сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17-94-319

Л.Ц.Аджемян[1], М.Гнатич*, М.Стеглик*

РЕНОРМГРУППОВОЙ РАСЧЕТ СПЕКТРОВ ЗАТУХАЮЩЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЭНЕРГОСОДЕРЖАЩЕЙ И ИНЕРЦИОННОЙ ОБЛАСТЯХ

[1]Санкт-Петербургский государственный университет
*Постоянное место работы: Институт экспериментальной физики САН, Кошице, Словакия

1994

1 Введение

Известно, что феноменологическая теория Колмогорова, которая предсказывает универсальные спектры развитой турбулентности в инерционной и диссипативной областях, хорошо согласуется с экспериментальными данными [1, 2]. Это стимулировало многочисленные попытки описать упоминаемые области спектров исходя из первых принципов. В частности, методом ренормализационной группы (РГ) в инерционном интервале был получен колмогоровский спектр энергии [3] и вычислена константа Колмогорова [4, 6]. Энергосодержащая область рассматривалась ранее как неуниверсальная, сильно зависящая от условий эксперимента [1]. Более оптимистическая точка зрения состоит в том, что и эта часть спектра является универсальной в рамках определенных классов течений. Георгом [7] были проанализированы с этой точки зрения экспериментальные спектры на различных расстояниях x от решетки и подтверждена возможность их универсального описания.

Возникает естественное желание обобщить РГ-технику, успешно использованную в инерционном интервале, и на энергосодержащую область. С этой целью необходимо конкретизировать вид спектра шума, используемого в стохастической модели однородной изотропной турбулентности, чтобы сделать его адекватным описанию турбулентности за решеткой. В настоящей работе шум выбирается таким способом, чтобы реалистично описать спектральный баланс энергии.

Содержание работы следующее. После введения формулируется модель распадной турбулентности и выводятся основные уравнения. Исследуются автомодельные решения этих уравнений, в частности приведены степенные законы затухания по времени для корреляционной длины, скорости диссипации и полной энергии, хорошо согласующиеся с экспериментальными данными. В следующей части решается интегродифференциальное нелинейное уравнение для спектра турбулентной энергии и спектра функции переноса с заданной асимптотикой при больших и малых волновых числах. Полученные решения сравниваются с экспериментальными данными в энергосодержащей и инерционной областях. В заключении сформулированы основные результаты работы, а в приложении вычисляется константа Колмогорова для инерционного интервала в общем случае d-мерного пространства.

2 Основные уравнения

Закон спектрального баланса энергии для распадной однородной турбулентности несжимаемой жидкости описывается в $\vec{k}$-пространстве уравнением

$$\partial_t E(k) = -2\nu k^2 E(k) + T(k)\,, \tag{1}$$

где

$$E(k) = \frac{1}{2}\frac{S_d}{(2\pi)^d}k^{d-1}\int d\mathbf{r}e^{-i\mathbf{kr}}G_{ii}(\mathbf{r}) \tag{2}$$

- спектральная плотность энергии;

$$G_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle v_i(\mathbf{r}) v_j(\mathbf{r}') \rangle_t \tag{3}$$

- корреляционная функция поля скорости. Скобки $\langle ... \rangle_t$ обозначают усреднение по некоторому распределению поля скорости для данного времени t; d - размерность пространства,

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \tag{4}$$

- площадь единичной сферы в d-мерном пространстве, $\Gamma(x)$ - гамма-функция, ν - кинематический коэффициент вязкости. Функция переноса $T(k)$ в уравнении (1) дается выражением

$$T(k) = -\frac{S_d}{(2\pi)^d} k^{d-1} \int d(\mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \langle v_i(\mathbf{r}) \partial_j v_i(\mathbf{r}') v_j(\mathbf{r}') \rangle_t \tag{5}$$

и удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty dk\ T(k) = 0\,, \tag{6}$$

которое является следствием сохранения полной энергии в невязкой жидкости

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty dk\ E(k)\,. \tag{7}$$

Таким образом, баланс полной энергии описывается уравнением

$$\partial_t \mathcal{E} = -\overline{\varepsilon}\,, \tag{8}$$

где

$$\overline{\varepsilon} = 2\nu \int_0^\infty dk\ k^2 E(k) \tag{9}$$

обозначает скорость диссипации энергии на единицу массы.

