

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-136

P17-95-136

Б.К.Мурзахметов¹, А.В.Чижов

ФАЗОВЫЕ СВОЙСТВА
КВАДРАТИЧНО-АМПЛИТУДНЫХ
СЖАТЫХ СОСТОЯНИЙ

Направлено в «ЖЭТФ»

¹Постоянный адрес: 480082, Казахстан, г.Алма-Ата,
Институт ядерной физики НЯЦ РК

1995

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы особое внимание в квантовой оптике было уделено классу состояний электромагнитного поля, называемых сжатыми состояниями. Эти состояния проявляют уменьшенные флуктуации в одной из квадратур поля при соответствующем их увеличении в другой квадратуре (для обзора свойств сжатых состояний света см. специальные выпуски двух оптических журналов [1], посвященные этому вопросу).

Рассматривая корреляционные функции высших порядков для амплитуды поля, можно определить эффекты сжатия высших порядков. Согласно Хонгу и Манделю, состояние является сжатым порядка $2N$, если для этого состояния момент порядка $2N$ квадратуры поля меньше, чем соответствующий момент для когерентного состояния [2]. Такой тип сжатия был найден этими авторами в ряде оптических процессов. Иной подход к понятию сжатия высших порядков был исследован Браунштейном и Маглахланом [3]. Для определения обобщенных сжатых состояний они использовали аналоги высших порядков оператора сжатия. Изучение Q -представлений этих состояний выявило их весьма необычные статистические свойства.

Другое определение сжатия высших порядков в терминах действительной и мнимой частей квадрата и более высоких степеней амплитуды поля было предложено Хиллери [4]. Им было показано, что квадратично-амплитудное сжатие естественным образом возникает в процессе генерации второй гармоники [5]. В работе [6] получены общие решения для квадратично-амплитудных сжатых состояний, удовлетворяющих требованию минимальной неопределенности в соотношении Гейзенберга, и исследованы их статистические свойства.

В последние годы в квантовой оптике интенсивно исследовались вопросы определения оператора фазы и описания фазовых свойств различных неклассических состояний электромагнитного поля [7, 8]. Изучение квантовых свойств состояний поля с точки зрения фазовой картины дополняет статистические методы исследования этих состояний.

Целью данной работы является изучение фазовых свойств квадратично-амплитудных сжатых состояний с минимальной неопределенностью. Мы проведем для этих состояний сравнение фазового распределения, основанного на формализме эрмитова оператора фазы Пегга-Барнетта, с фазовыми распределениями, полученными методом интегрирования функций распределения квазивероятности по радиальной переменной.

2. СОСТОЯНИЯ С МИНИМАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ДЛЯ КВАДРАТИЧНО-АМПЛИТУДНОГО СЖАТИЯ

Квадратично-амплитудное сжатие описывается в терминах действительной и мнимой частей квадрата амплитуды поля. Эти величины соответствуют квадратурным операторам

$$\hat{Y}_1 = (\hat{a}^\dagger + \hat{a})/2, \quad (1)$$

$$\hat{Y}_2 = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a})/2, \quad (2)$$

удовлетворяющим соотношению неопределенности Гейзенберга [4]:

$$\Delta \hat{Y}_1 \Delta \hat{Y}_2 \geq \left\langle \hat{N} + \frac{1}{2} \right\rangle, \quad (3)$$

где $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ — число фотонов. Состояние называется сжатым по квадрату амплитуды в направлении Y_1 , если

$$(\Delta \hat{Y}_1)^2 < \left\langle \hat{N} + \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (4)$$

