\partial x_l}, \; E_m = \frac{1}{h_m}\Psi, \; k \neq l \neq m,$$

где Ψ и V определяются из следующих уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{h_l}{h_k h_m}\frac{\partial\Psi}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_l}\frac{h_k}{h_l h_m}\frac{\partial\Psi}{\partial x_l} = 0, \qquad (10)$$

$$f\left(\omega, T \,\middle|\, \frac{1}{h_k}\frac{\partial V}{\partial x_k}, \frac{1}{h_l}\frac{\partial V}{\partial x_l}, \frac{\Psi}{h_m}\right) = 0. \qquad (11)$$

Соответственно, в случае квадратичной зависимости $f(\mathbf{E})$ уравнение (11) является уравнением Гамильтона плоского движения точки (7), в котором потенциальная функция

$$W_i = \frac{1}{2h_m^2}\Psi_i^2 \text{ ¿ } p_i = \frac{1}{h_k}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}, \; g_i = \frac{1}{h_l}\frac{\partial V_i}{\partial x_l}.$$

Во всех рассмотренных случаях из (2) получаются гармонические решения для $\mathbf{H}$.

Рассмотрим далее, как изменится решение при учете зависимости диэлектрической проницаемости от температуры. В этом случае функции ϕ или V определяются из системы уравнений, содержащей уравнение теплопроводности и одно из следующих:

$$f_i\left(\omega \,\middle|\, \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi_\iota}{\partial x_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi_\iota}{\partial x_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi_\iota}{\partial x_3}, T_i\right) = 0. \qquad (8')$$

$$f_i\left(\omega \,\middle|\, \frac{1}{h_k}\frac{\partial V_i}{\partial x_k}, \frac{1}{h_l}\frac{\partial V_i}{\partial x_l}, \frac{1}{h_m}\Psi_i, T_i\right) = 0. \qquad (11')$$

Поскольку плотность теплового потока зависит от квадрата модуля электрического вектора, $q_i = q_i(|\mathbf{E}_i|^2, T)$, то в уравнение теплопроводности войдет переменная, зависящая от ϕ или V:

$$|\mathbf{E}_i|^2 = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j^2} \frac{\partial \phi_{i\varphi}}{\partial x_j} \frac{\partial \phi_{i\varphi}^*}{\partial x_j}$$

или

$$|\mathbf{E}_i|^2 = \frac{1}{h_k^2} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \frac{\partial V_i^*}{\partial x_k} + \frac{1}{h_l^2} \frac{\partial V_i}{\partial x_l} \frac{\partial V_i^*}{\partial x_l} + \frac{1}{h_m^2} \Psi_i \Psi_i^*.$$

Через ϕ^*, V^*, Ψ^* здесь обозначены комплексно сопряженные величины. Решение значительно упрощается, если удается выразить $|\mathbf{E}_i|^2$ непосредственно из уравнений (8') или (11'). Так, для керровской зависимости диэлектрической проницаемости от поля в дефокусирующей среде

$$\hat{\varepsilon}_i(\mathbf{E}_i) = \varepsilon_{i0} - \alpha |\mathbf{E}_i|^2 + i \frac{4\pi\delta_i}{\omega}$$

(где $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, $\alpha' \geq 0$) непосредственно из условия $\hat{\varepsilon}_i(\mathbf{E}_i) = 0$ получим, что

$$|\mathbf{E}_i|^2 = \alpha'_i \varepsilon_{i0} \left(1 + \frac{16\pi^2\delta_i^2}{\omega^2 \varepsilon_{i0}^2} \right) |\alpha_i|^{-2}.$$

Таким образом, полагая оптические характеристики известными функциями температуры, можно в данном случае решать уравнение теплопроводности независимо от второго уравнения системы. Определив температуру как функцию координат, получим уравнение

$$|\nabla\phi|^2 = \nu^2(x_1, x_2, x_3), \tag{12}$$

где

$$\nu^2(x_1, x_2, x_3) = \alpha'(T)\varepsilon_0(T) \left(1 + \frac{16\pi^2\delta^2(T)}{\omega^2 \varepsilon_0^2(T)} \right) |\alpha_i|^{-2},$$

$$T = T(x_1 x_2 x_3).$$

Уравнение (12) в случае действительной функции ϕ совпадает с уравнением эйконала в неоднородной среде. При определении компонентов электрического вектора с помощью уравнения (11') получим, что последнее переходит в уравнение (7), в котором p_i и g_i определены так же, как и выше, а постоянная и функция W_i равны соответственно

$$\mathrm{const}_i = \frac{1}{2} \nu_i^2(T_0), \quad W_i = \frac{1}{2} \left(\nu_i^2(T_0) - \nu_i^2(T_i) + \frac{1}{h_m} \Psi_i^2 \right).$$