Для локально-однородной турбулентности [1] аналогичное уравнение можно получить заменой $\partial_t \to V\partial_x$ (V - средняя скорость жидкости в x - направлении) в уравнении (1). В этом случае уравнение спектрального баланса энергии для затухающей турбулентности за решеткой имеет вид

$$V\partial_x E(k) = -2\nu k^2 E(k) + T(k)\,. \tag{10}$$

Дальнейший анализ одинаково применим как для уравнения (1), так и для уравнения (10).

Уравнение (1) является незамкнутым. В рамках феноменологического замыкания используются некоторые приближенные выражения для $T(k)$ в терминах $E(k)$ (см., напр., [1]). Более последовательный путь состоит в построении статистического

ансамбля случайного поля скорости. В настоящей работе используется ансамбль, полученный в рамках стохастической модели развитой однородной изотропной турбулентности. В таком подходе обе функции $E(k)$ и $T(k)$ выражаются через спектр шума $D(k)$ (см.ниже), явный вид которого должен быть определен из уравнения (1). При этом предполагается, что когда параметры, входящие в $D(k)$, медленно меняются со временем (или в направлении оси x для турбулентности за решеткой), то применимо приближение локально-однородной турбулентности. Зависимость этих параметров от времени тоже может быть найдена из уравнения (1).

Стохастическая модель развитой однородной изотропной турбулентности несжимаемой жидкости описывается уравнением Навье-Стокса

$$\partial_t \vec{v} = \nu\Delta\vec{v} - (\vec{v}\nabla)\vec{v} - \nabla P + \vec{f}\,, \tag{11}$$

где P-давление. Гауссова статистика внешней случайной силы определяется коррелятором шума

$$\langle f_i f_j \rangle = D(k) P_{ij}\,, \tag{12}$$

где $P_{ij} = \delta_{ij} - k_i k_j k^{-2}$-поперечный проектор. Спектральную функцию шума можно записать в виде

$$D(k) = D_0 F(kl) k^{-y}\,. \tag{13}$$

Здесь предполагается, что амплитуда D_0, а также корреляционная длина l слабо зависят от времени t, и функция $F(kl)$ нормирована условием $F(\infty) = 1$. Для $kl >> 1$ это соответствует степенной модели, использованной в [8, 4].

Для $E(k)$ и $T(k)$ будут использованы выражения, даваемые РГ-методом и техникой ϵ-разложения:

$$E(k) = \frac{(d-1)}{4} \frac{S_d}{(2\pi)^d}\, g_*^{1/3} D_0^{2/3} F(kl) k^{1-4\epsilon/3}\,, \tag{14}$$

$$g_* = \frac{4\epsilon(d+2)(4\pi)^{d/2}\Gamma(d/2)}{3(d-1)}\,, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} T(k) \;=\; & \frac{1}{8} D_0 g_* \frac{S_d k^{d-1}}{(2\pi)^{2d}} \int d\mathbf{q}\, \frac{1-(\mathbf{kq})^2/k^2q^2}{p^2(k^{2-2\epsilon/3}+q^{2-2\epsilon/3}+p^{2-2\epsilon/3})} \{F(lq)F(lp) \\ \times & \left[k^4(d-1) - 2dk^2(\mathbf{qk}) + 2(d-2)k^2q^2 + 4(\mathbf{qk})^2\right](pq)^{2-d-4\epsilon/3} \\ - & F(lq)F(lk)\left[(d-1)k^2p^2 - 2q^2(\mathbf{pk})\right] q^{2-d-4\epsilon/3} k^{2-d-4\epsilon/3} \\ - & F(lp)F(lk)\left[(d-1)k^2q^2 - 2p^2(\mathbf{qk})\right] p^{2-d-4\epsilon/3} k^{2-d-4\epsilon/3}\}\,, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\vec{p} = \vec{k} - \vec{q}$ и по определению положено $y = d - 4 + 2\epsilon$.