Состояния, которые минимизируют соотношение неопределенности (3), называются квадратично-амплитудными сжатыми состояниями с минимальной неопределенностью. Разложение этих состояний по базису фоковских состояний может быть представлено в виде:

$$|\lambda, \beta\rangle = \sum_n b_n |n\rangle, \quad (5)$$

ВНИМАНИЕ! НЕ СДАВАТЬ
ОПРЕДЕЛЕННЫМ
ФИЗИКОТЕХНИКА

где коэффициенты b_n определяются следующими рекуррентными соотношениями [6]:

$$b_{n+4} = b_{n+2} \frac{2\beta}{(\lambda+1)\sqrt{(n+4)(n+3)}} + b_n \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \sqrt{\frac{(n+2)(n+1)}{(n+4)(n+3)}},$$

$$b_2 = \sqrt{2} \frac{\beta}{\lambda+1} b_0, \quad b_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\beta}{\lambda+1} b_1, \quad 0 \leq \lambda < \infty, \quad 0 \leq |\beta| < \infty, \quad (6)$$

с условием нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 = 1. \quad (7)$$

Из соотношений (6) можно видеть, что коэффициенты b_n разбиваются на две последовательности коэффициентов с четными и нечетными индексами. Поэтому, в зависимости от выбора последовательности коэффициентов, мы можем определить два типа состояний — четные и нечетные квадратично-амплитудные сжатые состояния.

Определим теперь функции распределения квазивероятности для рассматриваемых состояний. Нас прежде всего будут интересовать Q -функция и функция Вигнера, которые получаются с помощью преобразования Фурье соответственно нормально и симметрично упорядоченных характеристических функций. Эти функции широко применяются в квантовой оптике при описании свойств неклассических состояний света [9]. Используя представление в фоковом базисе (5), Q -функция может быть записана в следующем виде:

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} |\langle \alpha | \lambda, \beta \rangle|^2 = \frac{e^{-|\alpha|^2}}{\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right|^2. \quad (8)$$

Функцию Вигнера можно определить в виде [9]

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} \text{Tr} \{ \hat{\rho} \hat{D}(2\alpha) \exp(i\pi \hat{a}^\dagger \hat{a}) \}, \quad (9)$$

где $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})$ — оператор смещения, $\hat{\rho}$ — матрица плотности рассматриваемого состояния поля. Через коэффициенты разложения b_n функция Вигнера представляется в виде:

$$W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(|2\alpha|^2) (b_n)^2 + 2 \sum_{n>m=0}^{\infty} \left(\frac{m!}{n!} \right)^{1/2} (-1)^m (2\alpha)^{n-m} L_m^{n-m}(|2\alpha|^2) b_n b_m \right\}. \quad (10)$$

Как Q -функция, так и функция Вигнера для квадратично-амплитудных сжатых состояний имеют существенные отличия в поведении в случаях, когда параметр β равен и не равен нулю. В случае $\beta = 0$ эти функции проявляют четырехкратную симметрию, тогда как в случае $\beta \neq 0$ симметрия этих функций становится двукратной [6]. Отметим, что по своему определению (8) Q -функция является неотрицательной на всей фазовой плоскости, в то время как функция Вигнера может принимать и отрицательные значения. Как будет показано в дальнейшем, это может приводить к проблемам в определении соответствующего фазового распределения квазивероятности.

В заключение этого раздела отметим, что третья из функций распределения квазивероятности \mathcal{P} -функция Глаубера-Сударшана, соответствующая антисимметрично упорядоченной характеристической функции, для неклассических состояний является сильно сингулярной [10]. Поэтому в данной работе, в которой речь идет о квадратично-амплитудных сжатых состояниях, являющихся неклассическими, \mathcal{P} -функцию нельзя использовать для описания фазовых свойств этих состояний в рамках подхода функций распределения квазивероятности.

3. ФАЗОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Проблема квантового описания фазы оптических полей в последние годы являлась предметом всестороннего изучения [7, 8]. Это связано с трудностью в построении линейного эрмитова оператора фазы. За последнее время понятие фазовых переменных в квантовых системах значительно прояснилось. Пеггом и Барнеттом было показано [11]–[13] как можно определить такой оператор для квантованных электромагнитных полей в гильбертовом пространстве сколь угодно большой, но

конечной размерности. Этот новый формализм дает возможность описывать квантовые свойства оптической фазы на основе эрмитова оператора фазы и его собственных состояний.