Через T_0 обозначена температура, которую имеет система в отсутствие распространения излучения. Из выражения для W_i следует, что в данном случае потенциальная функция определяется не только одной из компонент электрического вектора, но и характером зависимости оптических свойств системы от температуры. Из выражения для W_i также следует, что в отсутствие связи между граничными условиями для тепловой и электродинамической задач зависимость $\nu^2(T)$ приводит к изменению компонент E_k, E_l, тогда как компонента E_m не изменяется. Такого же типа решение может возникнуть при рассмотрении системы, содержащей дефокусирующую прозрачную среду с наложенным градиентом температуры. В этом случае поле температуры известно заранее и T_i служит управляющим параметром.

Как отмечалось выше, в данном случае уравнение (4) можно решать без предварительного определения компонент электрического вектора. Функциональная зависимость температуры от координат определяется зависимостями от температуры теплового источника $1_i(T_i)$ и коэффициента теплопроводности $\chi_i(T_i)$. В частности, как показано в работе [4] в случае $q_i(T_i) = q_{i0} + q_{i1}T_i + q_{i2}T_i^2$, $\chi_i = \chi_{i0}$, решение для температуры может представить собой кноидальную волну

$$T_i = T_{i1} - (T_{i1} - T_{i2}) sn^2 \left(\frac{x}{d_i}, \kappa_i \right),$$

где

$$\kappa_i^2 = \frac{T_{i1} - T_{i2}}{T_{i1} - T_{i3}},$$

$$d_i = \left(\frac{6\chi_{i0}}{q_{i2}(T_{i1} - T_{i3})} \right)^{1/2},$$

$sn\phi$ — функция Якоби, T_{ij} — корни кубического уравнения

$$T_i^3 + \frac{3}{2} \frac{q_{i1}}{q_{i2}} T_i^2 + \frac{3q_{i0}}{1_{i2}} T_i - \frac{3C_i^2 \chi_{i0}}{2q_{i2}} = 0,$$

C_i — постоянные интегрирования, определяемые с помощью краевых условий. В данном случае, как это следует из (12), квадрат модуля амплитуды электрического вектора также выражается через функцию $sn(x/d, \kappa_i)$. В частности, при выполнении условия $T_{i2} = T_{i3}$ величина $|\mathbf{E}_i|^2$ определяется согласно следующей формуле

$$|\mathbf{E}_i|^2 = \beta_{i0} + \beta_{i1} ch^{-2}\left(\frac{x}{d_i}\right) + \beta_{i2} ch^{-4}\left(\frac{x}{d_i}\right),$$

где β_{ij} — постоянные, выражающиеся через параметры q_{ij}, T_{i1}, T_{i2}.

К другим классам решений относятся асимптотические решения. Они могут быть получены из (1)—(3) путем введения медленной переменной kx_j/h, где h — мера нелинейности,

$$h = \max_{\mathbf{r}} \frac{|\alpha|\,|\mathbf{E}|^2}{\varepsilon_0} \ [5], \quad h << 1.$$

Рассмотрим цилиндр радиуса R_i, находящийся в континуальной среде ($R_2 \to \infty$), и выделим направление распространения волны вдоль r. Будем полагать, что δ мала, а $\varepsilon = \varepsilon_0 \pm \alpha |E_z|^2$, $\mathrm{Im}\alpha = 0$, $\alpha > 0$ (в частности, из рассмотрения аналогичной линейной задачи следует, что $E_r = E_\phi = 0$ в случае нормального падения на цилиндр поляризованной параллельно плоскости XZ электрической волны [6]). В работе [7] нами показано, что при сделанных допущениях асимптотическое решение для E_z ($E_r \sim E_\phi \sim 0$ в этом приближении) может быть найдено с помощью функции Ψ, которая определяется из следующего нелинейного уравнения

$$i\left(\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial\zeta} + \frac{1}{2\zeta}\tilde{\Psi}\right) + \frac{1}{2\zeta^2}\frac{\partial^2\tilde{\Psi}}{\partial\tilde{\phi}^2} \pm \frac{1}{2}|\tilde{\Psi}|^2\tilde{\Psi} = 0, \qquad (13)$$