Выражение для $E(k)$ при $F = 1$ было получено в ряде работ (см. обзор [9]). В приводимом выше виде его можно найти в работе [6]. Выражение (16) для функции переноса $T(k)$ получается аналогичным, предложенным в последней работе, способом, а именно интегрированием РГ-представления тройного коррелятора, вычисленного в первом порядке ϵ-разложения. Отметим, что, как и для $E(k)$, его общая критическая размерность оказывается при этом вычисленной точно так, как соответствующий ряд по ϵ обрывается на первом члене [9]. По форме (16) совпадает с EDQNM приближением [10, 12], амплитудный множитель в котором выражен через D_0 точно так же, как в [5], отличающемся от (16) лишь отсутствием множителей F, которые существенны в энергосодержащей области. Соотношения (14)-(16) при $F = 1$ и моделировании однородной турбулентности внешней накачкой позволяют получить выражение для константы Колмогорова в d-мерном пространстве. Краткий вывод этого выражения приведен в приложении.

Для ближайших целей явный вид (16) несуществен. Важно то, что функция переноса имеет скейлинговую форму

$$T(k) = D_0 \frac{S_d}{(2\pi)^d} \frac{g_*}{2} k^{3-2\epsilon} \psi(kl)\,, \tag{17}$$

которую нетрудно получить из (16) переходом к безразмерной переменной интегрирования q/k. Подставляя (14) и (17) в (1) и пренебрегая вязким членом в инерционном и энергосодержащем интервалах, для $d = 3$ получим

$$[D_0(t) g_*^2]^{-1/3} [l(t)/\chi]^{2-2\epsilon/3} [\frac{2}{3} F(\chi) \partial_t \ln D_0(t) + \partial_\chi F(\chi) \partial_t \ln l(t)] = \psi(\chi)\,, \tag{18}$$

где $\chi = kl$.

Соотношение (18) позволяет найти одновременно законы затухания во времени величин $D_o(t)\,, l^{-1}(t)$ и вид спектральной функции $F(\chi)$.

Первая задача может быть решена без конкретизации функции Ψ и знания точного вида функции $F(\chi)$ с использованием только их асимптотических свойств.

Рассмотрим сначала область $\chi >> 1$. В этой области $F(\infty) = 1$, переменные в (18) разделяются, и мы получаем:

$$\frac{2}{3} g_*^{-2/3} D_0^{-1/3}(t) l^{2-2\epsilon/3}(t) \partial_t \ln D_0(t) = \chi^{2-2\epsilon/3} \psi(\chi)/F(\chi) = C_1\,, \tag{19}$$

где C_1-переменная интегрирования. Для $C_1 \neq 0$ и $\epsilon < 3$ из (19) следует, что $\Psi(\infty) = 0$. Это эквивалентно занулению функции переноса в инерционном интервале. Это условие выполняется при колмогоровских значениях индексов, чему соответствует значение $\epsilon = 2$ [10, 2]. Дальше мы будем использовать данное значение. Подставляя (19) в (18), имеем:

$$C_1 \chi^{-2/3} \left[F(\chi) + \frac{3}{2} \partial_\chi F(\chi) \frac{\partial_t \ln l(t)}{\partial_t \ln D_0(t)} \right] = \psi(\chi)\,. \tag{20}$$

Переменные здесь снова разделяются, что дает:

$$\frac{2}{3} C_2 \partial_t \ln D_0(t) = \partial_t \ln l(t) \tag{21}$$

с новой константой C_2. Подставляя (21) в (20), получаем

$$C_1 \chi^{-2/3} [F(\chi) + C_2 \chi \partial_\chi F(\chi)] = \psi(\chi)\,. \tag{22}$$