Принципиально иной подход к описанию фазы квантованного поля, широко применявшийся в квантовой оптике [14]–[17], основан на использовании функций распределения квазивероятности, таких как P -функция Глаубера–Сударшана, функция Вигнера и Q -функция. Эти функции зависят от комплексного собственного значения α оператора уничтожения фотона, которое может быть представлено в терминах радиальной переменной $|\alpha|$ и фазы θ . Если проинтегрировать данные функции по радиальной переменной, то можно получить распределения, которые являются периодичными по фазовому углу (с периодом 2π), и для большинства состояний они удовлетворяют всем требованиям, налагаемым на действительные фазовые распределения [15, 16]. Такой подход носит не только формальный математический характер, но, как показали Фрейбергер, Фогель и Шлейх, имеет также и физическое обоснование. Рассматривая δ -портовую схему гомодинного детектирования, использованную в эксперименте группы Манделя [18], они сделали вывод, что моменты фазовых операторов, измеряемых в этом эксперименте, непосредственным образом связаны с проинтегрированными по радиальной переменной функцией Вигнера и Q -функцией [19, 20].

Зная разложение квадратично-амплитудных сжатых состояний по базису фокских состояний (5), для описания фазовых свойств этих состояний мы можем применить фазовое распределение Пегга–Барнетта [11]–[13]:

$$P^{(PB)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)\theta] \right\}, \quad (11)$$

где b_n определяются соотношениями (6), а областью определения функции фазового распределения (фазовым окном) является отрезок от $-\pi$ до π . В правой части соотношения (11) слагаемое $1/2\pi$ представляет собой равномерное распределение фазы, тогда как остальные слагаемые, объединенные в бесконечную сумму, отвечают за неравномерность в фазовом распределении $P^{(PB)}(\theta)$.

Как было показано нами ранее [21]–[23], фазовые распределения, связанные с Q -функцией и функцией Вигнера, могут быть выражены одной аналитической формулой следующего вида:

$$P^{(S)}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{n>k} b_n b_k \cos[(n-k)\theta] G^{(S)}(n, k) \right\}, \quad (12)$$

где коэффициенты $G^{(S)}(n, k)$, соответствующие рассматриваемым распределениям, имеют вид:

(а) для распределения $P^{(Q)}(\theta) = \int_0^\infty Q(\alpha) |\alpha| d|\alpha|$, полученного интегрированием Q -функции по радиальной переменной [24]:

$$G^{(Q)}(n, k) = \frac{\Gamma[(n+k)/2 + 1]}{\sqrt{n!k!}}, \quad (13)$$

(б) для распределения $P^{(W)}(\theta) = \int_0^\infty W(\alpha) |\alpha| d|\alpha|$, полученного интегрированием функции Вигнера по радиальной переменной [21]:

$$G^{(W)}(n, k) = \sum_{m=0}^p (-1)^{p-m} 2^{(n-k+2m)/2} \times \\ \times \sqrt{\binom{p}{m} \binom{q}{p-m}} G^{(Q)}(m, |n-k|+m), \quad (14)$$

где $p = \min(n, k)$, $q = \max(n, k)$. Заметим, что соотношение (12) можно рассматривать как общее для всех трех распределений, если считать коэффициенты $G^{(PB)}(n, k) \equiv 1$. Из формул (13) и (14) следуют важные свойства коэффициентов $G^{(Q)}(n, k)$ и $G^{(W)}(n, k)$ с индексами $n > k$: для всех таких индексов $G^{(Q)}(n, k) < 1$, в то время как коэффициенты $G^{(W)}(n, k)$ принимают значения как меньше, так и больше единицы, причем $G^{(W)}(n, k) < 1$ для нечетных индексов n и k , и $G^{(W)}(n, k) > 1$ для четных индексов.