где $\tilde{\Psi} = k^{(1)}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\varepsilon_0}}\,\Psi h^{-1}$, $\tilde{\phi} = \phi h^{-1}$, $\zeta = k^{(1)} r h^2$, $k^{(1)} = k\varepsilon_0$. Уравнение (13) интегрируется с помощью замены

$$\tilde{\Psi} = \Psi_0(\zeta)\zeta^{-1/2}\exp\left(\frac{i\mu^2}{2\zeta} + i\mu\tilde{\phi}\right),$$

где μ — постоянная. Определив Ψ, можно найти компоненту E_{1z}, выражение для которой, в частности при $k^{(1)}r >> 1$, имеет вид

$$E_{1z} = -4\sqrt{\frac{2}{nkr}}\,E_0(1 - e^{i\phi}) \times$$

$$\times \exp\left[i\left(k^{(1)}r + \frac{1}{8k^{(1)}r} + \frac{\pi}{4} - R_1(K + k^{(1)}) \pm \frac{4E_0^2\alpha k^{(1)}}{\varepsilon_0 k}\ln\frac{k^{(1)}r}{k^{(1)}R} - \frac{1}{8k^{(1)R}}\right)\right], \qquad (14)$$

где $r > 0$, E_0 — амплитуда падающей волны. При выводе (14) приближенно учитывалось краевое условие $E_{1z}(R_1) = E_{2z}(R_1$, где E_{2z} — решение линейной задачи в континуальной среде. Данное решение получено при фиксированных значениях и в предположении, что электрическое поле может быть рассчитано по их средним (по темперутуре) значениям. Вместе с тем, амплитуда решения (14) не зависит от этих величин. Определив E_{1z}, можно решить уравнение теплопроводности. Учтем, что выражение для теплового источника при $\mathrm{Im}d = 0$ имеет следующий вид

$$q = 2kI\frac{|\mathbf{E}|^2}{|\mathbf{E}_0|^2}\delta(T), \qquad (15)$$

где I — мощность электромагнитного источника, действующего в системе; $\delta(T)$ — величина, зависящая от оптических характеристик. Будем предполагать, что зависимость $\delta(T)$ линейна: $\delta(T) = b_0 + b_1 T$. Тогда решение для температуры внутри цилиндра $T_1(r)$, полученное из уравнения (4), с усредненным по углу ϕ источником тепла, найденным с помощью (14)—(15), будет иметь вид

$$T_1 = T_k + \frac{a_0}{a_1}\left(\frac{J_0(2\sqrt{a_1 r}}{J_0(2\sqrt{a_1 R_1})} - 1\right), \qquad (16)$$

где $a_0 = \dfrac{128 b_0 I}{\pi\chi_1}$, $a_1 = \dfrac{128 b_1 I}{\pi\chi_1}$, T_k — температуры континуальной среды, $T_2 = T_k = \mathrm{const}$. Решение (16) удовлетворяет и условию непрерывности теплового потока на границе раздела сред, если параметры R_1 и I таковы, что справедливо условие

$$J_1(2\sqrt{a_1 R_1}) = 0$$

Поскольку корни данного уравнения η_1^j, $j = 1,2,3,...$ (где $\eta = 2\sqrt{a_1 R_1}$), больше соответствующих корней уравнения $J_0(\eta) = 0$, то даже при $a_1 R_1 = \eta_1^{(1)}$ внутри цилиндра обязательно найдется точка r_0, для которой $J_0(\sqrt{a_1 r_0}) = 0$. Следовательно, температура внутри цилиндра будет отклоняться от T_k и в сторону увеличения, и в сторону уменьшения. Определив T_1, можно далее уточнить фазу E_{1z}.

Из проведенного выше анализа следует, что в системах в переменными оптическими и теплофизическими свойствами могут иметь место нехарактерные для линейных систем эффекты, такие как возникновение температурных кноидальных волн, неоднородное влияние температурного поля на компоненты электрического вектора и другие.

Литература

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. — Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974, с.503.
2. Уварова Л.А. — Препринт Р17-87-603, Дубна, ОИЯИ, 1987.
3. Уварова Л.А., Федянин В.К. — Препринт Р17-88-230, Дубна, ОИЯИ, 1988.
4. Уварова Л.А., Федянин В.К. — Математическое моделирование. 1990, т.2, №2, с.40—54.
5. Абловиц М., Сигур Х. — Солитоны и метод обратной задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1987, сс.480.
6. Борен К., Хафмен Д. — Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986, с.660.
7. Уварова Л.А., Федянин В.К. — ТМФ, 1996, т.106, №1, сс.84—91.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 октября 1996 года.