Значение константы C_2 связано с асимптотическим поведением спектров при $kl \ll 1$. Следуя [2], мы примем, что в этой области справедливо:

$$\lim_{k\to 0} E(k)/k^2 = const \neq 0\,, \qquad E(k) \sim k^2 \quad \text{для} \quad k \ll 1\,, \tag{23}$$

$$\lim_{k\to 0} T(k)/k^2 = 0\,, \tag{24}$$

что эквивалентно следующему поведению $F(k)$ и Ψ:

$$F(\chi) \sim \chi^{11/3} \quad \text{для} \quad k \ll 1\,, \tag{25}$$

$$\lim_{k\to 0} \psi(\chi)/\chi^3 = 0\,. \tag{26}$$

Из (22) нетрудно убедиться, что этому соответствует значение $C_2 = -3/11$, которое всюду в дальнейшем используется. Решая систему уравнений (19), (21), получаем искомые законы затухания:

$$D_0 \sim (t - t_0)^{-11/5}\,, \tag{27}$$

$$l \sim (t - t_0)^{2/5}\,. \tag{28}$$

Для полной энергии и скорости диссипации тогда получаем:

$$\mathcal{E} \equiv \int_0^\infty dk\, E(k) \sim (D_0 l)^{2/3} \sim (t - t_0)^{-6/5}\,, \tag{29}$$

$$\overline{\varepsilon} \sim \partial_t \mathcal{E} \sim (t - t_0)^{-11/5}\,, \tag{30}$$

откуда видно, что $\overline{\varepsilon}(t) \sim D_0(t)$. Мы пришли к известным законам затухания, хорошо согласующимся с экспериментальными данными [2].

Экспоненты в (28)-(30) таковы, что позволяют отождествить длину l с известной длиной Фон Кармана:

$$l \equiv \frac{u^3}{\overline{\varepsilon}} = \left(\frac{2\mathcal{E}}{3}\right)^{3/2} \frac{1}{\overline{\varepsilon}} \tag{31}$$

и увязать постоянную интегрирования C_1 с константой Колмогорова. Здесь среднеквадратичная скорость u определена соотношением $\mathcal{E} = 3u^2/2$. Полагая в (14) $d = 3$ и $\epsilon = 2$, перепишем ее в виде:

$$E(k) = C_k\, \overline{\varepsilon}^{2/3} k^{-5/3} F(kl)\,, \tag{32}$$

где

$$C_k\, \overline{\varepsilon}^{2/3} = \frac{1}{(2\pi)^2} g_*^{1/3} D_0^{2/3}\,. \tag{33}$$

Заметим, что ввиду выше отмеченного свойства $\bar{\varepsilon}(t) \sim D_0(t)$ следует, что C_k не зависит от времени. Интегрируя (32), имеем:

$$\mathcal{E} = C_k\,\bar{\varepsilon}^{2/3} l^{2/3} I\ , \tag{34}$$

$$I \equiv \int_0^\infty d\chi \chi^{-5/3} F(\chi). \tag{35}$$

Учитывая определение (31), получаем

$$C_k = \frac{3}{2I}\,. \tag{36}$$

Используя (19), (21), (27), (28) и (30), после несложных преобразований для константы C_1 имеем

$$C_1 = -\frac{11}{27\pi} g_*^{-1/2} C_k^{-1/2} = -\frac{11}{54\pi^2}\left(\frac{I}{10}\right)^{1/2}. \tag{37}$$

Переходим к нашей главной задаче - вычислению спектров $E(k)$ и $T(k)$. Подстановка (37) в (22) дает основное уравнение для вычисления искомых спектров

$$\frac{22}{27}\left(\frac{I}{10}\right)^{1/2} \chi^{-2/3}\left[\frac{3}{11}\chi\partial_\chi - 1\right] F(\chi) = I_1(\chi)\ . \tag{38}$$

Это интегродифференциальное уравнение, в котором согласно (35) I - функционал от $F(\chi)$, а нелинейный интегральный оператор определен равенством

$$\begin{aligned} I_1(\chi) &= (2\pi)^2\psi(\chi) \\ &= \{\int\int\}\frac{(1-t^2)q^{-5/3}p^{-17/3}}{1+q^{2/3}+p^{2/3}}\{(1-3qt+q^2+2q^2t^2)F(\chi q)F(\chi p) \\ &- (1-2qt+q^3t)p^{11/3}F(\chi q)F(\chi) + [1-2qt-p^2(1-qt)]q^{11/3}F(\chi p)F(\chi)\}\,, \end{aligned} \tag{39}$$