Графики всех трех фазовых распределений, полученные с помощью соотношений (11)–(14), для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний при различных значениях λ и β представлены на рис. 1, а для нечетных состояний —

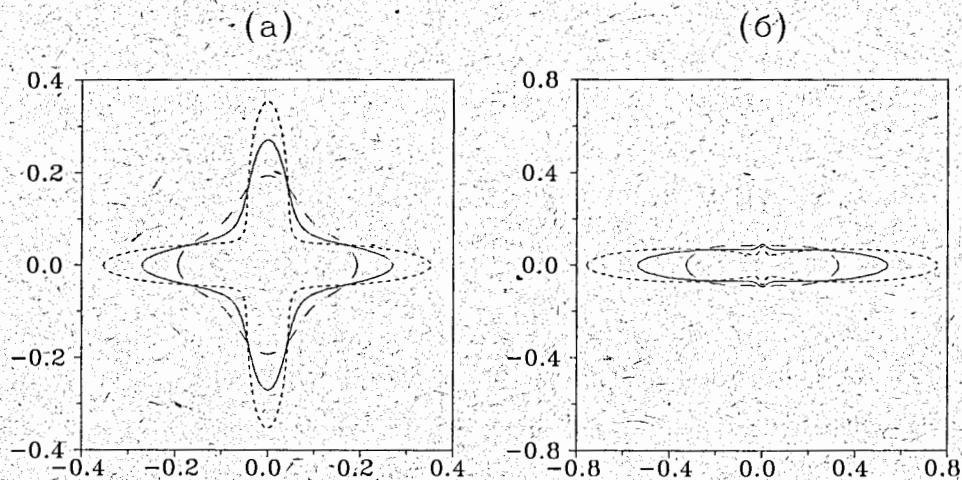


Рис. 1. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$ (сплошная линия), $P^{(W)}(\theta)$ (мелкопунктирная линия) и $P^{(Q)}(\theta)$ (крупнопунктирная линия) в полярных координатах (по оси $X — P^{(S)}(\theta) \cos \theta$, по оси $Y — P^{(S)}(\theta) \sin \theta$) для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda = 3$ и (а) $\beta = 0$, (б) $\beta = 1$

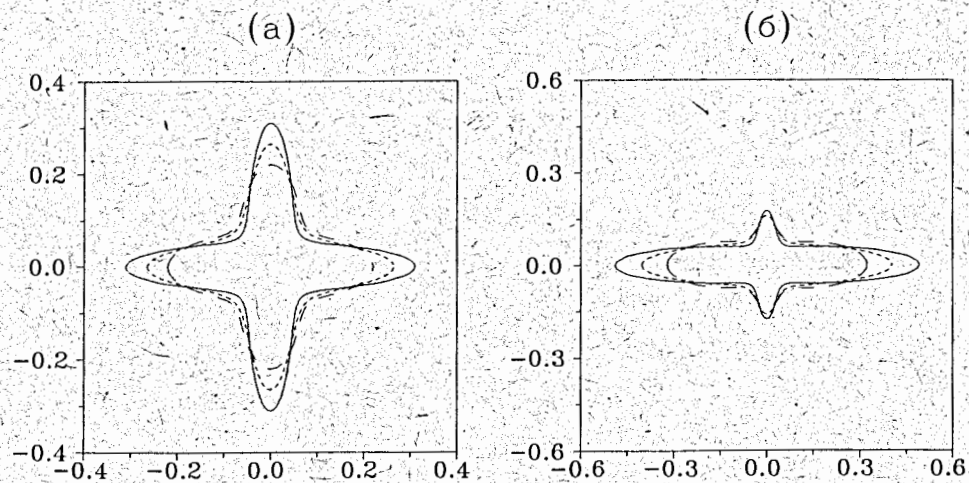


Рис. 2. Фазовые распределения $P^{(PB)}(\theta)$ (сплошная линия), $P^{(W)}(\theta)$ (мелкопунктирная линия) и $P^{(Q)}(\theta)$ (крупнопунктирная линия) в полярных координатах (по оси $X — P^{(S)}(\theta) \cos \theta$, по оси $Y — P^{(S)}(\theta) \sin \theta$) для нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda = 3$ и (а) $\beta = 0$, (б) $\beta = 1$