где $p^2 = 1 - 2qt + q^2$ и введено обозначение

$$\{\int\int\} \equiv \{\int_0^{1/2} dq \int_{-1}^{1} dt + \int_{1/2}^{\infty} dq \int_{-1}^{1/(2q)} dt\}. \tag{40}$$

Уравнение должно решаться с условием нормировки $F(\infty) = 1$. Оно решалось методом пробных функций. В качестве простейшего однопараметрического приближения была выбрана известная форма спектра Фон Кармана

$$E(k) = C_k\,\bar{\varepsilon}^{2/3}\frac{k^2}{(k^2 + b^2/l^2)^{11/6}}\,, \tag{41}$$

что с учетом (32) дает

$$F(\chi) = \frac{\chi^{11/3}}{(\chi^2+b^2)^{11/6}}\,. \tag{42}$$

Для такого спектра интеграл (35) вычисляется аналитически

$$I = \frac{b^{-2/3}\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/3)}{4\Gamma(11/6)}\,. \tag{43}$$

Параметр b выбирался из условия наилучшего совпадения левой и правой частей (38). Более точно, минимизировалось относительное среднеквадратичное отклонение этих величин, умноженных на $C_k^{3/2} g_*^{1/2}/\chi$, в интервале $0 \le \chi \le 15$, поскольку в этом случае правая часть (38) имеет смысл безразмерного спектра функции переноса $T(k)/\bar{\varepsilon}l$. Было получено значение $b \simeq 1.35$. Из (36) и (43) для константы Колмогорова имеем

$$C_k = \frac{2b^{2/3}\Gamma(11/6)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(4/3)} \simeq 1.45\,. \tag{44}$$

Оказалось, что уже однопараметрическое приближение обеспечивает неплохую согласованность амплитуды и положение максимумов кривых левой и правой частей (38).

Более сложная форма пробной функции выбиралась так, чтобы учесть асимметрию в окрестности точки максимума и выполнимость уравнения (38) в области $\chi \gg 1$. Для выполнения первого условия знаменатель формулы Фон Кармана был заменен формой $k^4+2m^2k^2+b^4$. Проанализируем второе условие. Полагая в левой части непосредственно $F(\chi) = 1$, приводим ее к виду

$$-\frac{22}{27}\left(\frac{I}{10}\right)^{1/2}\chi^{-2/3} = -\frac{22}{27}\left(\frac{3}{20C_k}\right)^{1/2}\chi^{-2/3}.$$

Для пробной функции (42) правая часть (38) имеет асимптотику $I_1 \sim k^{-4/3}$. Нетрудно убедиться, что для согласования асимптотик необходимо использовать функцию F, имеющую асимптотическое поведение $F \simeq 1 - hk^{-2/3}$. Линеаризуя интегральный оператор (39) по h, из уравнения (38) для асимптотической области $\chi \gg 1$ находим

$$h = \frac{11}{27I_2}\left(\frac{3}{5C_k}\right)^{1/2}, \tag{45}$$

где

$$\begin{aligned} I_2 &= \{\int\int\}\frac{(1-t^2)q^{-5/3}p^{-17/3}}{1+q^{2/3}+p^{2/3}}\{(1-3qt+q^2+2q^2t^2)(q^{-2/3}+p^{-2/3}) \\ &- (1-2qt+q^3t)p^{11/3}(1+q^{-2/3}) + [1-2qt-p^2(1-qt)]q^{11/3}(1+p^{-2/3})\}\,. \end{aligned} \tag{46}$$

Численное интегрирование дает $I_2 = 0.391$. С учетом вышесказанного была выбрана трехпараметрическая пробная функция

$$F(\chi) = \frac{\chi^{11/3}}{(\chi^4 + 2m^2\chi^2 + b^4)\chi^{11/12}} \frac{1}{[1 + h(c^2 + \chi^2)^{-1/3}]} \tag{47}$$

со свободными параметрами m, b, c. Параметр c был введен для обеспечения аналитичности функции F при $\chi \to 0$. Минимизация среднеквадратичного отклонения левой и правой частей (38) приводит к следующим значениям параметров:

$$b = 1.570\,, \qquad m = 0.657\,, \qquad c = 2.838\,.$$

Для константы Колмогорова C_k получаем

$$C_k = 1.577\,, \tag{48}$$

причем согласно (45) $h = 0.643$. Относительное среднеквадратичное отклонение в интервале $0 \le \chi \le 15$ составило 1.25%. Рис.1 иллюстрирует степень совпадения правой и левой частей (38). Непрерывная кривая изображает левую часть, результаты же вычисления двойного интеграла в правой части для отдельных значений χ изображены знаками $*$. Отметим, что данный рисунок одновременно показывает поведение безразмерного спектра функции переноса в энергосодержащей области с выходом на нулевую асимптотику в инерционном интервале, т.е. при больших χ.

Функции $F(\chi)$ в (47) соответствует энергетический спектр $E(k)$

$$E(k) = \frac{C_k\, \bar{\varepsilon}^{2/3} k^2}{(k^4 + 2m^2k^2/l^2 + b^4/l^4)^{11/12}} \frac{1}{[1 + h(c^2 + k^2l^2)^{-1/3}]}\,. \tag{49}$$

Обычно в эксперименте измеряется продольный спектр $E_{||}(k)$,связанный с $E(k)$ соотношением [1]

$$E_1(k) = \int_k^\infty \frac{dk_1}{k_1}\left(1 - \frac{k^2}{k_1^2}\right) E(k_1)\,. \tag{50}$$

Для безразмерного спектра $E_{||}(k)/u^2l$ из (32), (31) получаем

$$\frac{E_1(k)}{u^2l} = C_k^{-5/3} \int_1^\infty dq\; q^{-8/3}(1 - q^{-2})F(q)\,. \tag{51}$$

В работе [7] экспериментальные данные [11] приведены в используемых нами безразмерных переменных $\chi = kl$ и $E_{||}(k)/u^2l$. На рисунке 2 приведены экспериментальные точки,соответствующие энергосодержащему и инерционному интервалам, измеренные на разных расстояниях x от решетки (x/M - относительное расстояние). Самые правые точки показывают отклонение от колмогоровского наклона, что объясняется влиянием диссипации. Результат нашего вычисления спектра (51) с F из (47) изображен сплошной линией. Знаками «*» для сравнения показан колмогоровский наклон в инерционной области.

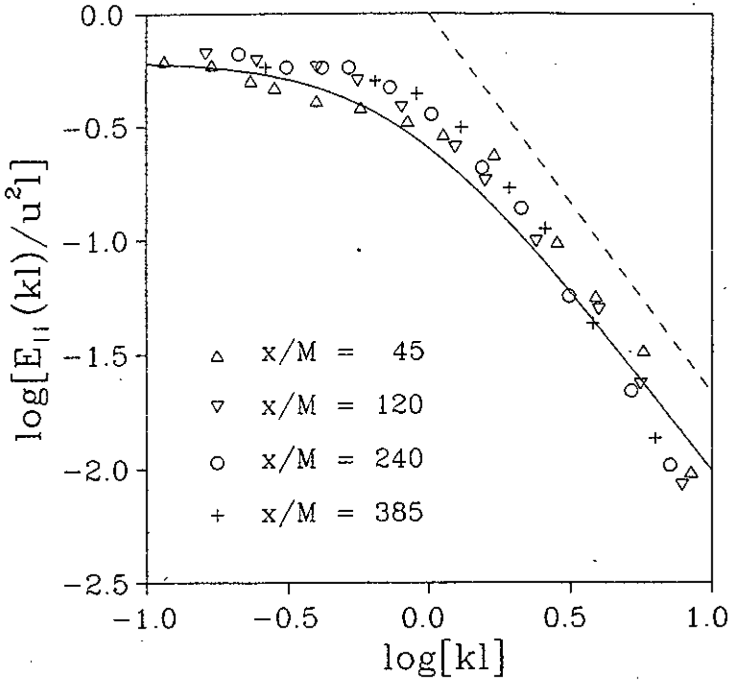

Рис.1. Графики экспериментальной и теоретической зависимости продольного спектра турбулентной энергии от волнового числа k, измеренного в единицах обратных длин Фон Кармана