на рис. 2. Мы видим, что в случае, когда параметр β равен нулю, фазовые распределения имеют четырехлепестковую форму. Для значений β , не равных нулю, все три распределения имеют двухлепестковую структуру. Такое поведение согласуется с симметрией функций распределения квазивероятности. Можно также заметить, что фазовое распределение Вигнера $P^{(W)}(\theta)$ является самым узким из трех распределений для четных состояний (рис. 1), тогда как для нечетных состояний самым узким является распределение Пегга-Барнетта $P^{(PB)}(\theta)$ (рис. 2). Далее отметим, что фазовое распределение $P^{(Q)}(\theta)$ является самым широким из рассматриваемых распределений для обоих типов состояний. Такой вид фазовых распределений можно объяснить с помощью соотношений (11)–(14). Легко видеть, что коэффициенты $G^{(S)}(n, k)$ играют роль весовых множителей в суммировании бесконечного ряда в (12). Это может рассматриваться как некая процедура “усреднения” фазового распределения Пегга-Барнетта (11). В случае четных квадратично-амплитудных сжатых состояний суммирование в (12) ведется только по четным индексам n и k . Так как коэффициенты $G^{(W)}(n, k) > 1$ для четных индексов, то процедура “усреднения” приводит к более резкому фазовому распределению Вигнера, чем распределение Пегга-Барнетта. В случае же нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний, когда суммирование в (12) ведется по нечетным индексам, коэффициенты $G^{(W)}(n, k) < 1$, и процедура “усреднения” приводит к уширению фазового распределения Вигнера. Что касается фазового распределения $P^{(Q)}(\theta)$, то, в силу того, что коэффициенты $G^{(Q)}(n, k) < 1$ для всех значений индексов n и k , процедура “усреднения” приводит к уширению этого распределения по сравнению с распределением Пегга-Барнетта как для четных, так и для нечетных состояний. Это согласуется с фактом, что Q -функция связана с одновременным измерением двух некомутирующих наблюдаемых — процессом, неизбежно сопровождающимся дополнительным шумом [15].

Как мы уже отмечали выше, тот факт, что функция Вигнера не является положительно определенной, может привести к появлению в соответствующем фазовом распределении отрицательных значений. Такое свойство в поведении фазового

распределения Вигнера было отмечено в работе [25] для суперпозиции когерентных и фоковских состояний. Другим примером являются рассматриваемые в данной работе четные квадратично-амплитудные сжатые состояния. На рис. 3 представлено фазовое распределение Вигнера для этих состояний при различных значениях параметра β . Мы видим, что при некоторых значениях фазовой переменной это распределение становится отрицательным. Области изменения параметров λ и β для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний, где фазовое распределение Вигнера является положительно определенным и где это распределение может принимать отрицательные значения, показаны на рис. 4. В тех случаях, когда существует область изменения параметров, где фазовое распределение становится отрицательным, мы уже не можем говорить о таком распределении как об истинном фазовом распределении, которое по определению должно быть неотрицательным для всех значений фазовой переменной. Следовательно, фазовое распределение Вигнера для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний может быть определено только в ограниченной области изменения параметров состояния. Отметим, что для нечетных квадратично-амплитудных сжатых состояний фазовое распределение Вигнера является всегда положительно определенным. Этот факт может быть объяснен опять с точки зрения процедуры "усреднения". Для нечетных состояний коэффициенты $G^{(W)}(n, k) < 1$, поэтому умножение недиагональных членов суммы в соотношении (12) на эти коэффициенты приводит к распределению, уширенному по сравнению с распределением Пегга-Барнетта, которое по определению является всюду неотрицательным.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы рассмотрели фазовые свойства квадратично-амплитудных сжатых состояний, удовлетворяющих требованию минимальной неопределенности в соотношении Гейзенберга. Было сделано сравнение фазового распределения Пегга-Барнетта с фазовыми распределениями $P^{(W)}(\theta)$ и $P^{(Q)}(\theta)$, получаемыми путем интегрирования соответственно функции Вигнера и Q -функции по ради-