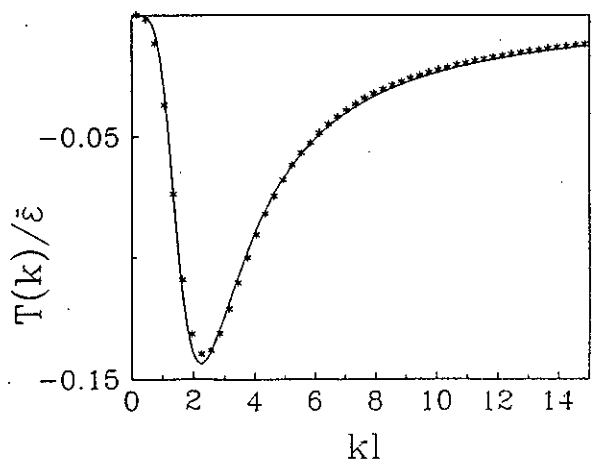

Рис.2. Графическое изображение поведения левой (сплошная кривая) и правой (знаки *) частей уравнения (38) с пробной функцией (47)

При сравнении экспериментальных данных с теоретической кривой нужно учитывать, что эта кривая соответствует случаю сильно развитой турбулентности для предельно больших чисел Рейнольдса. Естественно поэтому, что согласованность теории и эксперимента должна улучшаться с увеличением числа Рейнольдса (с уменьшением расстояния x/M от решетки). Такое поведение в известной степени демонстрирует рис. 2.

3 Заключение

Основной результат работы состоит в том, что предложен способ расчета спектра энергии и функции переноса затухающей турбулентности в энергосодержащем интервале. С этой целью использована стохастическая модель изотропной однородной турбулентности, в которой спектр шума выбирался таким образом, чтобы оптимально описать реальный спектральный баланс энергии в локально-однородном приближении. В качестве технического метода расчета использовался РГ-подход и ϵ-разложение. Это позволило обойтись без введения в теорию подгоночных параметров и найти замкнутое уравнение для спектра энергии.

Полученный продольный спектр энергии не содержит свободных параметров и удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными в области изменения волнового числа от 10^{-1} до 10^{1} обратных длин Фон Кармана. При этом спектральная энергия также меняется почти на два порядка.

Спектр функции переноса также качественно согласуется с физическими представлениями о его поведении в энергосодержащем интервале [2], однако точность экспериментальных данных не позволяет проводить количественные сравнения.

М.Стеглик и М.Гнатич выражают свою признательность Д.И.Казакову и директору ЛТФ ОИЯИ академику Д.В.Ширкову за создание оптимальных условий для научной работы во время их пребывания в ЛТФ. Авторы также благодарят Я.Немчика за помощь при создании рисунков.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Международного научного фонда (грант R-63000) и гранта 2/550/93 Словацкой академии наук.

4 Приложение

При изучении однородной турбулентности, интересуясь только инерционным интервалом, примем для спектра шума модель $D(k) = \bar{\varepsilon}\delta(\vec{k})$, и баланс энергии будет описываться

$$\frac{T(k)}{S_d k^{d-1}} = \bar{\varepsilon}\delta(\vec{k}) \tag{52}$$

(вязким членом можно пренебречь). Чтобы согласовать это с видом (13), возьмем степенное представление для δ-функции

$$\delta(\mathrm{k}) = S_d^{-1} \lim_{\sigma\to+0} \frac{\sigma}{k^{d-\sigma}}\ , \tag{53}$$

$$2\epsilon = 4 - \sigma\,. \tag{54}$$

Уравнение баланса энергии запишется в виде:

$$T(k) = \bar{\varepsilon} \lim_{\sigma\to+0} \frac{\sigma}{k^{1-\sigma}}\,. \tag{55}$$

Соотношение (55) с учетом (16) при $F = 1$ определяет связь амплитуды D_0 со скоростью диссипации $\bar{\varepsilon}$. Коэффициент пропорциональности между ними находится

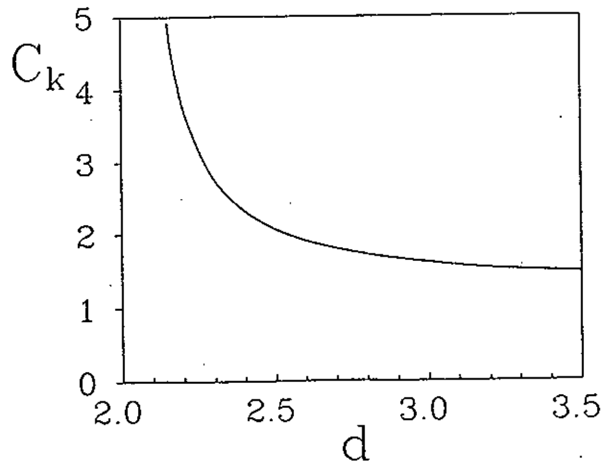

Рис.3. График зависимости константы Колмогорова от размерности пространства

с учетом того, что $T(k) \to 0$ при $\epsilon = 2$ [2, 10]. Подставляя найденное из (55) выражение для D_0 в (14) и сравнивая с известной формулой $E(k) = C_k\bar{\varepsilon}^{2/3}k^{-5/3}$, получаем для константы Колмогорова C_k выражение

$$C_k = \left(\frac{3\pi}{16(d+2)} \left[\frac{(d-1)\Gamma(\frac{d+1}{2})}{T_0 \Gamma(d/2)} \right]^2 \right)^{1/3} , \tag{56}$$

где T_0 можно записать в виде:

$$\begin{aligned} T_0 &= \{\int\int\} \frac{(1-t^2)^{\frac{d-1}{2}} q^{-5/3} p^{-d-8/3}}{1+q^{2/3}+p^{2/3}} \\ &\times \left\{ \left[(d-1)q^2 - 2tqp^2\right] \ln q + \left[(d-1)p^2 - 2q^2(1-tq)\right] \ln p \right\} . \end{aligned} \tag{57}$$

Здесь $p^2 = 1 - 2tq + q^2$, а $\{\int\int\}$ дается выражением (40).

Результат численного интегрирования приведен на рисунке 3. При $d = 3$ $C_k \simeq 1.606$, что соответствует результату [4, 13] и $C_k \to \infty$ при $d \to 2.066$ [12, 13].

Литература

[1] Монин А.С., Яглом А.Н. *Статистическая гидромеханика*.Ч.2, (М., Наука, 1967).

[2] McComb W.D. *The Physics of Fluid Turbulence* (Oxford: Clarendon, 1990).

[3] C.De Dominicis and P.C.Martin, *Phys.Rev.* **A 19** 419 (1979).

[4] V.Yakhot and S.A.Orszag, *J. Sci. Comput.* **1** 3 (1986)
V.Yakhot and S.A.Orszag, *Phys.Rev.Lett.*. **57** 1722 (1986).

[5] W.P.Dannevik, V.Yakhot and S.A.Orszag, *Phys.Fluids* **30** 2021 (1987).

[6] Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н., *ЖЭТФ* **95** 1272 (1989).

[7] W.M.George, *Phys.Fluids* **A 4** 1492 (1992).

[8] D.Forster, D.R. Nelson, M.J. Stephen, *Phys.Rev.A* **16** 732 (1977).

[9] Аджемян Л.Ц., Антонов Н.В., Васильев А.Н. *Квантово-полевая ренорм-группа в теории развитой турбулентности* (направлено в УФН).

[10] S.A.Orszag, *Lectures on the statistical theory of turbulence* in Fluid Dynamics, Les Houches, 1973, edited by R.Balian and J.L.Peube (Gordon and Breach, New York) 235 (1977).

[11] G.Compte-Bellot, S.Corrsin, *J.Fluid Mech.* **48** 273 (1971)

[12] J.D. Fournier, U.Frisch, Phys.Rev.A **17** 747 (1978).

[13] D.Carati, *Phys.Rev.* **A 41** 3129 (1990).

Рукопись поступила в издательский отдел
9 августа 1994 года.