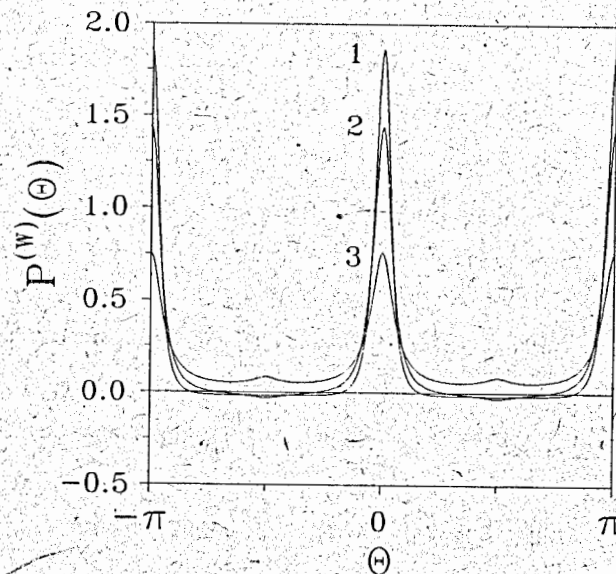


Рис. 3. Фазовые распределения $P^{(W)}(\theta)$ для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний с $\lambda = 3$ и (1) $\beta = 1$, (2) $\beta = 3$, (3) $\beta = 5$

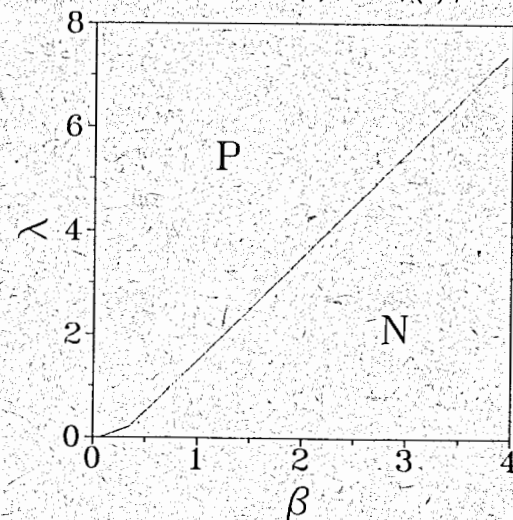


Рис. 4. Области изменения параметров λ и β для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний, где фазовое распределение Вигнера $P^{(W)}(\theta)$ является положительно определенным (P) и где оно может принимать отрицательные значения (N)

альной переменной. Мы показали, что все три фазовые распределения имеют двухлепестковую форму при не равном нулю параметре β , а в случае, когда β равно нулю, указанные фазовые распределения обладают четырехлепестковой структурой. Отмеченное обстоятельство согласуется с симметрией функции Вигнера и Q -функции для этих состояний. Фазовое распределение Вигнера для четных квадратично-амплитудных сжатых состояний является положительно определенным только в ограниченной области изменения параметров состояний. Вне этой области оно может принимать отрицательные значения. Однако в случае пачетных квадратично-амплитудных сжатых состояний фазовое распределение Вигнера является неотрицательным при любых значениях параметров состояния.

В заключение авторы выражают благодарность проф. М. Хиллери за обсуждение результатов и полезные замечания.

Данная работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант N° RFD000.

Литература

1. Special issues: J. Opt. Soc. Am. **B4**, No. 10 (1987); J. Mod. Opt. **34**, No. 6/7 (1987).
2. C. K. Hong, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **54**, 323 (1985); Phys. Rev. A **32**, 974 (1985).
3. S. L. Braunstein, R. I. McLachlan, Phys. Rev. A **35**, 1659 (1987).
4. M. Hillery, Opt. Commun. **62**, 135 (1987).
5. M. Hillery, Phys. Rev. A **36**, 3796 (1987).
6. D. Yu, M. Hillery, Quantum Optics **6**, 37 (1994).
7. Physica Scripta **T48** (1993).
8. P. Carruthers, M. M. Nieto, Rev. Mod. Phys. **40**, 411 (1968); S. M. Barnett, D. T. Pegg, J. Phys. A **19**, 3849 (1986).
9. K. E. Cahill, R. J. Glauber, Phys. Rev. **177**, 1857; 1883 (1969).
10. Дж. Клаудер, Э. Сударшан, *Основы квантовой оптики*, Мир, Москва (1970), с. 212.
11. D. T. Pegg, S. M. Barnett, Europhys. Lett. **6**, 483 (1988).
12. S. M. Barnett, D. T. Pegg, J. Mod. Opt. **36**, 7 (1989).
13. D. T. Pegg, S. M. Barnett, Phys. Rev. A **39**, 1665 (1989).
14. A. Bandilla, H. Paul, Ann. Phys. (Leipzig) **23**, 323 (1969).
15. S. L. Braunstein, C. M. Caves, Phys. Rev. A **42**, 4115 (1990).
16. W. Schleich, R. J. Horowicz, S. Varro, Phys. Rev. A **40**, 7405 (1989).

17. W. Schleich, A. Bandilla, H. Paul, Phys. Rev. A **45**, 6652 (1992).
18. J. W. Noh, A. Fougères, L. Mandel, Phys. Rev. Lett. **67**, 1426 (1991); Phys. Rev. A **45**, 424 (1992); Phys. Rev. A **46**, 2840 (1992).
19. M. Freiberger, W. P. Schleich, Phys. Rev. A **47**, R30 (1993).
20. M. Freiberger, K. Vogel, W. P. Schleich, Phys. Lett. A **176**, 41 (1993).
21. R. Tanaś, B. K. Murzakhmetov, Ts. Gantsog, A. V. Chizhov, Quantum Opt. **4**, 1 (1992).
22. A. V. Chizhov, Ts. Gantsog, B. K. Murzakhmetov, Quantum Opt. **5**, 85 (1993).
23. A. V. Chizhov, B. K. Murzakhmetov, Phys. Lett. A **176**, 33 (1993).
24. R. Tanaś, Ts. Gantsog, Phys. Rev. A **45**, 5031 (1992).
25. B. M. Garraway, P. L. Knight, Phys. Rev. A **46**, R5346 (1992); Physica Scripta **T48**, 66 (1993).

Мурзахметов Б.К., Чижов А.В.

P17-95-136

Фазовые свойства квадратично-амплитудных сжатых состояний

Исследованы фазовые свойства квадратично-амплитудных сжатых состояний электромагнитного поля, удовлетворяющих требованию минимальной неопределенности в соотношении Гейзенберга. Проведено сравнение фазовых распределений, полученных с использованием двух подходов к описанию фазы квантованного поля.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Перевод авторов

Murzakhmetov B.K., Chizhov A.V.

P17-95-136

Phase Properties of the Amplitude-Squared Squeezed States

Phase properties of the minimum uncertainty states for amplitude-squared squeezing have been investigated. A comparison of the phase distributions obtained with the help of two approaches for the description of the phase of the electromagnetic field was done.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1995